數學傳播 41卷3期, pp. 39-50

單人彩球遊戲

徐祥峻 · 郭君逸

一、介紹

單人彩球遊戲的玩法如下: 先將黑、白、灰三種顏色的彩球共 n 顆排成第一列, 稱爲此遊戲的「題目」。接下來對每一列重複以下的操作: 在第 k 列的下方擺放第 $k+1$ 列, 使得第 $k+1$ 列的每顆球均位於第 k 列的相鄰兩顆球之間的正下方 (因此第 $k+1$ 列會比第 k 列少一顆球), 而且第 $k+1$ 列每顆彩球顏色的擺放規則爲

若上方相鄰兩球同色, 則下方就擺放相同顏色的球;
若上方相鄰兩球異色, 則下方就擺放第三種顏色的球。

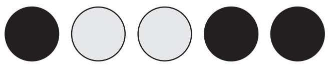
依此規則擺放彩球直到第 n 列爲止, 此時第 n 列只剩一顆球, 我們將這顆球的顏色稱爲此題的「解」。

例如:

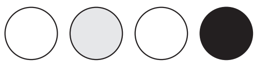
兩異色球下方放
第三種顏色的球

兩同色球下方放
相同顏色的球

若第一列放的五顆球如下:

第一列 

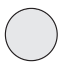
則第二列按照規則爲

第二列 

一直放到第五列

第三列 

第四列 

第五列 

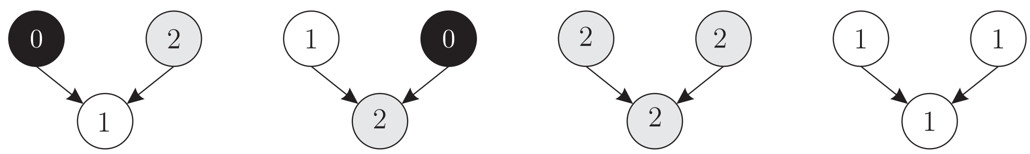
此時發現, 最後一顆球是「灰色」, 我們就稱此題的解爲「灰色」。

游森棚教授 [1] 在 2015 年科學月刊中有提到此遊戲, 而九九文教基金會在 2017 年舉辦的茱莉亞羅賓遜數學園遊會 (Julia Robinson Mathematics Festival, JRMF) 中 [2, 3] 也有出現此遊戲, 讓學生透過實際動手操作的方式來找出此遊戲解的規律。後來也有科展作品 [4, 5] 討論此遊戲解的規律, 不過都是在某些特定的情況下才能有較容易的方式來找出此遊戲解, 或者是經由較複雜的遞迴型式來求解, 但求解所花的時間不如直接擺放彩球來的快。本文將提供一種方式可以較快地計算出一般的遊戲解, 進而得到一些特別的性質與推廣。

二、建立數學模型

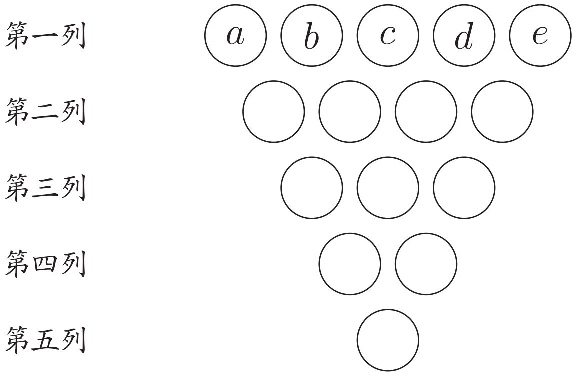
若想要直接求出此遊戲的一般解, 而不想要一顆一顆地慢慢擺放彩球來求解的話, 首要步驟, 就是要將彩球顏色的擺放規則 (第一節第一段中的標楷體文字敘述) 做數學建模。若能有較簡單的數學建模, 則就能有較容易的方式得到此遊戲的一般解。

爲了能夠「計算」顏色, 我們將彩球的顏色以數字標號取代: 黑球的標號爲 0, 白球的標號爲 1, 灰球的標號爲 2。接下來我們便把彩球的顏色都直接以其標號取代。我們先來看看彩球顏色的擺放規則以標號表示時有什麼特性。設某一列相鄰兩彩球的標號依序爲 x 和 y, 而它們下方彩球的標號爲 z。由彩球顏色的擺放規則可知 x, y, z 三數可能情形有: 全爲 0; 全爲 1; 全爲 2; 或 0, 1, 2 各出現一次。因此有 $x+y+z=0$ 或 3 或 6, 故 $x+y+z$ 必爲 3 的倍數。由此特性, 我們便將彩球的標號 0, 1, 2 視爲 $\mathbb{Z}_3$ 中的元素, 並利用 mod 3 的運算來簡化 x, y, z 的關係式可得 $x+y+z\equiv 0 \pmod 3$。所以 $z\equiv -(x+y) \pmod 3$, 也就是下方彩球的標號爲上方相鄰兩彩球標號相加後變號再 mod 3。接下來文中的計算均爲在 $\mathbb{Z}_3$ 中的運算, 即 mod 3。例如: 兩白球下方的彩球標號爲「$-(1+1)\equiv 1 \pmod 3$」, 即白色; 黑灰兩球下方的彩球標號爲「$-(0+2)\equiv 1 \pmod 3$」, 即白色。



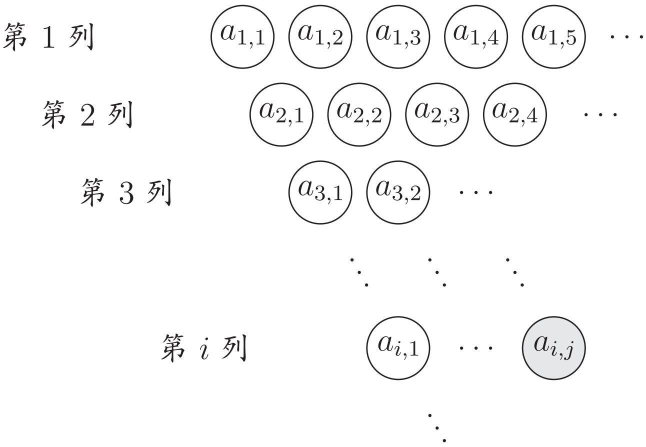
總和爲 3 總和爲 3 總和爲 6 總和爲 3

將彩球顏色的擺放規則, 巧妙地轉換成數學運算後, 接下來就可以假設變數, 並推導出其通解了。以第一列擺放五顆球爲例, 假設其標號依序爲「a, b, c, d, e」, 則第二列應爲「$-(a+b), -(b+c), -(c+d), -(d+e)$」, 第三列應爲「$(a+2b+c), (b+2c+d), (c+2d+e)$」, 第四列爲「$-(a+3b+3c+d)$, $-(b+3c+3d+e)$」, 而最後的解答爲「$a+4b+6c+4d+e$」



$$a + 4b + 6c + 4d + e$$

由上面的例子我們可以觀察到: 若將某列彩球的標號表示成第一列變數的線性組合, 則其係數都是二項式係數。爲了明確寫出下面的定理, 我們將第 i 列第 j 球的標號令爲 $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_3$, 其中 $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n+1-i$, 則彩球顏色的擺放規則爲 $a_{i,j} \equiv -(a_{i-1,j} + a_{i-1,j+1})$ (在 $\mathbb{Z}_3$ 中的運算)。



則每顆球的標號 $a_{i,j}$ 皆可以用第一列的球的標號來表示:

定理 1. $a_{i,j} \equiv (-1)^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} a_{1,j+k} \pmod 3$.

證明: 對 i 做數學歸納法。

當 $i = 1$ 時, 右式只有在 $k = 0$ 時有值, 所以 $(-1)^{1-1}\binom{1-1}{0} a_{1,j+0} \equiv a_{1,j}$, 成立。

當 $i>1$ 時

$$\begin{aligned} a_{i,j} &\equiv -(a_{i-1,j}+a_{i-1,j+1}) \\ &\equiv -\Big((-1)^{i-2}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{i-2}{k}a_{1,j+k}+(-1)^{i-2}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{i-2}{k}a_{1,j+k+1}\Big) \\ &\equiv -\Big((-1)^{i-2}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{i-2}{k}a_{1,j+k}+(-1)^{i-2}\sum_{k=1}^{i-1}\binom{i-2}{k-1}a_{1,j+k}\Big) \\ &\equiv -\left((-1)^{i-2}\sum_{k=0}^{i-1}\Big(\binom{i-2}{k}+\binom{i-2}{k-1}\Big)a_{1,j+k}\right) \\ &\equiv (-1)^{i-1}\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i-1}{k}a_{1,j+k}. \end{aligned}$$

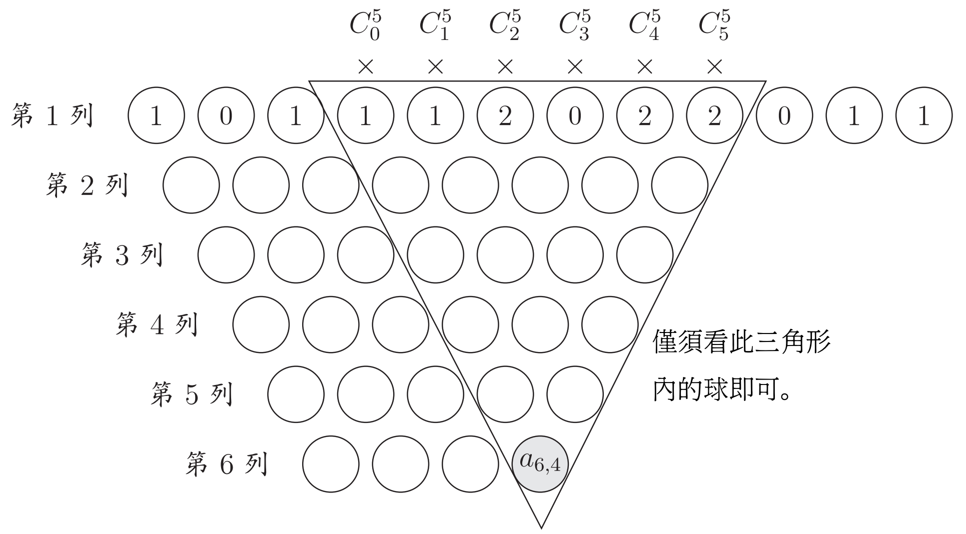
□

此定理比較直覺的想法, 就是把 $a_{i,j}$ 寫成 $a_{1,x}$ 的線性組合時, 其係數就是由第 1 列第 x 球, 每步可往左下或右下走, 最後走到第 i 列第 j 球的方法數, 再多乘個正負號, 亦即

$$a_{i,j}\equiv(-1)^{i-1}\sum_{x}(\text{由第 1 列第 } x \text{ 球走到第 } i \text{ 列第 } j \text{ 球的方法數})a_{1,x}.$$

接下來我們來看個例子:

例 2. 假設第一列依序放了「101112022011」。請問第 6 列第 4 球標號 $a_{6,4}$ 爲何 ?



根據定理 1 得 $a_{6,4}\equiv(-1)^5(1\times1+5\times1+10\times2+10\times0+5\times2+1\times2)$, 所以 $a_{6,4}\equiv-38\equiv1$, 爲白色球。

事實上, 我們可以用餘式定理, 先把係數 mod 3, 再計算, 會快一些。

$$a_{6,4} \equiv (-1)^5(1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 0 + 2 \times 2 + 1 \times 2) \equiv -2 \equiv 1.$$

數論中有個盧卡斯定理, 是這樣講的:

定理[Lucas, 1878]: 假設 p 爲質數, 且非負整數 m, n 的 p 進位表示法分別爲 $(\cdots m_k m_{k-1} \cdots m_1 m_0)_p$ 與 $(\cdots n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0)_p$, 則

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{k \geq 0} \binom{m_k}{n_k} (\operatorname{mod} p).$$

根據盧卡斯定理, 我們可以推知, 若有任何一個 $n_k > m_k$, 則 $\binom{m}{n}$ 必爲 p 的倍數。也因此, 我們可以用此性質來快速計算出某些彩球遊戲的解:

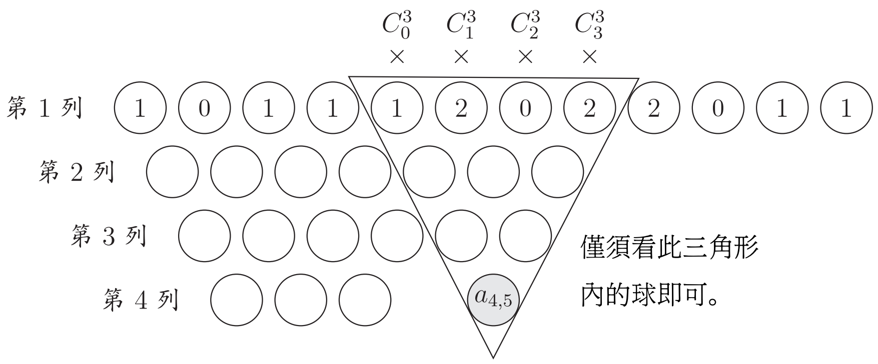
推論 3. 當 $i = 3^t + 1$ 時, 其中 $t \in \mathbb{N}$, 則 $a_{i,j} \equiv -(a_{1,j} + a_{1,i+j-1})$。

證明: 此時 $i-1$ 的三進位表示法爲 $(1000\cdots00)_3$ (即 1 後面有 t 個 0), 根據盧卡斯定理, 只要 k 不等於 $(100\cdots00)_3$ 與 $(00\cdots00)_3$, 則 $\binom{i-1}{k} \equiv 0$, 又 $i-1$ 必爲奇數, 因此定理 1 中的

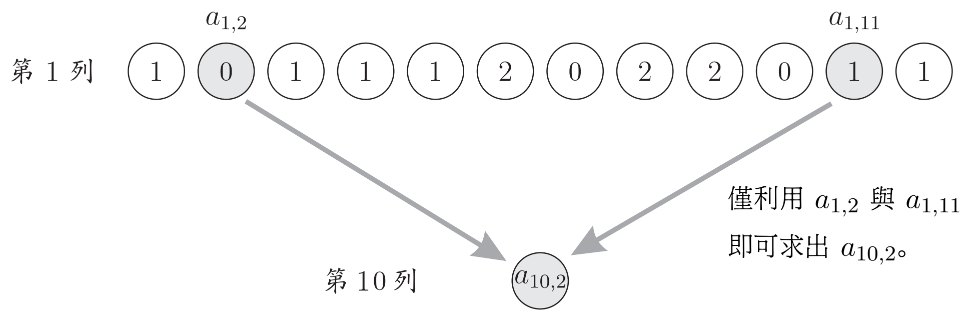
$$a_{i,j} \equiv (-1)^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} a_{1,j+k} \equiv -(a_{1,j} + a_{1,i+j-1}). \qquad \square$$

我們再來看個例子：

例 4. 與例 2 相同, 第一列依序放了「101112022011」。請問第 4 列第 5 球標號 $a_{4,5}$ 爲何？請問第 10 列第 2 球標號 $a_{10,2}$ 爲何？



本來 $a_{4,5} \equiv (-1)^3(1 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 0 + 1 \times 2) \equiv 0$ 爲黑色。但由推論 3 知, 中間的係數必爲 3 的倍數, 故只需計算頭尾即可, $a_{4,5} \equiv -(1+2) \equiv 0$。同樣的, $a_{10,2} \equiv -(a_{1,2} + a_{1,11}) \equiv -(0+1) \equiv 2$ 爲灰色。



定理 5. 當 $i=s\cdot 3^t+1$ 時, 其中 $s,t\in\mathbb{N}$, 則

$$a_{i,j}\equiv(-1)^s\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}a_{1,k\cdot 3^t+j}.$$

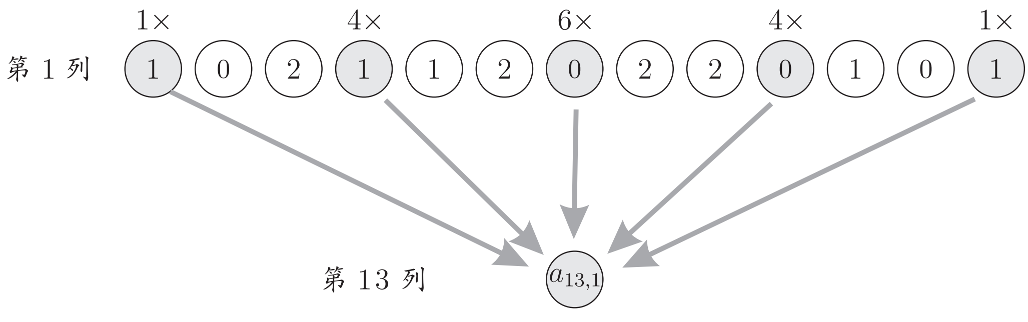
本定理一樣利用數學歸納法即可證明, 我們省略繁冗的過程, 直接看下面的例子:

例 6. 假設第一列依序放了「1021120220101」。請問第 13 列第 1 球標號 $a_{13,1}$ 爲何 ?

因爲 $13=4\times 3^1+1$, 所以

$$\begin{aligned}a_{13,1}&\equiv(-1)^4(1\times a_{1,1}+4\times a_{1,4}+6\times a_{1,7}+4\times a_{1,10}+1\times a_{1,13})\\&\equiv(a_{1,1}+a_{1,4}+a_{1,10}+a_{1,13})\equiv 0\end{aligned}$$

爲黑色。



例 7. 求 $a_{28,5}$ 的話, 因爲 $28=27\times 3^0+1=9\times 3^1+1=3\times 3^2+1=1\times 3^3+1$, 所以利用定理 5, s 與 t 就有四種取法,

取 $(s,t)=(27,0)$ 時, 即爲定理 1, $a_{28,5}\equiv-(C_0^{27}a_{1,5}+C_1^{27}a_{1,6}+\cdots+C_{27}^{27}a_{1,32})$。

取 $(s,t)=(9,1)$ 時, $a_{28,5}\equiv-(C_0^{9}a_{1,5}+C_1^{9}a_{1,8}+\cdots+C_{9}^{9}a_{1,32})$。

取 $(s,t)=(3,2)$ 時, $a_{28,5}\equiv-(C_0^{3}a_{1,5}+C_1^{3}a_{1,14}+C_2^{3}a_{1,23}+C_{3}^{3}a_{1,32})$。

取 $(s,t)=(1,3)$ 時, 即爲推論 3, $a_{28,5}\equiv-(C_0^{1}a_{1,5}+C_1^{1}a_{1,32})$。

所以定理 5 可以說是集大成, s 取 $n-1$ 就是定理 1, s 取 1 就是推論 3, 爲了計算方便, s 當然是越小越好, 計算的項數比較少 $(s+1$項)。

三、速算魔術

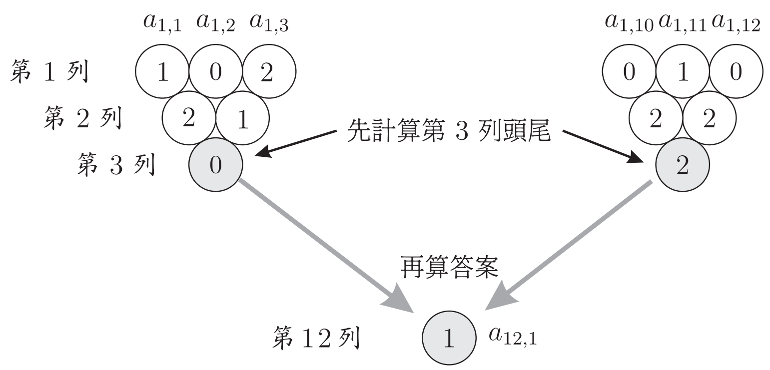
此遊戲若能夠速算, 即可成爲一個數學魔術。

魔術師請觀眾隨意在第一列擺放三種顏色的球, 並告知其接下來每一列的擺法規則, 待觀眾知道規則後, 準備開始放時, 魔術師即可寫下最後一顆球的顏色「預言」。過了許久, 等觀眾把最後一顆擺出來後, 魔術師才把剛剛寫好的預言拿出來對照, 果然沒錯!

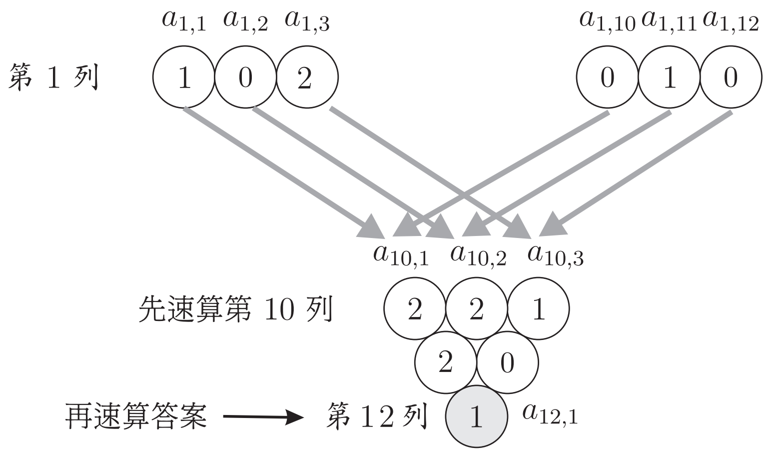
方法是這樣的, 若觀衆在第一列擺的球數爲 n, 設 $n-1$ 的 3 的次方的正因數中最大者爲 3^t, 這樣的話 $n = s\cdot 3^t + 1$ 的表示法中的 s 最小。若 s 很小, 則利用定理 5 即可很快地算出最後一顆球的標號; 若 s 不夠小, 只好利用比 n 小且型如 $s\cdot 3^t+1$ 的數, 多算幾次以求出最後一顆球的標號。

例 8. 假設觀衆第一列放了「102112022010」十二顆球。

第一種想法, 因第三列有 $12-2=10=1\times 3^2+1$ 顆球, 故先算第三列頭尾的球, 再算出答案。



第二種想法, 會快一些, 先算第 10 列的三顆球, 然後再算出答案。



讀者可以自己嘗試其它例子, 例如 11 顆球、20 顆球, 馬上會發現, 不管流程怎麼分段, 若第一列用球數是最少的話, 球數都是相同的。事實上, 還可以把用球數算出來。

定理 9. 若觀衆在第一列擺了 n 顆球, 其中 $n-1=(\cdots n_k n_{k-1}\cdots n_2 n_1 n_0)_3$, 則要計算出解的話, 第一列的用球數必爲 $\prod\limits_{k\geq 0}(n_k+1)$ 顆球。

證明: 利用盧卡斯定理, 計算二項式係數不爲 3 的倍數的數量即得。 □

例如觀衆若擺了 9 顆球的話, 因爲 $8=(22)_3$, 由定理 9 知必定會用到第一列的 $3\times 3=9$ 顆球, 所以第一列的每一顆都要被計算, 因此魔術師只能慢慢利用定理 1 來算了。此時該怎麼辦呢 ? 魔術師可以用一些言語上的誘導讓觀衆多放幾顆:「最後, 你再選一顆, 插到到中間, 但在你還沒選擇插到哪個位置前, 我會先做個預言 $\cdots$」或是再選第二個觀衆上來多插一顆球到中間之類的。

當然魔術師也可以一開始就指定觀衆放特定顆數的球, 例如 10 顆、19 顆 $\cdots$ 比較好算的數目, 但這樣就不能變太多次, 因爲幾次之後, 觀衆就會想要放別種球數了。

另一種變型的版本如下:

> 魔術師請觀眾在紙上第一列隨意寫 6 個正整數, 而第二列的5個數, 每個都是用第一列相鄰的兩數相加, 一直寫到第 6 列, 剩下一個數。魔術師會提早寫下「預言」, 內容是最後這個數除以 5 的餘數是多少!

因爲 5 是質數, 所以這個變型的版本, 一樣可以用定理 5 改成 $\mathbb{Z}_5$ 來速算。不過這個數字的版本, 容易被看出算法, 還是彩球的版本比較讓人驚豔, 畢竟它的數學建模不是這麼容易。

四、最少顆球決定盤面

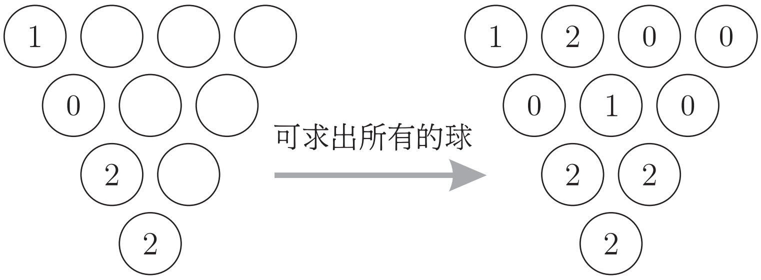
原彩球遊戲的目的是要求出最下面一顆球的顏色, 現在我們改變一下遊戲目的: 能否選出若干顆球, 這些球的顏色任給, 都可以在不違背規則 (每顆球由上一列相鄰兩顆球的顏色決定) 下, 把所有的球的顏色確定出來。

例 10. 以 $n=4$ 爲例 (第一列有 4 顆球),

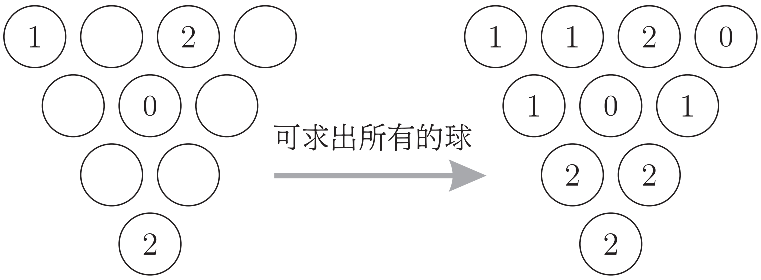
$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} & & a_{1,4} \\
& a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & \\
& & a_{3,1} & & a_{3,2} & & \\
& & & a_{4,1} & & &
\end{array}$$

若第一列的 4 顆球任給顏色, 當然都可以把全部的 10 顆球顏色求出。

若每一列的第一顆球顏色任給, 一樣也可以把 10 顆球顏色都求出。



或是 $a_{1,1}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{4,1}$ 這四顆球的顏色任給, 也都可以唯一決定所有球的顏色, 只是需要花一點時間嘗試。



那有沒有可能只選 3 顆球, 其顏色任給, 都可以決定整個盤面呢 ? 答案是不可能的。爲什麼呢 ? 這就要用線性代數來回答這個問題了 (以下的運算均爲 $\mathbb{Z}_3$ 中的運算)。

依據「每顆球顏色由上一列相鄰兩顆球決定」的規則, 轉成數學模型, 即爲

$$a_{i,j} = -(a_{i-1,j} + a_{i-1,j+1})$$

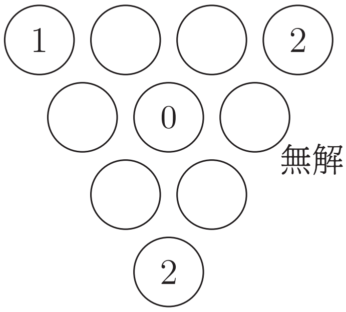
以 $n = 4$ 爲例, 可以列出下面的聯立方程組:

$$\begin{cases} a_{2,1} = -(a_{1,1} + a_{1,2}) \\ a_{2,2} = -(a_{1,2} + a_{1,3}) \\ a_{2,3} = -(a_{1,3} + a_{1,4}) \\ a_{3,1} = -(a_{2,1} + a_{2,2}) \\ a_{3,2} = -(a_{2,2} + a_{2,3}) \\ a_{4,1} = -(a_{3,1} + a_{3,2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} = 0 \\ a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,2} = 0 \\ a_{1,3} + a_{1,4} + a_{2,3} = 0 \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,1} = 0 \\ a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,2} = 0 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{4,1} = 0. \end{cases}$$

此聯立方程組, 有 10 個未知數, 若只給定 3 個變數值的話, 也會剩下 7 個未知數, 而 6 條式子, 是不會有唯一解的。依這個想法, 我們可以得到下面的定理:

定理 11. 第一列爲 n 顆球的盤面, 若選定其中 k 顆球, 使得此 k 顆球顏色任意給定, 都要能確定所有球的顏色的話, 則 k 必爲 n。

但是不是隨便選 n 顆球都可以呢？ 當然不是！例如, 當 $n=4$ 時, 選定 $a_{1,1}, a_{1,4}, a_{2,2}, a_{4,1}$ 這四顆球的話, 顏色給的不好, 就會無解。下面這個狀況就是無解



那除了暴力法試之外, 有沒有好的方法可以判斷有沒有解呢 ？ 當然有的 ！ 把剛剛的聯立方程組, 寫成矩陣型式, 如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{1,4} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而 $a_{1,1}, a_{1,4}, a_{2,2}, a_{4,1}$ 給定的話 (變成常數), 就可以把它們移到等號右邊, 變成:

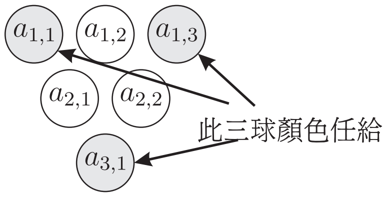
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,3} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{1,1} \\ -a_{2,2} \\ -a_{1,4} \\ -a_{2,2} \\ -a_{2,2} \\ -a_{4,1} \end{bmatrix}$$

此時左邊的係數矩陣, 即爲原係數矩陣扣掉 $a_{1,1}, a_{1,4}, a_{2,2}, a_{4,1}$ 對應的 4 行, 而因爲其行

列式爲 0 (在 $\mathbb{Z}_3$ 中), 所以右邊的常數向量就有辦法調整到讓此聯立方程組無解。

我們再來看一個例子:

例 12. 設 $n=3$, 其三個角落的球, 顏色任給, 是否都能決定出所有球的顏色呢 ?

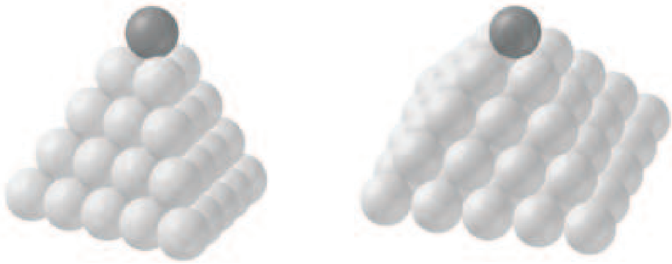


依前面的方式寫出聯立方程式的係數矩陣爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 扣除 $a_{1,1}, a_{1,3}$ 與 $a_{3,1}$ 對應的行後, 爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 其行列式爲 $-2 \neq 0$ (在 $\mathbb{Z}_3$ 中), 所以 $a_{1,1}, a_{1,3}, a_{3,1}$ 三球顏色任給, 皆能決定整個盤面。這個結果其實不是那麼容易看出來。

再更進一步, 若選定的球超過 n 顆是否有解 ? 選定的球少於 n 顆的話, 必不能決定所有球的顏色, 但總共有幾組解呢? 這些全都可以在線性代數中找到解答, 我想就到此打住吧 !

五、結語

單人彩球遊戲, 把擺放的規則設計成數學運算後, 就可以推導出不少性質。即使是推廣成 p 種顏色的球, 也是大同小異, 不過若 p 不是質數的話, 就不是所有的定理都能用 (因爲盧卡斯定理條件不成立)。另一方面, 也可以討論推廣成三維的情況, 例如第一層擺成三角形或正方形, 然後一層一層往上擺成三角垜或正方形垜, 推出剩最後一顆時的顏色。也是會跟兩球間的最短路徑數有關, 不過麻煩的是, 運算三角垜的話, 可以用類似 $(x+y+z)$ 的運算決定上一層的球所代表的數, 但怎麼讓數字轉回顏色後合理化, 就留給有興趣的讀者思考了。



三角垜　　　　四角垜

參考資料

1. 游森棚。十二個課堂遊戲探索問題。科學研習月刊, Vol. 54-4, pp. 46-49, Apr. 2015.
2. Julia Robinson Mathematics Festival(JRMF), Color Triangle Challenge, American Institute of Mathematics, 2016.
3. 茱莉亞羅賓遜數學園遊會, 彩色三角形, 九九文教基金會, 2017。
4. 黃胤甡、張丰耘、蔡慈。神機妙算。宜蘭縣 106 年度國中小科展第一名, 2017年。
5. 周家萱、詹雅函、黃子恆。神算。第 56 屆中小學科展國小組最佳創意獎, 2016年。

—本文作者徐祥峻爲國立臺灣師範大學數學系博士後研究員, 郭君逸任教國立臺灣師範大學數學系—