數學傳播 41卷3期, pp. 60-69

反向倍數知多少

張進安

把 123 從個位反向讀回百位是 321, 我們說 123 的反向數是 321。然而 321 不是 123 的整倍數; 2018 的反向數是 8102, 可惜只是接近 2018 的 4 倍。如果存在一個正整數的反向數恰好是這個正整數的整數倍, 我們暫且稱它們爲反向倍數。本研究的第一個目標是尋找最小的反向倍數, 第二個目標是找出全部的反向倍數, 並探討他們的性質。當然像 555 的 1 倍是 555; 1234321 的 1 倍是 1234321, 這種對稱的情況, 很明顯是 1 倍的反向倍數太 trivial, 接下來的討論我們就直接排除這種情況。

如果讀者對這個問題稍有興趣, 也準備動手研究一下, 你有兩個方向可以出發。一個是從位數著手, 也就是先找找看有沒有二位數的反向倍數, 再找找看有沒有三位數的反向倍數 $\cdots$。對於二位數的反向倍數, 扣掉首末位是 0 及兩個數字重複的, 就算用暴力法窮舉, 也沒有太多的排列組合。從 21 不是 12 的倍數逐一檢驗到 98 不是 89 的倍數, 很快的就可以宣布:

引理一 不存在二位數的反向倍數

看起來很唬人, 但至少是一個具體的結論。接著是逐一檢驗三位數 ABC 是不是 CBA 的整倍數, (這裡 $A\neq 0$, $C\neq 0$, 用大寫 ABC 表示三位數數碼的十進位而不是相乘), 光排列組合起碼也有幾百種, 除非你寫個程式讓電腦跑一下, 否則恐怕不是短時間內可以得到結果的 $\cdots$ 看來, 從位數出發不是很好的方向, 趕快掉頭朝另一個方向, 從倍數著手吧!

首先看看這個關係: $ABC\times t=CBA$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ ($A=0$ 的情況另行討論), 這個 t 其實很有講究, 因爲我們已排除 1 倍的自我反向, 而且 t 如果等於或大於 10, $ABC\times t$ 會進位成四位數以上, 不可能是 ABC 的反向數, 所以 $t\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$。既然只有 8 種倍數, 我們爲什麼不從這 8 種倍數來研究呢?

設 $X\cdots A$ 是 $A\cdots X$ 的反向數 (幾位數先不管), 且 $X\cdots A$ 恰是 $A\cdots X$ 的 2 倍, 寫成一個小學生都看得懂的直式:

$$\begin{array}{r} A\cdots X \\ \times\quad\quad 2 \\ \hline X\cdots A \end{array}$$

這個直式可以提供很多資訊:

1. 最高位的 $A \times 2$ 沒有進位所以 $A \in \{1, 2, 3, 4\}$。
2. 從個位看出 $2X = A$ 或 $2X = 10 + A$, 因此 A 只能是偶數, 所以 $A = 2$ 或 $A = 4$。

讓我們分開來討論:

甲. $A = 2$

$$\begin{array}{r} 2\cdots X \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline X\cdots 2 \end{array}$$

資訊 3. 從個位 $2X \equiv 2 (\bmod 10)$ 可得 $X = 1$ 或 $X = 6$ 但最高位的 $X \geq 4$ 所以 $X = 6$。

到這裡我們有一個十分接近目標卻不可能成立的式子:

$$\begin{array}{r} 2\cdots 6 \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline 6\cdots 2 \end{array}$$

因爲 $(2 \times 10^n + \cdots + 6) \times 2 < (3 \times 10^n) \times 2 = 6 \times 10^n < 6 \times 10^n + \cdots + 2$, 所以 $A = 2$ 不成立。

乙. $A = 4$

$$\begin{array}{r} 4\cdots X \\ \times \quad\quad 2 \\ \hline X\cdots 4 \end{array}$$

這次的分析要簡單多了, 因爲 $2X \equiv 4 (\bmod 10)$ 所以 $X = 2$ 或 $X = 7$, 但 X 在最高位時顯然大於或等於 8, 所以式子就不可能成立了。

到這裡你可以下一個比定理一稍強的結論:

引理二 不存在 2 倍的反向倍數

有 2 就有 3, 繼續如法炮製：

$$\begin{array}{r} A\cdots X \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline X\cdots A \end{array}$$

分析: 從最高位 $A \times 3$ 沒有進位, 所以 $A \in \{1, 2, 3\}$。分開討論:

甲. $A=1$

$$\begin{array}{r} 1\cdots X \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline X\cdots 1 \end{array}$$

因為 $3X\equiv 1(\bmod 10)$ 所以 $X=7$, 但 $X=7$ 在最高位顯然太大了, 所以 $A=1$ 淘汰。

乙. $A=2$

$$\begin{array}{r} 2\cdots X \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline X\cdots 2 \end{array}$$

因為 $3X\equiv 2(\bmod 10)$ 所以 $X=4$, 但 $X=4$ 在最高位顯然太小了, 所以 $A=2$ 淘汰。

丙. $A=3$

$$\begin{array}{r} 3\cdots X \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline X\cdots 3 \end{array}$$

因為 $3X\equiv 3(\bmod 10)$ 所以 $X=1$, 但 $X=1$ 在最高位顯然太小了, 所以 $A=3$ 淘汰。

A 的三個可能都被三振出局, 這樣我們就可以再來一個結論:

引理三 不存在 3 倍的反向倍數

仿照這種直式運算的首尾分析 (其實倍數愈大要分析的愈少), 你一定可以自己發現:

引理四 不存在5、6、7、8倍的反向倍數

也許你已經發現我們漏掉了 4 和 9 倍, 別緊張, 這是數學研究常見的發表模式, 把沒有結果的、不重要的、先一一交代淸楚, 好酒沉甕底, 最重要的主角就要登場了。這次先下定理再來證明:

定理一 最高位不是 0 的反向倍數必是 1 倍 4 倍或 9 倍

我們已經聲明不討論 1 倍的反向倍數, 所以只有 4 倍和 9 倍需要證明:

$$\begin{array}{r} A\cdots X \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline X\cdots A \end{array}$$

分析: 1. 最高位的 $A \times 4$ 沒有進位, 所以 $A \in \{1,2\}$。

2. 從個位看出 $4X = A$ 或 $4X = 10n + A$, 所以 $A \equiv 0 \pmod 2$, 即 A 只能是偶數, 所以 $A = 2$。

$$\begin{array}{r} 2\cdots X \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline X\cdots 2 \end{array}$$

因爲 $4X \equiv 2 \pmod{10}$ 所以 $X = 3$ 或 $X = 8$, 顯然 $X = 3$ 對最高位而言太小, 幸好 $X = 8$ 太完美了, 連小學生都無可挑剔, 我們先寫成一個夢幻的直式:

$$\begin{array}{r} 2\cdots 8 \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline 8\cdots 2 \end{array}$$

再看 9 倍的

$$\begin{array}{r} A\cdots X \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline X\cdots A \end{array}$$

這是最簡單的一式, 顯然 $A = 1$ 且 $X = 9$ 是唯一可能, 即另一個夢幻的直式:

$$\begin{array}{r} 1\cdots 9 \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline 9\cdots 1 \end{array}$$

到這裡我們可以把定理一再加強一下:

推論一 最高位不是 0 的反向倍數則必是: $2\cdots 8 \times 4 = 8\cdots 2$ 或 $1\cdots 9 \times 9 = 9\cdots 1$ 這兩型

因爲 $28 \times 4 \neq 82$ 且 $19 \times 9 \neq 91$, 所以我們輕易地證實了引理一, 不存在二位數的反向倍數。

再看三位數, 若

$$\begin{array}{r} 2B8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8B2 \end{array}$$

顯然 $(200+10B+8)\times 4=800+40B+32>800+10B+2$, 所以 B 無解。再看若

$$\begin{array}{rr} & 1B9 \\ \times & 9 \\ \hline & 9B1 \end{array}$$

顯然 $(100+10B+9)\times 9=900+90B+81>900+10B+1$, 所以 B 無解。

這樣就可以確認:

定理二 不存在最高位不是 0 的三位數反向倍數

反向倍數真的像珍珠少得可憐, 所以才令人覺得珍貴, 請別急著懷疑它不存在, 只要再耐心的多一位, 設

$$\begin{array}{rr} & 2BC8 \\ \times & 4 \\ \hline & 8CB2 \end{array}$$

我們不管千位數的 $2000\times 4=8000$, 只從百位數看, 得知 $C\geq 4B$, 所以 $C\geq 4$ 且 $B=1$ 或 $B=2$。再看十位和個位, 得到 $(10C+8)\times 4\equiv 10B+2 \pmod{100}$

$$\begin{aligned} &\therefore 40C+32\equiv 10B+2 \pmod{100} \\ &\therefore 40C+30\equiv 10B(mod100) \\ &\therefore \quad 4C+3\equiv B(mod10) \\ &\therefore \qquad\quad B\neq 2 \end{aligned}$$

所以 $B=1$, 又 $4C+3\equiv 1 \pmod{10}$ 且 $C\geq 4$, 所以 $C=7$ 爲唯一解。

這裡也可以直接把百位數以下全部乘開, 用不定方程式

$$400B+40C+32=100C+10B+2$$

化簡得 $$390B+30=60C$$

$$13B=2C-1$$
$$B=\frac{2C-1}{13}$$

因爲 B、C 都是一位數正整數或 0, 所以 $C=7$ 且 $B=1$ 爲唯一解。

無論如何, 我們總算有一個肯定又具體的發現:

$2178\times 4=8712$ 是 4 倍的第一個反向倍數。

再設

$$\begin{array}{r} 1BC9 \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline 9CB1 \end{array}$$

顯然百位的 $9B$ 沒有進位 , 所以 B 只能是 0 或 1。
若 $B = 1$

$$\begin{array}{r} 11C9 \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline 9C11 \end{array}$$

百位的 $C \geq 9$ 則 $1199 \times 9 > 9911$ 不符, 所以 $B = 0$

$$\begin{array}{r} 10C9 \\ \times \quad\quad 9 \\ \hline 9C01 \end{array}$$

從十位和個位得到 $(10C + 9) \times 9 \equiv 1 (\bmod 100)$

$$\begin{aligned} \therefore 90C + 81 &\equiv 1 (\bmod 100) \\ \therefore 90C + 80 &\equiv 0 (\bmod 100) \\ \therefore \quad 9C + 8 &\equiv 0 (\bmod 10) \\ \therefore \quad\quad C &= 8 \end{aligned}$$

所以 $1089 \times 9 = 9801$ 是 9 倍的第一個反向倍數。

我們終於可以鬆一口氣的宣布:

定理三 最高位不是 0 的四位數反向倍數只有兩個: 1089 及 2178

前面推論一: 若存在反向倍數則必是: $2 \cdots 8 \times 4 = 8 \cdots 2$ 或 $1 \cdots 9 \times 9 = 9 \cdots 1$ 這兩型, 這是很有用的發現, 我們可以利用它來找一個五位數的反向倍數。

$$\begin{array}{r} 2BCD8 \\ \times \quad\quad\quad 4 \\ \hline 8DCB2 \end{array}$$

和前面四位數的分析一樣, 可以得到 $B = 1$, $D = 7$。所以

$$\begin{array}{r} 21C78 \\ \times \quad\quad\quad 4 \\ \hline 87C12 \end{array}$$

換成代數式 $(21000+100C+78)\times 4=87000+100C+12$

$$\begin{aligned}
\text{則 } 84000+400C+312&=87000+100C+12\\
\therefore\quad 300C+300&=3000\\
\therefore\quad C+1&=10\\
\therefore\quad C&=9
\end{aligned}$$

小心檢驗一下 $21978\times 4=87912$ 正確無誤。再來一個

$$\begin{array}{r}
10C89\\
\times\quad\ \ 9\\
\hline
98C01
\end{array}$$

換成代數式 $(10000+100C+89)\times 9=98000+100C+1$

$$\begin{aligned}
\text{則 } 90000+900C+801&=98000+100C+1\\
\therefore\quad 800C+800&=8000\\
\therefore\quad C&=9 \text{ 即 } 10989\times 9=98901
\end{aligned}$$

所以五位數反向倍數只有 21978 即 10989 兩個。只是這個結果感覺就不如定理三的重要了。但是我們可以把推論一再往上推一下:

推論二 最高位不是 0 的反向倍數則必是: $21\cdots 78\times 4=87\cdots 12$ 或 $10\cdots 89\times 9=98\cdots 01$ 這兩型

從四位到五位數反向倍數的發現過程 , 我們都是由外而內從首末兩數的倍數關係, 利用奇偶性質、同餘關係、進位與否, 逐漸限縮各種可能, 才得到結果。這個道理其實很簡單, 因爲原整數的首位數就是反向數的末位數, 原整數的末位數就是反向數的首位數, 如果連頭尾都兜不攏, 就算中間完全吻合也無濟於事。利用這個經驗, 我們很容易找出更高位數的反向倍數。

以推論二爲基礎, 我們試著在中間插入二位數, 例如:

$$\begin{array}{r}
21CD78\\
\times\qquad\ 9\\
\hline
87DC12
\end{array}$$

可以簡化成一個 CD 的二元一次方程式, 這個方程式如果有解, 那麼六位數的反向倍數就找到

了。請看

$$\begin{aligned}
210000\times 4+1000C\times 4+100D\times 4+78\times 4&=870000+1000D+100C+12\\
\therefore\quad 840000+4000C+400D+312&=870000+1000D+100C+12\\
\therefore\quad 3900C&=600D+29700\\
D&=\frac{13C-99}{2}\\
\therefore\quad C&=9 \text{ 且 } D=9
\end{aligned}$$

可以確定 219978 是唯一的六位數 4 倍反向倍數。你也可以自己練習一下, 來確定另一個六位數的 9 倍反向倍數是 109989。

接著我們要利用推論二來確定七位數反向倍數只有 1099989 及 2199978。

$$\begin{array}{r}
21CDE78\\
\times\qquad\quad 4\\
\hline
87EDC12
\end{array}$$

可以簡化成一個 CDE 的三元一次方程式, $2100000\times 4+10000C\times 4+1000D\times 4+100E\times 4+78\times 4=8700000+100000E\times 4+1000D+100C+12$ 化簡成

$$\begin{aligned}
400C+40D+4E+3&=3000+100E+10D+C\\
D&=\frac{999+32E-133C}{10}
\end{aligned}$$

當 $C\leq 7$ 時, $D\geq 10$ 不符, 且 C 必須爲奇數, 所以 $C=9$, $D=9$, $E=9$ 是唯一解。

也許你已經懷疑在 21 及 78 中間插入任意幾個 9, 得 $2199\cdots 9978$; 或在 10 及 89 中間插入任意幾個 9, 得 $1099\cdots 9989$ 都是反向倍數。這個大膽的假設值得求證一下:

現在僅擇一證明: 當 $N\geq 5$

$$\begin{aligned}
\text{因爲}\quad & 2199\cdots 9978\times 4\\
&=(21\times 10^{N-2}+99\cdots 99\times 10^2+78)\times 4 && (\text{中間 } 99\cdots 99 \text{ 恰有 } N-4 \text{ 位})\\
&=84\times 10^{N-2}+399\cdots 996\times 10^2+312 && (\text{中間 } 99\cdots 99 \text{ 共有 } N-5 \text{ 位})\\
&=(84+3)\times 10^{N-2}+(99\cdots 96+3)\times 10^2+12\\
&=87\times 10^{N-2}+99\cdots 99\times 10^2+12 && (\text{中間 } 99\cdots 99 \text{ 共有 } N-4 \text{ 位})\\
&=8799\cdots 9912
\end{aligned}$$

這樣我們可以得到

定理四 1089, 10989, 109989, $109\cdots 989$; 及 2178, 21978, 219978, $219\cdots 978$; 都是反向倍數的基本型

這些基本型的反向倍數, 從四位數的 2178 到七位數的 2199978 都是唯一的, 因爲那是用代數方法解出來的。但是到了八位數, 因爲反向倍數的不進位性質, 我們不難發現把 21782178 串排在一起就是一個 8 位數的反向倍數。109890010989 就是一個 12 位數的反向倍數。所以八位數的 4 倍反向倍數至少有 21999978 及 21782178 兩組; 9 倍的反向倍數也至少有 10999989 及 10891089 兩組。所以我們有更進一步的推論:

推論三: 可以用同倍數的反向倍數和若干個 0 串排成更多位數的反向倍數

也就是說只要把同樣 4 倍或同樣 9 倍的反向倍數加上任意個 0, 作成左右對稱的串排, 都是原倍數的反向倍數。例如指定一個 13 位數的反向倍數就有:

$$2199999999978\ (13\text{位基本型})$$
$$2178000002178\ (4+00000+4)$$
$$2197800021978\ (5+000+5)$$
$$2178219782178\ (4+5+4)$$
$$2199780219978\ (6+0+6)$$

這幾種不同的串排法。幸好這種串排不影響推論二的正確性, 只是這隨便一排位數就增加很多, 而且已不如尋找原型時那麼有趣了。

再回頭來看 $ABC\times t=CBA$, 其中 $A=0$ 的情形:

本來 $01\times 10=10$, $02\times 10=20$, $\cdots 033\times 100=330$ 也是很 trivial 的 (只是這麼一來就有二位數和三位數的反向倍數了)。但是 $045\times 12=540$, $015\times 34=510$, $018\times 45=810$, $0075\times 76=5700\cdots$, 似乎又別有洞天。光考慮 2 位有效數字: $0\cdots 0AB\times t=BA0\cdots 0$, 在 AB 之前加幾個 0 並不影響 $10A+B$ 的質因數分解, 但在 BA 之後每加一個 0 就各多了 1 個 2 和 5 的質因數。所以儘管 21 不是 12 的倍數, 210 不是 012 的倍數, 我們還是可以得到 2100 是 0012 的 175 倍。或者可以說只要 AB (即 $10A+B$) 不要比 BA (即 $10B+A$) 具有較多的 2, 5 之外的質因數, 似乎都不難找到適當多的 0 來解決這個問題。例如 $32=2^5$ 必然可以找到 5 個 0 使 $0000032\times 71875=2300000$, 又如 $0\cdots 027\times n=720\cdots 0$ 無論多少個 0, n 都無正整數解, 但 $00072\times 375=27000$ 這是因爲 $27=3^3$, $72=3^2\times 2^3$, 我們無法使 3 的次方愈乘愈少的緣故。這樣一來如果容許最高位數是 0, 這些位數不整齊的反向倍數將會使反向倍數的研究失去原先的單純性和稀有性, 只好在本研究中割愛了。

尾聲

首位不是 0 的反向倍數少得令人意外, 原以爲倍數小的 2 倍, 可以有較多的變化和選擇, 比較有可能出現反向倍數, 結果卻令人失望。倍數大的首末兩數沒有太多選擇, 卻存在 9 倍的反向倍數。對於四位數的反向倍數 1089 及 2178, 除了 2178 是 1089 的 2 倍外, 21978 是 10989 的 2 倍; $2199\cdots9978$ 還是 $1099\cdots9989$ 的 2 倍。(在兩個成 2 倍的整數中間插入同樣幾個 9, 居然還能維持 2 倍的關係, 不能不說很有特色)。用質因數分解 $1089=3^2\times11^2$, $2178=2\times3^2\times11^2$ 還可看出 11 的平方 121 是一個自我反向數。到了 10989 及 21978 各有一個 1221 的自我反向數因數 $\cdots$ 我們嘗試過卻找不到用質因數組合出反向倍數的方法。至於八位數以上的反向倍數的基本型 $21CDEF\cdots78$, 若用高於 4 元一次的不定方程式來解, 實在不太簡單, 但願有興趣的同好繼續研究或提出更有效率的方法, 以解大家的的迷惑, 不勝感激!

—本文作者爲高雄市立中正高中退休教師—