數學傳播 41卷3期, pp. 51-59

2017 年第 58 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2017 年第 58 屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 在巴西舉行。本屆共有 111 個國家 (另加 1 個觀察國) 與會、合計 615 位學生 (含 62 位女學生) 代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕。除了確認各項議題外, 評審會議的主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出 30 道左右的預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。

本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認爲較適當的試題, 再由各國領隊組成的評審會議經過四天的討論票選出 6 道正式試題, 其中第一題的領域爲數論, 第二題爲代數, 第三題爲組合, 第四題爲幾何, 第五題爲組合, 第六題爲數論。對此次我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

問題 1: 對於每個整數 $a_0>1$, 用以下方法定義數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$:

$$a_{n+1}=\begin{cases}\sqrt{a_n} & \text{若}\sqrt{a_n}\text{爲整數}\\ a_n+3 & \text{其他情況}\end{cases}\qquad \text{對於所有 } n\geqslant 0\text{皆成立}$$

試求所有可能值 a_0, 滿足存在一個數 A, 使得有無窮多個 n 讓 $a_n=A$。

試題委員會公布的參考答案:

<u>滿足題意的 a_0 爲所有 3 的倍數。</u>

基於 a_{n+1} 的值被 a_n 唯一確定, 因此若存在 $n\neq m$ 使得 $a_n=a_m$, 則此數列將在某充分大的項數後爲週期數列。因此, 我們只需求所有會讓數列會進入週期的 a_0 即可。以下先證明

四個性質:

1. 若 $a_n \equiv 2 \pmod 3$, 則對於所有 $m > n$, a_m 皆非完全平方數。因此, 數列終將嚴格遞增, 而非進入週期性。
   證明: 易知若 $a_n \equiv 2 \pmod 3$, a_n 必非完全平方數, 因此 $a_{n+1} = a_n + 3 \equiv 2 \pmod 3$, 從而 $a_{n+1} > a_n$ 且 a_{n+1} 非完全平方數。故性質得證。
2. 若$a_n \not\equiv 2 \pmod 3$ 且 $a_n > 9$, 則存在$m > n$使得$a_m < a_n$。
   證明: 令 t^2 爲小於 a_n 的完全平方數中最大者; 基於 $a_n > 9$, 故 $t \geq 3$。因此, 數列 $a_n, a_n+3, a_n+6, \ldots$ 中的第一個完全平方數必爲 $(t+1)^2, (t+2)^2$ 或 $(t+3)^2$。換言之, 必存在 $m > n$ 使得 $a_m \leq t+3 < t^2 < a_n$。性質得證。
3. 若 $a_n \equiv 0 \pmod 3$, 則存在 $m > n$ 使得 $a_m = 3$。
   證明: 易知若 $a_n \equiv 0 \pmod 3$, 則 $a_{n+1} \equiv 0 \pmod 3$。若 $a_n \in \{3, 6, 9\}$, 則易知數列將進入 $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$ 的週期數列。反之, 若 $a_n > 9$, 令 a_j 爲 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ 中最小者, 則由性質 2 知 $a_j \leq 9$ (否則由性質 2 知必可找到 $i > j$ 使 $a_i < a_j$, 與最小性不合)。從而性質得證。
4. 若 $a_n \equiv 1 \pmod 3$, 則存在 $m > n$ 使得 $a_m \equiv 2 \pmod 3$.
   證明: 易檢驗若 $a_n = 4$ 時, $a_{n+1} = 2$, 故成立; 若 $a_n = 7$, 後面依序爲 $10, 13, 16, 4, 2$, 故亦成立。而若 $a_n \geq 10$, 同樣令 a_j 爲 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ 中最小者; 易知 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ 中沒有 3 的倍數, 故 3 不整除 a_j。而若 $a_j \equiv 1 \pmod 3$, 則由性質 2 知存在 $i > j$ 使得 $a_i < a_j$, 矛盾。故 $a_n \equiv 2 \pmod 3$, 性質得證。

綜以上, 我們知 $a_0 \equiv 0 \pmod 3$ 滿足題意, 而若 $a_0 \not\equiv 0 \pmod 3$ 則數列終將遞增。 □

評註: 本題是簡單的數論題, 僅需簡單的同餘與最小性討論, 適合作爲習題。

問題 2: 令 $\mathbb{R}$ 表示所有實數所成的集合。試求所有函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足對於所有實數 x 和 y

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$$

皆成立。

試題委員會公布的參考答案:

<u>滿足題意的所有函數爲 $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ 與 $f(x) = 1 - x$。</u>

以上代回驗證可知確爲其解。以下證明這些是所有的解。

首先, 易見若 $f(x)$ 爲一解, 則 $-f(x)$ 亦爲一解, 故以下不失一般性假設 $f(0) \leq 0$。因此以下將證明 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = x - 1$。

其次, 對於任何 $x \neq 1$, 取 y 使得 $x+y=xy \Leftrightarrow y=\frac{x}{x-1}$, 帶回題式得

$$f\left(f(x)f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)=0 \tag{1}$$

對於所有 $x \neq 1$ 都成立。進一步取 $x=0$ 帶入 (1), 我們有

$$f\left(f(0)^2\right)=0. \tag{2}$$

因此 $f(x)$ 至少有一零點 $f(0)^2$。

以下分兩種狀況討論 (注意到不失一般性假設 $f(0) \leq 0$):

1. $f(0)=0$.
   此時取 $(x,y)=(x,0)$ 帶回題式, 得

   $$f(f(x)f(0))+f(x)=f(0) \Rightarrow f(x)=0$$

   對所有 x 皆成立。
2. $f(0)<0$.
   引理一**.** $f(1)=0$, $f(0)=-1$ 且對於所有 $a \neq 1$ 有 $f(a) \neq 0$.
   證明: 若存在 $a \neq 1$ 使得 $f(a)=0$, 則取 $x=a$ 帶入 (1) 得 $f(0)=0$, 矛盾。又已知函數 f 存在零點, 故 $f(1)=0$。也因此, 由 (2) 及零點唯一性我們知道 $f(0)^2=1$, 再由 $f(0)<0$ 假設知 $f(0)=-1$, 證畢。
   引理二**.** $f(x+n)=f(x)+n$, 對於所有 $x \in \mathbb{R}$ 與 $n \in \mathbb{N}$ 皆成立。
   證明: 取$y=1$ 帶入題式, 得

   $$f(f(x)f(1))+f(x+1)=f(x) \Leftrightarrow f(0)+f(x+1)=f(x) \Leftrightarrow f(x+1)=f(x)+1$$

   對於所有 $x \in \mathbb{R}$ 皆成立。引理可透過簡單的歸納法證得。
   引理三**.** $f(x)$ 是單射函數。
   證明: 若否, 則存在 $a \neq b$ 使得 $f(a)=f(b)$; 又由引理二知對於所有整數 N, 都有

   $$f(a+N+1)=f(b+N)+1. \tag{3}$$

   取任意 $N<-b$, 則存在 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $x_0+y_0=a+N+1$ 且 $x_0y_0=b+N$。以 $(x,y)=(x_0,y_0)$ 帶回題式, 我們得

   $$\begin{aligned} f(f(x_0)f(y_0))+f(a+N+1)=f(b+N) &\Leftrightarrow f(f(x_0)f(y_0))+1=0 \\ &\Leftrightarrow f(f(x_0)f(y_0)+1)=0 \qquad (4) \\ &\Leftrightarrow f(x_0)f(y_0)=0, \qquad (5) \end{aligned}$$

其中 (4) 乃基於引理二, (5) 乃基於引理一。但由於 $a \neq b$, 易證 $x_0 \neq 1$ 且 $y_0 \neq 1$, 從而由引理一知 $f(x_0) \neq 0$ 且 $f(y_0) \neq 0$, 矛盾! 故 f 為單射函數。

現在, 以 $(x, y) = (t, -t)$ 帶入原式, 得

$$\begin{aligned} f(f(t)f(-t)) + f(0) = f(-t^2) &\Leftrightarrow f(f(t)f(-t)) = f(-t^2) + 1 &(6)\\ &\Leftrightarrow f(f(t)f(-t)) = f(-t^2+1) &(7)\\ &\Leftrightarrow f(t)f(-t) = -t^2 + 1, &(8)\end{aligned}$$

其中 (6) 乃基於引理一, (7) 乃基於引理二, (8) 乃基於引理三。以 $(x, y) = (t, 1-t)$ 帶入原式, 得

$$\begin{aligned} f(f(t)f(1-t)) + f(1) = f(t(1-t)) &\Leftrightarrow f(f(t)f(1-t)) = f(t(1-t)) &(9)\\ &\Leftrightarrow f(t)f(1-t) = t(1-t), &(10)\end{aligned}$$

其中 (9) 乃基於引理一, (10) 乃基於引理三。但由引理二, 我們知 $f(1-t) = 1 + f(-t)$, 故結合 (5) 與 (8), 我們有

$$t(1-t) = f(t)f(1-t) = f(t) + f(t)f(-t) = f(t) + (-t^2+1),$$

也就是 $f(t) = t - 1$。得證! □

評註: 本函數方程在大會評為中高難度, 但尚屬傳統題型, 關鍵在單射的證明手法上較為特殊。本題台灣隊相對於各國而言成績較佳, 顯見台灣在代數訓練上仍屬扎實。

問題 3: 一位獵人和一隻隱形的兔子在歐氏平面上玩一場遊戲。兔子的起點 A_0 和獵人的起點 B_0 為同一點。在遊戲的 $n-1$ 回合後, 兔子所在的位置為 A_{n-1}, 獵人所在的位置為 B_{n-1}。在遊戲的第 n 回合, 以下三件事情會依序發生。

(i) 兔子會在不可被看到的情況下移動到一個點 A_n, 使得 A_{n-1} 與 A_n 之間的距離恰為 1。

(ii) 一個追蹤裝置會回報一個點 P_n 給獵人。對獵人而言, 裝置只保證 P_n 與 A_n 之間的距離至多為 1。

(iii) 獵人會在可被看到的情況下移動到一個點 B_n, 使得 B_{n-1} 與 B_n 之間的距離恰為 1。

試問是否無論兔子如何移動, 且無論裝置回報的點為何, 獵人總是可以適當的選取她的移動, 使得她可以保證在經過 10^9 個回合後她和兔子之間的距離至多為 100?

試題委員會公布的參考答案:

猶人沒有這樣的策略。兎子「獲勝」。

如果答案是肯定的, 那獵人必須有個不論兎子怎麼跑或裝置怎麼回報都能成立的策略。我們將證明反面的命題: 在最不幸的狀況下, 獵人無論如何都無法保證在 10^9 個回合後她和兎子的距離可以在 100 內。

令 d_n 爲第 n 回合結束時獵人與兎子之間的距離。顯然若存在 $n < 10^9$ 使得 $d_n > 100$, 則兎子已自動獲勝: 牠只要每回合都以遠離獵人的方向直線跑出去, 獵人與兎子之間的距離便保持在 100 以上。

以下證明, 當 $d_n < 100$ 時, 兎子總有個跑法, 使得在裝置的幫助下, 無論獵人怎麼應對, 兎子每 200 回合都有機會讓 d_n^2 增加 $\frac{1}{2}$。如此一來, d_n^2 將在 $2 \times 10^4 \times 200 = 4 \times 10^6 < 10^9$ 內便達到 10^4, 故兎子獲勝。

假設第 n 回合時, 獵人在 H_n, 兎子在 R_n, 且我們進一步讓兎子在此時暫時對獵人現身 (因此獵人可以忘掉之前裝置提供的所有資訊。) 令 $r = \overleftrightarrow{H_nR_n}$, 並不失一般性假設其爲水平線。令 Y_1 和 Y_2 爲 r 上方與下方和兎子距離 200, 和 r 距離 1, 且遠離獵人的兩點, 如圖 1。

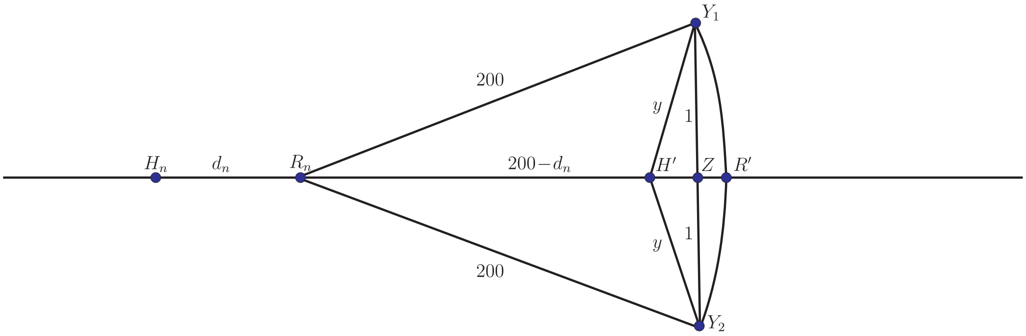

圖 1: 第 58 屆國際數學奧林匹亞第三題

兎子的策略很單純: 從 Y_1 與 Y_2 中挑一點, 然後花 200 回合筆直往其前進。注意到在這 200 回合間, 兎子跟 r 的距離始終保持在 1 以內, 因此我們可以讓裝置回報的點 $\{P_m : n+1 \leq m \leq n+200\}$ 都落在 r 上。如此一來, 獵人完全無法得知兎子是選擇 Y_1 或 Y_2。

現在, 給定獵人看見 $\{P_m : n+1 \leq m \leq n+200\}$, 他要怎麼應對?

- 他可以跟著 P_m, 筆直沿 r 前進。如此一來, 在 200 回合中, 獵人將停在圖中 H' 的位置。
- 事實上, 獵人的任何其他策略都不會比筆直前進好! 注意到任何策略下, 獵人最後都會停在 H' 左側。若他的策略讓他停在 r 上方, 則他與 Y_2 的距離將大於 $H'Y_2$; 反之, 若他的策略停在 r 下方, 則他與 Y_1 的距離將大於 $H'Y_1$。無論如何, 他都無法保證他在 200 回合後與兎子的距離會在 $y := H'Y_1 = H'Y_2$ 內。

因此我們只需要估計 y^2。令 Z 爲 Y_1Y_2 中點, R' 爲 r 上與 R_n 相距 200 且在 Z 右側的點, 並令 $\epsilon = ZR'$ (注意到 $H'R' = d_n$。) 則

$$y^2 = 1 + (H'Z)^2 = 1 + (d_n - \epsilon)^2$$

其中

$$\epsilon = 200 - R_nZ = 200 - \sqrt{200^2 - 1} = \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

又 $\epsilon^2 + 1 = 400\epsilon$, 因此

$$y^2 = d_n^2 - 2\epsilon d_n + \epsilon^2 + 1 = d_n^2 + \epsilon(400 - 2d_n).$$

基於 $\epsilon > \dfrac{1}{400}$ 且我們假設 $d_n < 100$, 我們有 $y^2 > d_n^2 + \dfrac{1}{2}$。故我們證明兎子有機會讓 $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \dfrac{1}{2}$。兎子獲勝! □

評註: 這是本屆最創新也是最難的題目, 全部 600 餘位考生中僅有兩位全對, 另兩位獲得 4 分以上成績, 平均分爲 0.042 分。本題的出現是否代表數學奧林匹亞的一個新的未來潮流, 值得關注。

問題 4: 令 R 和 S 爲圓 Ω 上相異兩點使得 RS 不是直徑。令 ℓ 爲 Ω 在 R 的切線。平面上一點 T 使得 S 爲 RT 線段的中點。點 J 在圓 Ω 的劣弧 RS 上, 使得三角形 JST 的外接圓 Γ 和 ℓ相交於兩相異點。令 A 爲 Γ 與 ℓ 的交點中較接近 R 者。直線 AJ 與 Ω 交於另一點 K。試證 KT 與 Γ 相切。

試題委員會公布的參考答案:

透過圓 Ω 與 Γ, 我們有 $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$。另一方面, 由於 RA 是 Ω 的切線, 我們有 $\angle SKR = \angle SRA$。因此 ΔART 與 ΔSKR 相似, 且

$$\frac{RT}{RK} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}.$$

末式結合 $\angle ATS = \angle KRT$, 我們得到 ΔAST 相似於 ΔTKR, 故 $\angle SAT = \angle RTK$。故 KT 切 Γ 於 T, 證畢。 □

評註: 本題爲簡單幾何問題, 解法衆多, 適合做爲練習題。本屆沒有中等或困難的幾何問題, 實屬遺憾。

問題 5: 給定整數 $N \geqslant 2$。有 $N(N+1)$ 位身高兩兩不同的足球員以某種順序排成一列。教練想要從這列中移除 $N(N-1)$ 個人, 使得剩下 $2N$ 個人所形成的一列, 滿足以下 N 個條件:

(1) 沒有人站在他們當中最高的兩位球員之間

(2) 沒有人站在他們當中第三與第四高的兩位球員之間

$\vdots$

(N) 沒有人站在他們當中最矮的兩位球員之間

證明這總是可做到的。

試題委員會公布的參考答案:

將隊伍拆成 N 段, 每區 $N+1$ 個人。我們將證明可以從每區移除 $N-1$ 個人來達成題目的目標。

首先, 建構一個 $(N+1)\times N$ 的矩陣, 其中 $x_{i,j}$ 是第 j 段裡第 i 高的人的身高; 換言之, 矩陣的每一直列是每一段的人的身高, 由高到矮, 從上而下依序排列。

我們將把此矩陣的直列交換。首先, 透過列交換, 我們可以讓 $x_{2,1}=\max\{x_{2,i}:i=1,2,\ldots,N\}$ (也就是把第二橫排最大的數換到第一直列。) 固定第一直排後, 交換後面的 $N-1$ 直列讓 $x_{3,2}=\max\{x_{3,i}:i=2,3,\ldots,N\}$ (也就是把第三橫排最大的數換到第二直列。) 依此類推, 讓 $x_{k+1,k}=\max\{x_{k+1,i}:i=k,k+1,\ldots,N\}$, 最終得到如下的矩陣:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{x_{1,1}} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & \cdots & x_{1,N-1} & & x_{1,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\mathbf{x_{2,1}} & > & \mathbf{x_{2,2}} & & x_{2,3} & \cdots & x_{2,N-1} & & x_{2,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{3,1} & & \mathbf{x_{3,2}} & > & \mathbf{x_{3,3}} & \cdots & x_{3,N-1} & & x_{3,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N,1} & & x_{N,2} & & x_{N,3} & \cdots & \mathbf{x_{N,N-1}} & > & x_{N,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N+1,1} & & x_{N+1,2} & & x_{N+1,3} & \cdots & \mathbf{x_{N+1,N-1}} & > & \mathbf{x_{N+1,N}}
\end{array}$$

至此, 我們可以大膽將除了以下身高外的人都移除:

$$x_{1,1}>x_{2,1}>x_{2,2}>x_{3,2}>\cdots>x_{N,N-1}>x_{N,N}>x_{N+1,N}.$$

注意到由於前面的分段, $x_{k,k}$與$x_{k+1,k}$必然會是相鄰的兩個人, 從而此法留下的$2N$個人滿足題意。證畢。 $\square$

評註: 這是一題乍看簡單但異常困難的組合, 正確的道路非常狹窄, 容易從一開始就走上數學歸納法的死胡同, 然後發現你無法同時控制高度與位置兩個資訊。令人想起 2011 荷蘭 IMO 的風車題。

問題 6: 一個有序整數對 (x, y) 被稱爲*互質格點* 若 x 和 y 的最大公因數爲 1。給定一個由互質格點所組成的有限集 S, 證明存在一個正整數 n 以及整數 a_0, a_1, $\ldots$, a_n, 使得對於所有在 S 中的 (x, y), 我們都有:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

試題委員會公布的參考答案:

首先, 注意到若我們能找到 $f(x, y) = \pm 1$, 則我們取 $f(x, y)^2 = 1$ 即可。將 S 中的互質格點編號爲 (x_1, y_1) 至 (x_n, y_n)。注意到若 (x_i, y_i) 與 (x_j, y_j) 若在過原點的同一條直線上, 則必有 $(x_i, y_i) = (-x_j, -y_j)$; 而基於 f 是齊次的, 必有 $f(x_i, y_i) = \pm f(x_j, y_j)$。因此我們可以假設 S 中的任兩點與原點三點不共線。

考慮齊次多項式 $l_i(x, y) = y_ix - x_iy$, 並定義

$$g_i(x, y) = \prod_{j\neq i} l_j(x, y).$$

注意到 $l_i(x_j, y_j) = 0$ 若且唯若 $j = i$ (因三點不共線), 因此對於所有 $j \neq i$, $g_i(x_j, y_j) = 0$。定義 $a_i = g_i(x_i, y_i)$, 並注意到 $a_i \neq 0$。

總結來說, $g_i(x, y)$ 是個 $n-1$ 次多項式, 且有以下性質:

1. 當$j \neq i$時, $g_i(x_j, y_j) = 0$;
2. $g_i(x_i, y_i) = a_i$。

透過以上性質, 對於所有 $N \geq n-1$, 我們都可以取到一個 N 次齊次多項式滿足以上性質; 更精確地說, 若令 $I_i(x, y)$ 爲一次齊次多項式滿足 $I_i(x_i, y_i) = 1$ (存在性因 (x_i, y_i) 爲互質格點而保證), 則 $I_i(x, y)^{N-(n-1)}g_i(x, y)$ 滿足上述性質。

現在, 我們可以將原題簡化爲證明以下命題:

命題一: 對於所有正整數 a, 存在次數至少 1 的整係數齊次多項式 $f_a(x, y)$, 使得 $f_a(x, y) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ a)$ 對所有互質數對 (x, y) 皆成立。

要看出爲什麼命題一可以推得原題, 取 a 爲所有 a_i 的最小公倍數, 並依照命題一取 f_a。取充分大的 k 讓 $f_a(x, y)^k$ 的次數至少爲 $n-1$, 再扣除 g_i 的適當乘積即可。

故我們僅需證明命題一即可。首先, 若 a 是某質數的冪次 p^k, 則

- 若 p 爲奇數, 取 $f_a(x,y)=(x^{p-1}+y^{p-1})^{\phi(a)}$;
- 若 $p=2$, 取 $f_a(x,y)=(x^2+xy+y^2)^{\phi(a)}$.

現在假設 $a=q_1q_2\cdots q_k$, 其中每個 q_i 都是質數的冪次且兩兩互質。令 f_{q_i} 爲命題一所得函數, 並令 F_{q_i} 爲 f_{q_i} 的若干冪次使得它們都是同樣的次數。注意到

$$\frac{a}{q_i}F_{q_i}(x,y)\equiv\frac{a}{q_i}(\operatorname{mod} a)$$

對於所有互質的 x,y 皆成立。由 Bezout 引理, 存在 $\frac{a}{q_i}$ 的整係數線性組合等於 1。因此, 存在 F_{q_i} 的整係數線性組合 F 使得 $F(x,y)\equiv 1(\operatorname{mod} a)$ 對所有互質的 x,y 皆成立。而基於 F_{q_i} 皆爲齊次且次數相等, F 必爲齊次多項式, 故命題一證畢。 $\square$

評註: 本題介於數論與代數之間, 雖爲第六題, 但難度上並不如第三題, 甚至與第五題某種程度上在伯仲之間。數奧近年來二三五六題的難度變化是值得關注的重點。

—本工作小組係由教育部委託國立中央大學, 於「中華民國參加 2017 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者爲高竹嵐助理教授, 任教國立交通大學統計學研究所—