數學傳播　41卷3期, pp. 70-81

一個雙參數的分式不等式

江永明

摘要: 用分析方法建立了一個二元型雙參數的分式不等式, 並且借助數學歸納法和貝努利不等式將其推廣到 n 元的情形。

關鍵字: 分析方法、數學歸納法、貝努利不等式、一個雙參數的分式不等式。

一、問題的提出及研究背景

2001 年 7 月, 在美國華盛頓舉行的第 42 屆國際數學奧林匹克競賽 (簡稱 IMO) 的第2題[1]為: 對所有正實數 a, b, c, 證明:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1 \tag{1}$$

文 [2] 利用反證法證明、文 [3] 先通過證明一個輔助不等式同時推廣 (1) 式為:
設 $a_1, a_2, \ldots, a_n\in R^+$ $(n\geq 3)$, 則有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt[n-1]{a_i^{n-1}+(n^{n-1}-1)\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_j}}\geq 1 \tag{2}$$

文 [4] 用加權均值不等式推廣 (1) 式為:
設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\geq 3)$, $\lambda\geq(n^{n-1}-1)\mu>0$, $\lambda+\mu=n^{n-1}$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt[n-1]{\mu a_i^{n-1}+\lambda\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_j}}\geq 1 \tag{3}$$

文 [5]、[6] 利用 Holder 不等式及高維算術 — 幾何均值不等式, 給出 (1) 式的如下新的隔離

推廣: 設 $a_i>0$, $(i=1,2,\ldots,n)$, $m,n\in N$, $n\geq 2$, $m\geq 1$, $\lambda\geq n^m-1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\frac{n-1}{m}}}{\left(a_i^{n-1}+\lambda\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_j\right)^{\frac{1}{m}}}\geq\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\frac{n}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{n}+\lambda n\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{m}}}\geq\frac{n}{\sqrt[m]{1+\lambda}}\tag{4}$$

我們注意到, 若在 (1) 式中作代換: $bc/a^2\to x_1$, $ca/b^2\to x_2$, $ab/c^2\to x_3$; 在 (2)−(4) 及文 [7]、[8] 的有關結果中作類似如下的代換: $a_1a_2\cdots a_n/a_i^n\to x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則全部不等式皆可統一轉化爲求如下:

問題: 當 λ, $x_i\in R^+=(0,+\infty)$, $i=1,2,\ldots,n$, $n\geq 2$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$, $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=1$ 時, 雙參數的分式函數 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^{\alpha}$ 的上下界。

文 [7] 用多元函數求極值的方法 — 拉格朗日乘數法花了很大篇幅解決了當 $n=3$ 且 $\alpha=1/2$ 時, 上述分式函數的上、下界。

文 [8] 用權方和不等式和陳計的一個分析不等式證得: 當 $\lambda\geq n^{\frac{1}{\alpha}}-1$ $(0<\alpha\leq n-1)$ 時,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^{\alpha}\geq\frac{n}{(1+\lambda)^{\alpha}}.\tag{5}$$

本文沿用筆者文 [9]∼[12] 的分析方法與技巧結合數學歸納法、貝努力不等式給出上述問題: 當 $n=2$ 時的完整結果以及 $n\geq 3$ 時的一些新結果。

注記1: 因部分中等文獻結果隸屬於上述列出的文獻結果或者較平凡, 故本文就不一一列舉了。

二、主要結果

定理1: 設 $\lambda,x_1,x_2\in R^+=(0,+\infty)$, $\alpha\neq 0$, 且 $x_1x_2=1$, 則
若 $\alpha>1$, 則

$$\text{當 }\lambda\geq\frac{1}{\alpha}\text{ 時, }1>\left(\frac{1}{1+\lambda x_1}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{1+\lambda x_2}\right)^{\alpha}\geq\frac{2}{(1+\lambda)^{\alpha}}.\tag{6}$$

$$\text{當 }2^{\frac{1}{\alpha}}-1<\lambda<\frac{1}{\alpha}\text{ 時, }1>\left(\frac{1}{1+\lambda x_1}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{1+\lambda x_2}\right)^{\alpha}>\frac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}}.\tag{7}$$

$$\text{當 }0<\lambda\leq 2^{\frac{1}{\alpha}}-1\text{ 時, }\frac{2}{(1+\lambda)^{\alpha}}\geq\left(\frac{1}{1+\lambda x_1}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{1+\lambda x_2}\right)^{\alpha}>\frac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}}.\tag{8}$$

若 $0<\alpha\le 1$, 則

當 $0<\lambda\le\dfrac{1}{\alpha}$ 時, $\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}\ge\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_1}\right)^\alpha+\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_2}\right)^\alpha>1.$ (9)

當 $\alpha\ne 1$, 且 $\dfrac{1}{\alpha}<\lambda<2^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時, $\dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}>\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_1}\right)^\alpha+\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_2}\right)^\alpha>1.$ (10)

當 $\lambda\ge 2^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時, $\dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}>\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_1}\right)^\alpha+\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_2}\right)^\alpha\ge\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}.$ (11)

若 $\alpha<0$, 則 $\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_1}\right)^\alpha+\left(\dfrac{1}{1+\lambda x_2}\right)^\alpha\ge\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}.$ (12)

注記2: 當 $\alpha=1$ 且 $\lambda=1$ 時, (9) 的右端和 (11) 的左端不等式還可以取得等號。

定理2: 設 $\lambda,\ x_i\in R^+=(0,+\infty)$, $i=1,2,\ldots,n$, $n\ge 3$, $\prod\limits_{i=1}^n x_i=1$, 則

當 $\underline{\lambda\ge n^{\frac{1}{\alpha}}-1\,(0<\alpha\le n-1)}$[8] 或 $\alpha\le 0$ 或 $\lambda\ge\dfrac{n-1}{\alpha}$ (其中 $\alpha>1$) 時, 有

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^\alpha\ge\frac{n}{(1+\lambda)^\alpha}. \tag{13}$$

當 $0<\lambda<n^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 且 $0<\alpha\le n-1$ 時,

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^\alpha>1. \tag{14}$$

當 $0<\lambda<\dfrac{n-1}{\alpha}$ 且 $\alpha>n-1$ 時,

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^\alpha>\frac{n}{\left(1+\dfrac{n-1}{\alpha}\right)^\alpha}. \tag{15}$$

當 $0<\lambda\le\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 且 $\alpha\ge 1$ 時,

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^\alpha\le\frac{n}{(1+\lambda)^\alpha}. \tag{16}$$

當 $\lambda>\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 且 $\alpha\ge 1$ 時,

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{1+\lambda x_i}\right)^\alpha<n-1. \tag{17}$$

注記3: 除上述下劃線[8]外其餘結果包括定理 1 皆爲本文獲得的新結果。

三、定理1的證明

證明: 因 $x_1, x_2 > 0$ 且 $x_1x_2 = 1$, 不妨設 $0 < x_1 = x \le 1$, 則 $x_2 = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ 且有

$$\Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^\alpha + \Big(\frac{1}{1+\lambda x_2}\Big)^\alpha = (1+\lambda x)^{-\alpha} + \Big(\frac{x}{x+\lambda}\Big)^\alpha.$$

記 $f(x) = (1+\lambda x)^{-\alpha} + \Big(\dfrac{x}{x+\lambda}\Big)^\alpha$, $x \in (0,1]$, 則有

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\lambda\alpha(1+\lambda x)^{-\alpha-1} + \frac{\lambda\alpha}{(x+\lambda)^2}\Big(\frac{x}{x+\lambda}\Big)^{\alpha-1} \\ &= -\lambda\alpha(1+\lambda x)^{-\alpha-1} + \lambda\alpha x^{\alpha-1}(x+\lambda)^{-\alpha-1} \\ &= \lambda\alpha(1+\lambda x)^{-\alpha-1}(x+\lambda)^{-\alpha-1}[-(x+\lambda)^{\alpha+1} + x^{\alpha-1}(1+\lambda x)^{\alpha+1}] \\ &= \lambda\alpha(1+\lambda x)^{-\alpha-1}(x+\lambda)^{-\alpha-1}g(x) \end{aligned}$$

其中

$$g(x) = -(x+\lambda)^{\alpha+1} + x^{\alpha-1}(1+\lambda x)^{\alpha+1}$$

當 $\alpha = 1$ 時, $g(x) = -(x+\lambda)^2 + (1+\lambda x)^2 = (x+\lambda+1+\lambda x)(x-1)(\lambda-1)$。

顯然, 若 $\lambda \ge 1$, 則當 $x \le 1$ 時, $g(x) \le 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上單調遞減, 從而在 $(0,1]$ 上必有

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1 \ge f(x) \ge f(1) = \frac{2}{1+\lambda}.$$

左等號當且僅當 $\lambda = 1$ 時取得。同理當 $\lambda < 1$ 時, 在 $(0,1]$ 上必有

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1 < f(x) \le f(1) = \frac{2}{1+\lambda}.$$

即 (9) 和 (11) 式成立。

當 $\alpha \ne 1$ 時, 作函數 $h(x) = (\alpha-1)\ln x + (\alpha+1)\ln(1+\lambda x) - (\alpha+1)\ln(\lambda+x)$。

其中 $x, \alpha, \lambda > 0$ 顯然, 對任意 $x \in (0,1]$, $f'(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 三個函數必有相同的符號, 即若 $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(x) \ge 0$ (或 $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le 0$), 故探討 $f'(x)$ 的符號與探討 $h(x)$ 的符號等價。易見

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\alpha-1}{x} + \frac{\lambda(\alpha+1)}{1+\lambda x} - \frac{(\alpha+1)}{\lambda+x} = \frac{\alpha-1}{x} + \frac{(\alpha+1)(\lambda^2-1)}{(1+\lambda x)(\lambda+x)} \\ &= \frac{(\alpha-1)(1+\lambda x)(\lambda+x) + (\alpha+1)(\lambda^2 x - x)}{x(1+\lambda x)(\lambda+x)} \\ &= \frac{\lambda(\alpha-1)x^2 + (2\alpha\lambda^2-2)x + \lambda(\alpha-1)}{x(1+\lambda x)(\lambda+x)} = \frac{u(x)}{x(1+\lambda x)(\lambda+x)}. \end{aligned}$$

1. 當 $\alpha>1$ 時, $u(x)=\lambda(\alpha-1)x^2+(2\alpha\lambda^2-2)x+\lambda(\alpha-1)$ 的判別式

$$\Delta=4[(\alpha\lambda^2-1)^2-\lambda^2(\alpha-1)^2]=4(\lambda^2-1)(\alpha^2\lambda^2-1).$$

1) 當 $\lambda\geq 1$ 時, 顯然 $2\alpha\lambda^2-2>0$, $\Rightarrow u(x)>0\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow$ 故 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上嚴格單調遞增, 所以 $h(x)\leq h(1)=0$, 進而 $f'(x)\leq 0$。故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上單調遞減, 從而

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1>f(x)\geq f(1)=\frac{2}{(1+\lambda)^\alpha}.$$

2) 當 $\dfrac{1}{\alpha}\leq\lambda<1$ 時, $\alpha\lambda\geq 1\Rightarrow\Delta\leq 0$, 再由 $\lambda(\alpha-1)>0$ 及二次函數的性質知: 在 $(0,1]$ 上恒有 $u(x)\geq 0\Leftrightarrow h'(x)\geq 0$, 故與 1) 相同, 仍有

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1>f(x)\geq f(1)=\frac{2}{(1+\lambda)^\alpha}.$$

由上述 1)、2) 知: 當 $\lambda\geq\dfrac{1}{\alpha}$ 時, $1>f(x)\geq\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$, 即 (6) 式成立。

3) 當 $0<\lambda<\dfrac{1}{\alpha}$ 時, $\alpha\lambda<1\Rightarrow\Delta>0$。故方程 $u(x)=0$ 有兩個不等實根, 設其爲: ξ_1,ξ_2; 由韋達定理得:

$$\xi_1+\xi_2=-\frac{2(\alpha\lambda^2-1)}{\lambda(\alpha-1)}>0,\ \xi_1\xi_2=1。$$

$\Rightarrow$ 方程 $u(x)=0$ 有兩個互爲倒數的正根, 不妨設爲 $0<\xi_1<1<\xi_2$, 則有 $u(x)=\lambda(\alpha-1)(x-\xi_1)(x-\xi_2)$。下面再分兩種情形來討論:

i) 當 $\xi_1<x\leq 1$ 時, $u(x)<0\Rightarrow h'(x)<0$。故 $h(x)$ 在 $(\xi_1,1]$ 上嚴格單調遞減, $\Rightarrow(\xi_1,1]$ 上 $h(\xi_1)>h(x)\geq h(1)=0$, $\Rightarrow$ 在 $(\xi_1,1]$ 上 $f'(\xi_1)>f'(x)\geq f'(1)=0$; 所以 $f(x)$ 在 $(\xi_1,1]$ 上單調遞增, 從而 $f(\xi_1)<f(x)\leq f(1)=\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$。

ii) 當 $0<x<\xi_1$ 時, $u(x)>0\Rightarrow h'(x)>0$。故 $h(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 上嚴格單調遞增, $\Rightarrow(0,\xi_1)$ 上 $h(x)<h(\xi_1)$。由 $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\to-\infty$ 及 i) 已證得 $h(\xi_1)>0$ 易知: $h(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 上有且只有一個實根, 不妨設爲 ξ, 則有:

ii$_1$) 當 $0<x\leq\xi$ 時, $h(x)\leq h(\xi)=0\Rightarrow f'(x)\leq f'(\xi)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)>f(x)\geq f(\xi)$;

ii$_2$) 當 $\xi<x\leq\xi_1$ 時, $h(\xi_1)\geq h(x)>h(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi_1)\geq f'(x)>f'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)<f(x)\leq f(\xi_1)$.

由上述 i) 及 ii_2) 知: 在 $(\xi, 1]$ 上 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) < f(x) \leq f(1) = \dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$: 再結合 ii_1) 便得出: 當 $0 < \lambda < \dfrac{1}{\alpha}$ 時, 在 $(0,1]$ 上有 $\max\left\{\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right\} \geq f(x) \geq f(\xi)$。又當 $2^{\frac{1}{\alpha}} - 1 < \lambda < \dfrac{1}{\alpha}$ 時, $\Rightarrow \dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha} < 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, 故據冪函數的性質及剛巳證得的 (6) 知

$$1 > f(x) \geq f(\xi) = (1+\lambda\xi)^{-\alpha} + \left(\frac{\xi}{\xi+\lambda}\right)^\alpha > \left(1 + \frac{1}{\alpha}\xi\right)^{-\alpha} + \left(\frac{\xi}{\xi+\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \geq \frac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}.$$

即 $1 > f(x) > \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}$ 故 (7) 式成立。

當 $0 < \lambda \leq 2^{\frac{1}{\alpha}} - 1$ 時, $\Rightarrow \dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha} \geq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, 故據冪函數的性質及剛巳證得的 (6) 知

$$\frac{2}{(1+\lambda)^\alpha} \geq f(x) \geq f(\xi) = (1+\lambda\xi)^{-\alpha} + \left(\frac{\xi}{\xi+\lambda}\right)^\alpha > \left(1+\frac{1}{\alpha}\xi\right)^{-\alpha} + \left(\frac{\xi}{\xi+\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \geq \frac{2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}.$$

即 $\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha} \geq f(x) > \dfrac{2}{\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^\alpha}$, 故 (8) 式成立。

2. 當 $0 < \alpha < 1$ 時, $u(x) = \lambda(\alpha-1)x^2 + (2\alpha\lambda^2 - 2)x + \lambda(\alpha-1)$ 的判別式

$$\Delta = 4[(\alpha\lambda^2-1)^2 - \lambda^2(\alpha-1)^2] = 4(\lambda^2-1)(\alpha^2\lambda^2-1).$$

1) 當 $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{\alpha}$ 時,

若 $0 < \lambda \leq 1$, 則 $\lambda(\alpha-1) < 0$, $2\alpha\lambda^2 - 2 \leq 0$, 故 $u(x) \leq 0$;

若 $1 < \lambda \leq \dfrac{1}{\alpha}$, 則 $0 < \alpha\lambda \leq 1 \Rightarrow \Delta \leq 0$, 又由 $\lambda(\alpha-1) < 0$ 及二次函數的性質知: $u(x) \leq 0$。因此, 當 $0 < \lambda \leq \dfrac{1}{\alpha}$ 時, 對 $x \in (0,1]$ 有 $u(x) \leq 0$, $\Rightarrow h'(x) \leq 0 \Rightarrow$ 故 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上單調遞減, 所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 從而 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上單調遞增, 從而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 < f(x) \leq f(1) = \dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$, 即 (9) 式成立。

2) 當 $\lambda > \dfrac{1}{\alpha}$ 時, $\alpha\lambda > 1 \Rightarrow \Delta > 0$。方程 $u(x) = 0$ 有兩個不等實根, 設其爲 ξ_1, ξ_2; 由韋達定理得:

$$\xi_1 + \xi_2 = -\frac{2(\alpha\lambda^2-1)}{\lambda(\alpha-1)} > 0, \qquad \xi_1\xi_2 = 1.$$

故方程 $u(x)=0$ 有兩個互為倒數的正根, 不妨設為 $0<\xi_1<1<\xi_2$, 則有 $u(x)=\lambda(\alpha-1)(x-\xi_1)(x-\xi_2)$。下面再分兩種情形來討論:

i) 當 $\xi_1<x\le 1$ 時, $u(x)>0\Rightarrow h'(x)>0$。$h(x)$ 在 $(\xi_1,1]$ 上嚴格單調遞增, $\Rightarrow$ $(\xi_1,1)$ 上 $h(\xi_1)<h(x)\le h(1)=0,\Rightarrow$ 在 $(\xi_1,1]$ 上 $f'(\xi_1)<f'(x)\le f'(1)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\xi_1,1]$ 上單調遞減, 從而 $f(\xi_1)>f(x)\ge f(1)=\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$。

ii) 當 $0<x<\xi_1$ 時, $u(x)<0\Rightarrow h'(x)<0$。故 $h(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 上嚴格單調遞減, $\Rightarrow(0,\xi_1)$ 上 $h(x)>h(\xi_1)$。由 $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\to+\infty$ 及 i) 已證得的 $h(\xi_1)<0$ 易知: $h(x)$ 在 $(0,\xi_1)$ 上有且只有一個實根, 不妨設為 ξ, 則有:

ii$_1$) 當 $0<x\le\xi$ 時, $h(x)\ge h(\xi)=0\Rightarrow f'(x)\ge f'(\xi)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)<f(x)\le f(\xi)$;

ii$_2$) 當 $\xi<x\le\xi_1$ 時, $h(\xi_1)\le h(x)<h(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi_1)\le f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow(\xi,\xi_1]$ 上 $f(\xi)>f(x)\ge f(\xi_1)$.

由上述 i) 及 ii$_2$) 知: 在 $(\xi,1]$ 上 $f'(x)\le 0\Rightarrow f(\xi)>f(x)\ge f(1)=\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}$, 再結合 ii$_1$) 便立即得出: 當 $\lambda>\dfrac{1}{\alpha}$ 時, 在 $(0,1]$ 上有 $\min\left\{\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha},\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right\}\le f(x)\le f(\xi)$, 又

當 $\dfrac{1}{\alpha}<\lambda<2^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時, $\Rightarrow\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}>1=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 故據冪函數的性質及剛已證得的 (9) 得

$$1<f(x)\le f(\xi)=(1+\lambda\xi)^{-\alpha}+\Big(\frac{\xi}{\xi+\lambda}\Big)^\alpha<\Big(1+\frac{1}{\alpha}\xi\Big)^{-\alpha}+\Big(\frac{\xi}{\xi+\frac{1}{\alpha}}\Big)^\alpha\le\frac{2}{\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)^\alpha}.$$

即 $1<f(x)<\dfrac{2}{\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)^\alpha}$, 故 (10) 式成立。

當 $\lambda\ge 2^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時, $\Rightarrow\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}\le 1=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, 故據冪函數的性質及剛已證得的(9)得

$$\frac{2}{(1+\lambda)^\alpha}\le f(x)\le f(\xi)=(1+\lambda\xi)^{-\alpha}+\Big(\frac{\xi}{\xi+\lambda}\Big)^\alpha<\Big(1+\frac{1}{\alpha}\xi\Big)^{-\alpha}+\Big(\frac{\xi}{\xi+\frac{1}{\alpha}}\Big)^\alpha\le\frac{2}{\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)^\alpha}.$$

即 $\dfrac{2}{(1+\lambda)^\alpha}\le f(x)<\dfrac{2}{\Big(1+\frac{1}{\alpha}\Big)^\alpha}$。故 (11) 式成立。

3. 當 $\alpha < 0, \lambda > 0$ 時,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^{\alpha}+\Big(\frac{1}{1+\lambda x_2}\Big)^{\alpha} &= (1+\lambda x_1)^{-\alpha}+(1+\lambda x_2)^{-\alpha} \\ &\geq 2\sqrt{(1+\lambda x_1)^{-\alpha}(1+\lambda x_2)^{-\alpha}} = 2\sqrt{[(1+\lambda x_1)(1+\lambda x_2)]^{-\alpha}} \\ &\geq 2\sqrt{(1+\lambda)^{-2\alpha}} = \frac{2}{(1+\lambda)^{\alpha}}\end{aligned}$$

再令 $x_1 \to +\infty$, 則上式左端趨於 $+\infty$, 從而左端無有限上界, 故 (12) 式成立。

綜上所述各種情形知, 定理1成立。證畢。

四、定理2的證明

證明: 先證 (13) (用數學歸納法):

(I-1) 當 $\alpha \leq n-1$ 時, 容易證明 (13) 式成立, 且因文 [8] 已證明其成立, 故本文不再贅述。

(I-2) 當 $\alpha > 1$ 且 $\lambda \geq \dfrac{n-1}{\alpha}$ 時

i) 當 $n=2$ 且 $\lambda \geq \dfrac{1}{\alpha}$, $x_1x_2=1$ 時, 由定理 1 的 (6) 式右端知下式成立。

$$\Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^{\alpha}+\Big(\frac{1}{1+\lambda x_2}\Big)^{\alpha} \geq \frac{2}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$

ii) 假設當 $n=k$ $(k \geq 2)$ 且 $\prod\limits_{i=1}^{k} x_i = 1$, $\lambda \geq \dfrac{k-1}{\alpha}$ 時, $\sum\limits_{i=1}^{k}\Big(\dfrac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} \geq \dfrac{k}{(1+\lambda)^{\alpha}}$ 成立。那麼 $n=k+1$ $(k \geq 2)$ 且 $\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i = 1$, $\lambda \geq \dfrac{(k+1)-1}{\alpha}$ 時, 由 (13) 式的對稱性知: 不妨設 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{k+1}$; 再令 $\lambda_1 = \lambda\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}$, $\lambda_2 = \lambda\sqrt[k]{x_{k+1}}$, $y_i = \dfrac{x_i}{\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}}$ (其中 $i=1,2,\ldots,k$), $z_1 = (\sqrt[k]{x_{k+1}})^{k-1}$, $z_i = (\sqrt[k]{x_{k+1}})^{-1}$, (其中 $i=2,3,\ldots,k$), 則由 $\prod\limits_{i=1}^{k+1} x_i = 1$ 得: $0 < x_1x_2\cdots x_k \leq 1 \leq x_{k+1}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$, 且還有 $\prod\limits_{i=1}^{k} y_i = 1$, $\prod\limits_{i=1}^{k} z_i = 1$。

ii_1) 若 $\lambda_1 \geq \dfrac{k-1}{\alpha}$, 則由歸納假設及定理 1 的 (6) 式的右端知:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 y_i}\Big)^{\alpha}+\Bigg[\Big(\frac{1}{1+\lambda x_{k+1}}\Big)^{\alpha}+\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\Bigg]-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 y_i}\Big)^{\alpha}+\left[\frac{1}{[1+\lambda\sqrt[k]{x_{k+1}}\cdot(\sqrt[k]{x_{k+1}})^{k-1}]^{\alpha}}+\frac{k-1}{[1+\lambda\sqrt[k]{x_{k+1}}\cdot(\sqrt[k]{x_{k+1}})^{-1}]^{\alpha}}\right]$$
$$-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 y_i}\Big)^{\alpha}+\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_2 z_i}\Big)^{\alpha}-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$
$$\geq\frac{k}{(1+\lambda_1)^{\alpha}}+\frac{k}{(1+\lambda_2)^{\alpha}}-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$
$$=k\cdot\left[\frac{1}{(1+\lambda\cdot\lambda_1/\lambda)^{\alpha}}+\frac{1}{(1+\lambda\cdot\lambda_2/\lambda)^{\alpha}}\right]-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$
$$\geq\frac{2k}{(1+\lambda)^{\alpha}}-\frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}=\frac{k+1}{(1+\lambda)^{\alpha}}.$$

ii_2) 若 $0<\lambda_1<\dfrac{k-1}{\alpha}$, 則由 $\alpha>1$、分數的性質及歸納假設知:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 y_i}\Big)^{\alpha}+\Big(\frac{1}{1+\lambda x_{k+1}}\Big)^{\alpha}$$
$$>\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 y_i}\Big)^{\alpha}>\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{1+\big(\frac{k-1}{\alpha}\big)y_i}\right]^{\alpha}\geq\frac{k}{\big(1+\frac{k-1}{\alpha}\big)^{\alpha}}$$

下面證 $\dfrac{k}{\big(1+\frac{k-1}{\alpha}\big)^{\alpha}}>\dfrac{k+1}{\big(1+\frac{k}{\alpha}\big)^{\alpha}}$, 這等價於證 $\Big(1+\dfrac{k}{\alpha}\Big)>\Big(1+\dfrac{k-1}{\alpha}\Big)\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$.

由熟知的貝努利不等式: $(1+x)^r\leq 1+rx$ (其中 $x>-1$, $0<r<1$) 得

$$\Big(1+\frac{k-1}{\alpha}\Big)\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\Big(1+\frac{k-1}{\alpha}\Big)\Big(1+\frac{1}{\alpha k}\Big)=1+\frac{k-1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha k}+\frac{k-1}{\alpha^2 k}$$
$$<1+\frac{k-1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha k}+\frac{k-1}{\alpha k}=1+\frac{k}{\alpha}=1+\frac{(k+1)-1}{\alpha}\leq 1+\lambda.$$

從而有

$$\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}>\frac{k}{\big(1+\frac{k-1}{\alpha}\big)^{\alpha}}>\frac{k+1}{\big(1+\frac{k}{\alpha}\big)^{\alpha}}\geq\frac{k+1}{(1+\lambda)^{\alpha}}.$$

由 ii_1) 及 ii_2) 知: $n=k+1$ 時 (13) 式仍成立, 故對一切 $2\leq n\in N$, (I-2) 情形的 (13) 式仍成立。

(I-3) 當 $\alpha \le 0$ 時, 由算術 – 幾何平均不等式及柯西不等式得:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{-\alpha}\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)^{-\alpha}}=n\sqrt[n]{\Big[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda x_i)\Big]^{-\alpha}}$$
$$\ge n\sqrt[n]{(1+\lambda)^{-n\alpha}}=\frac{n}{(1+\lambda)^{\alpha}}.$$

故 $\alpha \le 0$ 時, (13) 式也成立。綜上所述 (I-1)、(I-2) 及 (I-3) 知: (13) 式成立。

再證 (14): 當 $0<\lambda<n^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 且 $0<\alpha\le n-1$ 時, 由剛證得的 (13) 式及分數的性質知:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}>\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+(n^{\frac{1}{\alpha}}-1)x_i}\Big)^{\alpha}\ge\frac{n}{\Big(1+n^{\frac{1}{\alpha}}-1\Big)^{\alpha}}=1$$

故 (14) 式成立。

再證 (15): 注意到 $0<\lambda<\dfrac{n-1}{\alpha}$ 及剛證得的 (13) 的 $\lambda\ge\dfrac{n-1}{\alpha}$ $(\alpha>1)$ 的情形, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}>\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\frac{n-1}{\alpha}x_i}\Big)^{\alpha}\ge\frac{n}{\Big(1+\frac{n-1}{\alpha}\Big)^{\alpha}}$$

故 (15) 式成立。

下面證 (16) (用數學歸納法):

i) 當 $n=2$ 且 $0<\lambda\le 2^{\frac{1}{\alpha}}-1$, $x_1x_2=1$ 時, 由定理 1 的 (8)、(9) 兩式的左端知下式成立

$$\Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^{\alpha}+\Big(\frac{1}{1+\lambda x_2}\Big)^{\alpha}\le\frac{2}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$

ii) 假設當 $n=k$ $(k\ge 2)$且 $0<\lambda\le\Big(\dfrac{k}{k-1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}-1$, $\prod\limits_{i=1}^{k}x_i=1$ 時, 下式成立

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}\le\frac{k}{(1+\lambda)^{\alpha}}.$$

那麼 $n=k+1$ $(k\ge 2)$ 且 $0<\lambda\le\Big(\dfrac{k+1}{k}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}-1<\Big(\dfrac{k}{k-1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時, 由對稱性知: 不妨設 $0<x_1\le x_2\le\cdots\le x_{k+1}$; 再令 $\lambda_1=\lambda\sqrt[k]{x_1}$, $\lambda_2=\lambda\sqrt[k]{x_2x_3\cdots x_{k+1}}$, $y_i=\dfrac{x_i}{\sqrt[k]{x_2x_3\cdots x_{k+1}}}$ (其中 $i=2,3,\ldots,k+1$), $z_1=(\sqrt[k]{x_1})^{k-1}$, $z_i=(\sqrt[k]{x_1})^{-1}$ (其中 $i=2,3,\ldots,k$), 則由 $\prod\limits_{i=1}^{k+1}x_i=1$ 得: $0<x_1\le 1\le x_2\cdots x_{k+1}$, $0<\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2=\lambda^2\le(2^{1/\alpha}-1)^2$ 且還有 $\prod\limits_{i=2}^{k+1}y_i=1$, $\prod\limits_{i=1}^{k}z_i=1$。

ii$_1$) 若 $\lambda_2 \le \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$, 則由歸納假設及定理 1 的 (8)、(9) 兩式的左端得:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} &= \Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^{\alpha} + \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}} + \sum_{i=2}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\\
&= \left[\left(\frac{1}{1+\lambda_1\sqrt[k]{x_1^{k-1}}}\right)^{\alpha} + \frac{k-1}{(1+\lambda_1/\sqrt[k]{x_1})^{\alpha}}\right] + \sum_{i=2}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda_2 y_i}\Big)^{\alpha} - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\\
&= \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{1}{1+\lambda_1 z_i}\Big)^{\alpha} + \sum_{i=2}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda_2 y_i}\Big)^{\alpha} - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\\
&\le \frac{k}{(1+\lambda_1)^{\alpha}} + \frac{k}{(1+\lambda_2)^{\alpha}} - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\\
&= k\cdot\left[\frac{1}{(1+\lambda\cdot\lambda_1/\lambda)^{\alpha}} + \frac{1}{(1+\lambda\cdot\lambda_2/\lambda)^{\alpha}}\right] - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}}\\
&\le \frac{2k}{(1+\lambda)^{\alpha}} - \frac{k-1}{(1+\lambda)^{\alpha}} = \frac{k+1}{(1+\lambda)^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

ii$_2$) 若 $\lambda_2 > \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1$, 則由 $\alpha > 1$、分數的性質及歸納假設得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} &= \Big(\frac{1}{1+\lambda x_1}\Big)^{\alpha} + \sum_{i=2}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda_2 y_i}\Big)^{\alpha} < 1 + \sum_{i=2}^{k+1}\Big[\frac{1}{1+[(k/(k-1))^{1/\alpha}-1]y_i}\Big]^{\alpha}\\
&\le 1 + \frac{k}{[1+(k/(k-1))^{1/\alpha}-1]^{\alpha}} = k \le \frac{k+1}{(1+\lambda)^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

由 ii$_1$) 及 ii$_2$) 知: 當 $n=k+1$ 時 (16) 式仍成立。

綜上所述 i)、ii) 知: 對一切 $2 \le n \in N$, (16) 式成立.

最後, 證 (17) 式: 當 $\lambda > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 且 $\alpha \ge 1$ 時, 由剛證得的 (16) 及分數的性質知:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} < \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{1+[(n/(n-1))^{\frac{1}{\alpha}}-1]x_i}\right\}^{\alpha} \le \frac{n}{[1+(n/(n-1))^{\frac{1}{\alpha}}-1]^{\alpha}} = n-1.$$

從而 (17) 式成立。

定理 2 證畢。

注記4: 文 [7] 末引述的猜想: 當 $n^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \le \lambda < \frac{n-1}{\alpha}$ $(\alpha > n-1)$ 時,

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha} \ge \frac{n}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$

並不完全成立。

反例: 取 $n=3$, $\alpha=5$, $x_1=0.1$, $x_2=x_3=1/\sqrt{0.1}$, $\lambda=3^{\frac{1}{5}}-1<\dfrac{2}{5}=\dfrac{n-1}{\alpha}$, 則

$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}\doteq 0.9985489<\frac{2}{(1+\alpha)^{\alpha}}=1.$$

注記5: 當 $0<\alpha<1$ 且 $0<\lambda\leq\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}-1$ 時,

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}\leq\frac{n}{(1+\lambda)^{\alpha}}$$

也不全成立。

反例: 取 $\alpha=\dfrac{1}{6}$, $n=3$, 則 $\lambda\leq\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^{6}-1=10.390625$。再取 $\lambda=10$, $x_1=x_2=0.01$, $x_3=10000$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\lambda x_i}\Big)^{\alpha}=\frac{2}{\sqrt[6]{1.1}}+\frac{1}{\sqrt[6]{100001}}\doteq 2.128304302>\frac{n}{(1+\lambda)^{\alpha}}=\frac{3}{\sqrt[6]{11}}\doteq 2.011665682.$$

致謝: 筆者衷心地感謝北京聯合大學的石煥南教授給予本文的幫助。也衷心地感謝數學傳播審稿人提出的修改意見及審查校正, 使本文更加精確完整。

參考資料

1. 第 42 屆 IM0 試題解答 [J]。中等數學, 5, 2001。
2. 湯慧龍、蔣荔枝。一道IMO 試題的推廣及證明 [J]. 紹興文理學院學報, 4, 2002。
3. 鄒宗蘭、張青山。IMO42-2的一個推廣 [J]. 四川職業技術學院學報, 2, 2005。
4. 鄒祥福。一個不等式的再推廣[J]。紹興文理學院學報, 6, 2004。
5. 文開庭。IMO42-2題的新隔離推廣 [J]。廣西教育學院學報, 6, 2005。
6. 文開庭。一道IMO 賽題的新隔離推廣及其應用 [J]。畢節師範高等專科學校學報 (綜合版), 2, 2005。
7. 郭要紅。對一類極值問題的研討 — 兼擂臺題(60) 的證明 [J]。中學數學教學, 3, 2004。
8. 厲倩。對一個猜想的探討[J]。中學數學教學, 3, 2005。
9. 江永明、石煥南。一個雙參數二元不等式的推廣[J]。北京聯合大學學報 (自然科學版), 20(2), 68-72, 2006。
10. Huan-nan Shi, Yong-ming Jiang and Wei-dong Jiang, Schur-Convexity and Schur-Geometrically Concavity of Gini Mean, *Computers and Mathematics with Applications* (SCI 源期刊), 57, 266-274, 2009.
11. 江永明、石煥南。Stolarsky 與 Gini 平均的一個比較 [J]。湖南理工學院學報 (自然版), 22(3), 07-11, 2009.
12. 江永明、石煥南。Jensen-Janous-Klamkin 型不等式 [J]。成都大學學報 (自然版), 28(3), 208-214, 2009。
13. 匡繼昌。常用不等式第三版 [M]。濟南: 山東科學技術出版社出版, 2004。

—本文作者任教中國重慶市長壽區第一中學—