數學傳播 41卷2期, pp. 80-95

回文數定理與回文數幻方

梁培基

引言：尋找「196」的回文數, 是迄今爲止沒有解決的難題。數學家用傳統的「顛倒相加法」算到3億多位也沒有找到196的回文數, 計算機的速算功能, 在這裏黯然失色。既然此路不通, 何不另闢蹊徑。本文給出一種方法可以得到任意數的回文數, 解決了「196」的回文數問題, 同時也解決了 196 的一連串顛倒數 (887, 1675, 7436$\cdots$) 得不到的回文數問題。並給出由回文數組成的幻方及平方幻方等。

著名數學家美籍華裔李學數教授在他撰寫的《數學與數學家的故事》第4冊 [1], 第 3 章「回文數、鏡反數和華林問題」一文中, 介紹了「回文數」與「回文對聯」。李學數教授文、理兼優, 知識淵博, 著作豐碩, 尤其擅長撰寫古今中外數學家奮鬥勵志的故事, 對激勵青少年學習數學起到了巨大的推動作用。他用生花之妙筆撰寫了古典式回文對聯、回文詩詞, 這些詩詞可以從前到後讀, 也可以反過來從後向前讀。經過正讀與反讀, 有的意思相近, 有的意思迥異, 令人耳目一新, 敬佩有加。又介紹了回文數問題及華林問題, 深入淺出, 發人深省。能看到李學數教授的《數學與數學家的故事》是人生之幸事, 不僅給自己充足了勤奮學習的正能量, 甚至可以影響N 代人! 不看此書, 懊悔莫及。

一、回文數與回文對聯

「回文數」是數論中一個有趣的問題。它的定義是: 如果2位 (或2位以上) 數, 從左向右 (從前向後) 讀與從右向左 (從後向前) 讀, 完全一樣, 我們稱這種數爲「回文數」。例如: 11, 161, 8778等, 都是回文數。

對聯是我國特有的一種文學形式, 它短小精粹, 妙趣橫生。在茫茫「聯海」中有一種倒讀、順讀其文字或音調都一樣的對聯, 稱爲「回文對聯」。例如：鬥雞山上山雞鬥, 龍隱岩裏岩隱龍。還有: 上河老和尚, 有心交新友; 之前, 這幅聯是「孤聯」, 沒人對出。我們給出:「原莊小狀元, 聞有會友文。」與之匹配。並附上四句以紀念之：老和尚以文會友, 小狀元對答如流, 忘年交情投意合, 傳佳話萬古千秋。

人們不禁要問, 先有回文對聯呢? 還是先有回文數?

二、賈憲三角形與回文數

對於上面的問題有無答案, 我們姑且不論。在數學方面記載「回文數」最早的書籍是宋代楊輝著的《注解九章演算法》(1261年), 並有自注: 「出《解鎖》算術, 賈憲用此術。」如圖1 [1]。在我國, 把圖1稱爲「賈憲 (約1200年) 三角形。」在歐洲叫做「帕斯卡 (1653年) 三角形。」但是, 比中國晚了幾百年矣!

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

圖 1

圖 1 的其他功能和在數學方面的巨大貢獻, 本文暫且不提。僅從「回文數」方面進行分析, 我們發現從第 2 行至第 5 行的 11, 121, 1331, 14641 都是回文數。它們分別是 11 的 1、2、3、4 次方之積。

還有,

$$
\begin{aligned}
111^2 &= 12321 \\
1111^2 &= 1234321 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
111111111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
22^2 &= 484 \\
202^2 &= 40804 \\
307^2 &= 94249
\end{aligned}
$$

上面的回文數都是完全平方數, 不妨稱爲「平方回文數」。

當人們發現 11 的 1、2、3、4 次方之積都是回文數時, 希望用「類推法」尋找 11^k $(k > 4)$ 次冪構成的回文數, 又請電腦來助陣, 不幸的是, 至今未果。但是也沒法證明不存在 11^k $(k > 4)$ 次冪構成回文數。

另外還有, 用一個數, 乘以該數的顛倒數, 而得到回文數。如:

$$\begin{aligned} 12\times 21&=252\\ 112\times 211&=23632\\ \vdots\qquad&\quad\vdots\\ 111112\times 211111&=23456965432 \end{aligned}$$

這類回文數稱爲「顛倒乘積型回文數」。然而, 並不是任意數與它的顛倒數的乘積都能構成回文數。

還有在素數裏尋找回文數, 例如: 101, 373, 11411, ..., 19891 都是回文數。在素數家族裏, 既是素數又是回文數的「數」, 如鳳毛麟角。

那麼, 怎樣得到更多的回文數呢?

三、回文數的一般構造方法

目前, 人們採用「首尾顛倒相加法」來得到回文數。這個方法是, 把給定的2位 (或 2 位以上) 數, 進行首尾顛倒之後, 與原來的數相加, 得到一個新數。如果這個新數不是回文數, 再把這個新數首尾顛倒過來, 與新數相加, ..., 經過多次「首尾顛倒相加」, 直到得到回文數爲止。

例如:

$$\begin{array}{r} 125\\ +\ 521\\ \hline 646 \end{array}$$

一個顛倒就得到了回文數。再如:

$$\begin{array}{r} 437\\ +\ 734\\ \hline 1171\\ +\ 1711\\ \hline 2882 \end{array}$$

經過兩次顛倒得到了回文數。

讀者不妨試驗一下, 很多數字經過有限次「首尾顛倒相加」, 都能任其擺佈得到回文數。但是「196」這個數, 個性十足, 非常特殊, 經過很多次顛倒相加也不肯成爲回文數, 用高級電腦經過數億萬次的「顛倒」[2], 仍然「它行它素」不肯變成回文數。高級電腦也無奈它何!「電腦」真是成了「電惱」!

在這裏, 我們把回文數分爲「奇數位回文數」和「偶數位回文數」兩種類型。例如 161 是

3 位數, 3 是奇數, 所以稱爲「奇數位回文數」, 8778 是「偶數位回文數」。其實, 把偶數位回文數中間兩個相同的數去掉一個, 就成爲奇數位回文數。

四、「偶數位回文數」的構作方法

定義: 設 A、B 爲不相等的兩個整數, 用 AB 表示 $10A+B$, 這裏的 AB 不是乘法關係的 $A\times B$, 下同。

若 $1000\times A+100\times B+10\times B+A$, 得到的 $ABBA$, 稱爲 4 位回文數 H_4, 一個 n 位的回文數記作 H_n。由 2 位數 AB, 生成 4 位數 $ABBA$ 的 H_4 回文數的方法。

定理1: 設

$$H_4=[101\times AB+9\times(B-A)] \tag{1}$$

則 H_4 爲回文數。

證明: 由定義知, 兩個不相等的數 AB 得到的 4 位 $ABBA$ 回文數 H_4 爲:

$$1000A+100B+10B+A \tag{2}$$

把 (1) 式展開

$$\begin{aligned} H_4&=101(10A+B)+9(B-A)\\ &=1010A+101B+9B-9A\\ &=1001A+110B \end{aligned} \tag{3}$$

(2)−(3) 得

$$1000A+100B+10B+A-(1001A+110B)=0$$

定理 1 證畢。 □

兩個例子: 當 $A=1$, $B=2$ 時, 及 $A=5$, $B=2$ 時, 代入 (1) 得

$$101\times 12+9\times(2-1)=1212+9=1221.$$
$$101\times 52+9\times(2-5)=5252+(-27)=5225.$$

以上是由 2 位數 AB 經過計算得到的 4 位數回文數 H_4。

下面介紹由 3 位數 ABC 得到的回文數 H_6。

定義 2: 設 A、B、C 爲不相等的 3 個整數, 用 ABC 表示 $100A+10B+C$。

若 $100000A+10000B+1000C+100C+10B+A$ 得到的 $ABCCBA$ 稱爲 6 位回文數 H_6。

由 3 位數 ABC, 生成 6 位數 $ABCCBA$ 的回文數 H_6 的方法:

定理 2: 令:

$$H_6=1001(ABC)+99(C-A) \tag{4}$$

則 H_6 爲回文數。

證明: 由定義知, 3 個數構成的 H_6 回文數爲

$$100000A+10000B+1000C+100C+10B+A \tag{5}$$

把 (4) 展開:

$$\begin{aligned} H_6&=1001(100A+10B+C)+99(C-A)\\ &=100100A+10010B+1001C+99C-99A\\ &=100001A+10010B+1100C \end{aligned} \tag{6}$$

(5)−(6) 得:

$$100000A+10000B+1000C+100C+10B+A-(100001A+10010B+1100C)=0$$

定理2證畢。 □

下面, 我們給出 $ABC=729$ 及 $ABC=196$ 的例子

當 $ABC=729$ 時, 把 ABC 代入 (4) 得

$$H_6=1001\times 729+99\times(9-7)=729729+198=729927.$$

當 $ABC=196$ 時,

$$1001\times 196+99\times(6-1)=196196+495=196691.$$

當 $ABC=887$ (196 的顛倒數之和), 把 ABC 代入 (4) 得

$$1001\times 887+99\times(7-8)=887887+(-99)=887788.$$

五、高位回文數的構作

世界上的各種事物都存在著「分」與「合」的現象。三國演義說得好:「分久必合, 合久必分。」在構作高位回文數時, 我們把「分」與「合」派上了用場。

在這裏, 我們介紹「分拆插入法」。例如, 要得到 4 位數 $ABCD$ 生成的 8 位數回文數 H_8 的方法:

設 $ABCD$ 爲 1639爲例, 按如下步驟進行

1. 先將 1639 分爲 16 與 39 兩部分, 按照 2 位數生成 4 位回文數的方法, 生成兩個 H_4。
2. 將 16 代入下 (1) 式, 得

$$101\times 16+9\times(6-1)=1616+45=1661.$$

再將 39 代入 (1) 式, 得

$$101\times 39+9\times(9-3)=3939+54=3993.$$

3. 把 1661 從中間分開, 分爲 16 與 61;
4. 把 16 排列在 H_8 的第 1 位、第 2 位上, 第 3 位至第 6 位插入 3993, 第 7 位、第 8 位是 61 的位置。
5. 將它們對號入座 16399361 就完成了一個 8 位數的回文數 H_8。

利用上述方法可以得到由 $2k$ $(k=2,3,\ldots)$ 個數生成 $2\times 2k$ 的回文數

設 $k=3$ 的 6 位數 $ABCDEF=246889$, 生成 12 位數的回文數 H_{12}, 的例子, 把 246889 分爲 24 與 68 及 89 三部分, 分別代入 (1) 式, 得

$$101\times 24+9\times(4-2)=2424+18=2442,$$
$$101\times 68+9\times(8-6)=6868+18=6886;$$
$$101\times 89+9\times(9-8)=8989+9=8998.$$

把 3 個 4 位數的回文數按照分拆插入法的順序, 對號入座, 得 $H_{12}=246889988642$。

也可以按照 3 位數生成 6 位回文數 H_6 的方法如下:

把 246889, 分拆爲 246 與 889 兩部分, 將其分別代入 (4) 式, 得

$$1001\times 246+99\times(6-2)=246246+396=246642,$$
$$1001\times 889+99\times(9-8)=889889+99=889988.$$

分拆插入得: $H_{12}=246889988642$。結果相同, 殊途而同歸。

我們知道, 任意正整數 n $(n>1)$, 可表爲

$$n=2k,\ n=2k+1,\quad (k=1,2,\ldots)$$

當 $n=2k$ 時, 我們利用構作 k 組 2 位數回文數的方法, 得到任意 n 位數的 $2n$ 位的回文數 H_{2n}。

當 $n=2k+1$ 時, 我們構作 $k-1$ 組 2 位數回文數的與一個 3 位數的方法得到 $2(2k+1)$ 位的回文數。

196 是一個奇怪的數, 利用傳統的「顛倒相加法」, 得不到回文數, 它的一連串顛倒數也得不到回文數。我們用新的方法把 196 及其「一連串顛倒數也得不到回文數」的數代入 (1) 式或者 (4) 式, 使之得到它們各自的回文數:

當 $ABCD=1675$ (196 的第 3 輪顛倒數之和)。

令: $H_8=10001\times1675+999\times(5-1)+90\times(7-6)=16751675+3996+90=16755761$.

當 $ABCD=7436$ 時 (196 的第 4 輪顛倒數之和)。

令: $H_8=10001\times7436+999\times(6-7)+90\times(3-4)=74367436+(-999)+(-90)=74366347$.

當 $ABCDE=13783$ 時 (196 的第 5 輪顛倒數之和), 可以構造一個 2 位數「13」代入 (1) 式, 再構造 3 位數「783」代入 (4) 式的回文數, 利用「分拆插入法」得到 $4+6=10$ 位數的回文數:

(1) 把「13」代入 (1) 式 $H_4=101\times AB+9\times(B-A)$ 得

$$101\times13+9\times(3-1)=1313+18=1331;$$

(2) 把「783」代入 (4) 式 $H_6=1001(ABC)+99(C-A)$ 得

$$1001\times783+99\times(3-7)=783783-396=783387.$$

(3) 按照分拆插入法把 1331 分拆爲 13 與 31, 之後在 13 與 31 之間插入 783387, 就可以得到 10 位數的 $H_{10}=1378338731$.

同樣的方法, 可以得到 52524 與 95049 (196 的第 6、7 輪顛倒數之和) 各自的 10 位回文數, 請讀者自己完成。

當 $ABCDEF=189108$ 時 (196 的第 8 輪顛倒數之和) , 可以分爲 189 與 108 兩部

分, 把 189 與 108 分別代入 (4) 式得

$$1001 \times 189 + 99 \times (9-1) = 189189 + 792 = 189981;$$
$$1001 \times 108 + 99 \times (8-1) = 108108 + 693 = 108801.$$

按照分折插入法把 189981 分拆爲 189 與 981, 之後在 189 與 981 之間插入 108801, 就可以得到 12 位數的 $H_{12} = 189108801981$。

同樣的方法可以得到 991089 (196 的第 9 輪顛倒數之和) 的 12 位回文數, 從略。

至此, 解決了「196」及其一連串顛倒數的回文數問題。

應驗了蘇東坡的名言:

蘇東坡曰 :「天下無語不成對」(指對聯) ;
我們對之 :「世上有數能轉回」(回文數) 。

六、回文數幻方

回文數的問世爲數字家族增添了迷人的斑斕色彩, 回文數奇妙的性質 [2, 3, 4], 吸引了衆多數學愛好者爲之折腰, 用回文數構造幻方是一個新課題, 廣大幻方愛好者趨之若鶩。回文數在茫茫數海之中已經是鳳毛麟角, 而既是素數、又是回文數「雙重身份」的數, 更是寥若晨星。能否利用這種數字構造出幻方? 回答是肯定的。圖 2、圖 3、圖 4, 是鐘明 (四川一位數學教師) 等幻友, 創作的「回文素數幻方」。

定義: 回文數幻方, 回文素數幻方。

由回文數排列成的幻方, 叫「回文數幻方」。如果一個幻方的元素既是回文數, 又是素數, 稱爲「回文素數幻方」。

3 階回文素數幻方		
作者 鐘明 牛國良 曾學涵		
189595981	103212301	146858641
103818301	146555641	189292981
146252641	189898981	103515301

圖2. $S_3 = 439666923$.

圖 2 是由回文素數構成的3階幻方, 它不僅滿足幻方的性質, 而且有如下奇妙的性質; 把這個幻方同時去掉各個元素的首位數和末位數, 稱爲「剪頭去尾」。經過「剪頭去尾」之後, 剩下

的方陣仍然是「回文數幻方」。這樣再次繼續「剪頭去尾」, 剩下的方陣仍然滿足「回文數幻方」的性質。直到剩下一兵一卒「一位數時」, 仍然保留著幻方的「氣節」, 雖然元素相同。圖3是依次「剪頭去尾」之後剩下的 4 個 3 階回文數幻方 (雙粗線爲界):

8959598	0321230	4685864
0381830	4655564	8929298
4625264	8989898	0351530
$S_3 = 13966692$		

95959	32123	68586
38183	65556	92929
62526	98989	35153
$S_3 = 196668$		

595	212	858
818	555	292
252	898	515
$S_3 = 1665$		

9	1	5
1	5	9
5	9	1
$S_3 = 15$		

圖3

12721	16661	33533	76367
74747	35153	12821	16561
15551	13831	77477	32423
36263	73637	15451	13931

圖 4: $S_4 = 139282$.

100050001	104222401	114848411	108434801	157555751
103939301	109444901	156434651	101060101	114232411
157444751	111070111	103323301	104949401	108323801
104333401	103828301	109333901	167454761	100161001
119343911	156545651	101171101	103212301	104838401

圖 5: $S_5 = 585111365$.

如果對於圖 4 的 4 階「回文素數幻方」, 進行「剪頭去尾」之後, 每個元素剩下的 3 位數的回文數, 它們仍然滿足「回文數幻方」的性質。圖 5 亦然。請讀者自己驗證。

七、回文數平方幻方的構造

筆者構造出平方幻方 [5], 本文利用回文數構造出 8 階與 9 階回文數平方幻方, 圖 6 是一個用 3 位回文數構成的 8 階平方幻方, 這個幻方的 1 次幻和具有全對稱幻方的性質, 其幻和 $S_8 = 3916$。它的 2 次幻和只滿足每行、每列及兩條對角線等於定值, 即 $S_8^2 = 2349524$。這個幻方同樣具有「剪頭、去尾」的性質, 但是與圖 3、圖 4 所講的「剪頭去尾」是有區別, 前面的「剪頭去尾」是在一個幻方中同時進行的兩種「手術」, 即既「剪頭」又「去尾」。而這裏的「剪頭、去尾」是在兩個幻方中進行的, 或者說分兩次進行的, 先「剪頭」使之成爲一個幻方; 再「去尾」又組成一個幻方。我們在「剪頭、去尾」之間插入「、」號以示區別。在這裏, 對圖 6 進行「剪頭」手術: 去掉每個元素的第 1 位數,「剪頭」之後, 剩下的元素仍然是平方幻方 (圖7)。而「去尾」, 則是去掉圖 6 每個元素的末位數,「去尾」之後, 剩下的也是平方幻方 (圖8)。圖 9 是將圖 7 與圖 8 的各個元素合併爲 4 位回文數之後, 得到的平方幻方。亦即, 對於圖 8 的各個元素乘以 100, 再加上圖 7 相同位置上的元素, 就變成 4 位數的回文數平方幻方圖 9。充分彰顯了能「分」能「合」的性質。

202	323	848	565	636	717	474	151
171	454	737	616	545	868	303	222
727	606	161	444	313	232	555	878
858	575	212	333	464	141	626	707
343	262	505	828	777	656	131	414
434	111	676	757	808	525	242	363
666	747	424	101	252	373	818	535
515	838	353	272	121	404	767	646

圖 6: $S_8 = 3916$, $S_8^2 = 2349524$.

02	23	48	65	36	17	74	51
71	54	37	16	45	68	03	22
27	06	61	44	13	32	55	78
58	75	12	33	64	41	26	07
43	62	05	28	77	56	31	14
34	11	76	57	08	25	42	63
66	47	24	01	52	73	18	35
15	38	53	72	21	04	67	46

圖 7: $S_8 = 316$, $S_8^2 = 16724$.

20	32	84	56	63	71	47	15
17	45	73	61	54	86	30	22
72	60	16	44	31	23	55	87
85	57	21	33	46	14	62	70
34	26	50	82	77	65	13	41
43	11	67	75	80	52	24	36
66	74	42	10	25	37	81	53
51	83	35	27	12	40	76	64

圖 8: $S_8 = 388$, $S_8^2 = 23060$.

2002	3223	8448	5665	6336	7117	4774	1551
1771	4554	7337	6116	5445	8668	3003	2222
7227	6006	1661	4444	3113	2332	5555	8778
8558	5775	2112	3333	4664	1441	6226	7007
3443	2662	5005	8228	7777	6556	1331	4114
4334	1111	6776	7557	8008	5225	2442	3663
6666	7447	4224	1001	2552	3773	8118	5335
5115	8338	3553	2772	1221	4004	7667	6446

圖 9: $S_8 = 39116$, $S_8^2 = 233849924$.

看到圖 6, 圖 7, 圖 8 的 3 個幻方, 勾起了語文老師呂振洲先生猜字謎的回憶: 一車在前, 兩車隨後, 三車飛奔轟轟響; 一口在上, 兩口在下, 三口噴噴品瓊漿。(猜二字, 轟, 品) 看到圖7

與圖8, 是由圖9所包含的幻方。亦即圖9是圖7與圖8的「母幻方」, 想起古人一副對聯:

「稻草捆秧父抱子, 竹籃提筍母懷兒。」

讀者朋友, 在這裏是「父抱子」呢? 還是「母懷兒」? 雖然寫這段文章的時間是父親節。

看到圖6～圖9 四個幻方的圖形, 想起少年時期數學教師周太順老師的一道趣味算題:

問牧童幾隻羊? 答曰: 前邊 3 隻羊, 後邊 3 隻羊, 左邊 3 隻羊, 右邊 3 隻羊。(至少幾隻羊?) 。

我們還可以作如下變換, 使得改變後的方陣仍然成爲平方幻方:

我們發現, 從圖 6 到圖 15, 由一個平方幻方, 衍生出一系列的平方幻方, 而生生不息。應驗了老子的至理名言「道生一, 一生二, 二生三, 三生萬, ...」

2200	3322	8844	5566	6633	7711	4477	1155
1177	4455	7733	6611	5544	8866	3300	2222
7722	6600	1166	4444	3311	2233	5555	8877
8855	5577	2211	3333	4466	1144	6622	7700
3344	2266	5500	8822	7777	6655	1133	4411
4433	1111	6677	7755	8800	5522	2244	3366
6666	7744	4422	1100	2255	3377	8811	5533
5511	8833	3355	2277	1122	4400	7766	6644

$S_8 = 39908$, $S_8^2 = 249906140$.

圖10. 把圖9的第4位數移到第1位, 其元素變成 $AABB$ 型平方幻方。

2020	3232	8484	5656	6363	7171	4747	1515
1717	4545	7373	6161	5454	8686	3030	2222
7272	6060	1616	4444	3131	2323	5555	8787
8585	5757	2121	3333	4646	1414	6262	7070
3434	2626	5050	8282	7777	6565	1313	4141
4343	1111	6767	7575	8080	5252	2424	3636
6666	7474	4242	1010	2525	3737	8181	5353
5151	8383	3535	2727	1212	4040	7676	6464

$S_8 = 39188$, $S_8^2 = 235235060$.

圖11. 把圖10的中間兩數對換。其元素變成 $ABAB$ 型平方幻方。

4040	6464	16968	11312	12726	14342	9494	3030
3434	9090	14746	12322	10908	17372	6060	4444
14544	12120	3232	8888	6262	4646	11110	17574
17170	11514	4242	6666	9292	2828	12524	14140
6868	5252	10100	16564	15554	13130	2626	8282
8686	2222	13534	15150	16160	10504	4848	7272
13332	14948	8484	2020	5050	7474	16362	10706
10302	16766	7070	5454	2424	8080	15352	12928

$S_8 = 78376$, $S_8^2 = 940940240$.

圖12. 對圖11的每個元素乘以2, 得到的平方幻方。

2021	3233	8485	5657	6364	7172	4748	1516
1718	4546	7374	6162	5455	8687	3031	2223
7273	6061	1617	4445	3132	2324	5556	8788
8586	5758	2122	3334	4647	1415	6263	7071
3435	2627	5051	8283	7778	6566	1314	4142
4344	1112	6768	7576	8081	5253	2425	3637
6667	7475	4243	1011	2526	3738	8182	5354
5152	8384	3536	2728	1213	4041	7677	6465

$S_8 = 39196$, $S_8^2 = 235313444$.

圖13. 對圖11的各個元素都+1, 得到的平方幻方。

2011	3223	8475	5647	6354	7162	4738	1506
1708	4536	7364	6152	5445	8677	3021	2213
7263	6051	1607	4435	3122	2314	5546	8778
8576	5748	2112	3324	4637	1405	6253	7061
3425	2617	5041	8273	7768	6556	1304	4132
4334	1102	6758	7566	8071	5243	2415	3627
6657	7465	4233	1001	2516	3728	8172	5344
5142	8374	3526	2718	1203	4031	7667	6455
$S_8 = 39116$, $S_8^2 = 234530324$.							

圖14. 對於圖 11 各個元素減去 9, 得到的平方幻方。

1011	2223	7475	4647	5354	6162	3738	506
708	3536	6364	5152	4445	7677	2021	1213
6263	5051	607	3435	2122	1314	4546	7778
7576	4748	1112	2324	3637	405	5253	6061
2425	1617	4041	7273	6768	5556	304	3132
3334	102	5758	6566	7071	4243	1415	2627
5657	6465	3233	1	1516	2728	7172	4344
4142	7374	2526	1718	203	3031	6667	5455
$S_8 = 31116$, $S_8^2 = 164298324$.							

圖15. 對於圖 14, 各元素減去 1000, 得到的平方幻方。

八、五位回文數 8 階平方幻方

圖 16 是一個 8 階回文數平方幻方, 它的 1 次幻和具有全對稱幻方性質。圖 16 中的各個子陣 H、Z、A、B 分別代表幻方、自然數方陣、A 方陣、B 方陣。它們的關係 (構造方法) 是:

$$H = (h_{ij}) = Z[(a_{ij}), (b_{ij})] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 8)$$

即: 幻方的元素取自 Z 陣的第 (a_{ij}) 行, 第 (b_{ij}) 列所對應的元素。
例如: $h_{(1,1)}$ 的元素, 應該取 Z 陣的 第 $(a_{1,1})$ 行, 第 $(b_{1,1})$ 列所對應的元素。我們發現 $(a_{1,1})$ 位置上的數是 2, $(b_{1,1})$ 位置上的數是 5, 即應該取 Z 陣第 2 行、第 5 列上的元素 35653, 然後把 35653 填寫在 $h_{(1,1)}$ 的位置上。餘類推。我們稱這個方法爲「方陣定位法」[6]。

H:

35653	47574	91019	63336	78287	86168	54445	22722
24742	52425	88188	76267	61316	93039	45554	37673
87178	75257	23732	51415	46564	38683	62326	94049
92029	64346	36663	48584	53435	21712	77277	85158
41514	33633	65356	97079	84148	72227	28782	56465
58485	26762	74247	82128	95059	67376	31613	43534
73237	81118	57475	25752	32623	44544	96069	68386
66366	98089	42524	34643	27772	55455	83138	71217
$S_8 = 479204$, $S_8^2 = 32864655044$.							

Z:

21712	22722	23732	24742	25752	26762	27772	28782
31613	32623	33633	34643	35653	36663	37673	38683
41514	42524	43534	44544	45554	46564	47574	48584
51415	52425	53435	54445	55455	56465	57475	58485
61316	62326	63336	64346	65356	66366	67376	68386
71217	72227	73237	74247	75257	76267	77277	78287
81118	82128	83138	84148	85158	86168	87178	88188
91019	92029	93039	94049	95059	96069	97079	98089

A:

2	3	8	5	6	7	4	1
1	4	7	6	5	8	3	2
7	6	1	4	3	2	5	8
8	5	2	3	4	1	6	7
3	2	5	8	7	6	1	4
4	1	6	7	8	5	2	3
6	7	4	1	2	3	8	5
5	8	3	2	1	4	7	6

B:

5	7	1	3	8	6	4	2
4	2	8	6	1	3	5	7
7	5	3	1	6	8	2	4
2	4	6	8	3	1	7	5
1	3	5	7	4	2	8	6
8	6	4	2	5	7	1	3
3	1	7	5	2	4	6	8
6	8	2	4	7	5	3	1

圖16. 五位回文數 8 階平方幻方。

構造圖 16 的自然數方陣。

我們可以改變圖 16 各個元素的位置, 或者「剪頭」,「去尾」; 或者挑選其中的元素搭配: 前(後) 2 位、3 位、4 位数使之滿足平方幻方的性質。圖17～圖24是變換後的平方幻方。

356	475	910	633	782	861	544	227
247	524	881	762	613	930	455	376
871	752	237	514	465	386	623	940
920	643	366	485	534	217	772	851
415	336	653	970	841	722	287	564
584	267	742	821	950	673	316	435
732	811	574	257	326	445	960	683
663	980	425	346	277	554	831	712

$S_8 = 4788,\ S_8^2 = 3281460.$

圖 17. 用圖 16 各元素的前 3 位數構成的平方幻方。

653	574	19	336	287	168	445	722
742	425	188	267	316	39	554	673
178	257	732	415	564	683	326	49
29	346	663	584	435	712	277	158
514	633	356	79	148	227	782	465
485	762	247	128	59	376	613	534
237	118	475	752	623	544	69	386
366	89	524	643	772	455	138	217

$S_8 = 3204,\ S_8^2 = 1699044.$

圖 18. 用圖 16 各元素的後 3 位數構成的平方幻方。

565	757	101	333	828	616	444	272
474	242	818	626	131	303	555	767
717	525	373	141	656	868	232	404
202	434	666	858	343	171	727	515
151	363	535	707	414	222	878	646
848	676	424	212	505	737	161	353
323	111	747	575	262	454	606	838
636	808	252	464	777	545	313	121

$S_8 = 3916,\ S_8^2 = 2349524.$

圖 19. 用圖 16 各元素中間的 3 位數構成的回文數平方幻方。

3553	4774	9119	6336	7887	8668	5445	2222
2442	5225	8888	7667	6116	9339	4554	3773
8778	7557	2332	5115	4664	3883	6226	9449
9229	6446	3663	4884	5335	2112	7777	8558
4114	3333	6556	9779	8448	7227	2882	5665
5885	2662	7447	8228	9559	6776	3113	4334
7337	8118	5775	2552	3223	4444	9669	6886
6666	9889	4224	3443	2772	5555	8338	7117

$S_8 = 48004,\ S_8^2 = 330640244.$

圖 20. 用圖 16 各元素兩邊各 2 位數構成的回文數平方幻方。

3565	4757	9101	6333	7828	8616	5444	2272
2474	5242	8818	7626	6131	9303	4555	3767
8717	7525	2373	5141	4656	3868	6232	9404
9202	6434	3666	4858	5343	2171	7727	8515
4151	3363	6535	9707	8414	7222	2878	5646
5848	2676	7424	8212	9505	6737	3161	4353
7323	8111	5747	2575	3262	4454	9606	6838
6636	9808	4252	3464	2777	5545	8313	7121

$S_8 = 47916,\ S_8^2 = 328585524.$

圖 21. 用圖 16 各元素前 4 位數構成的平方幻方。

5653	7574	1019	3336	8287	6168	4445	2722
4742	2425	8188	6267	1316	3039	5554	7673
7178	5257	3732	1415	6564	8683	2326	4049
2029	4346	6663	8584	3435	1712	7277	5158
1514	3633	5356	7079	4148	2227	8782	6465
8485	6762	4247	2128	5059	7376	1613	3534
3237	1118	7475	5752	2623	4544	6069	8386
6366	8089	2524	4643	7772	5455	3138	1217

$S_8 = 39204,\ S_8^2 = 235375044.$

圖 22. 用圖 16 各元素後 4 位數構成的平方幻方。

35	47	91	63	78	86	54	22
24	52	88	76	61	93	45	37
87	75	23	51	46	38	62	94
92	64	36	48	53	21	77	85
41	33	65	97	84	72	28	56
58	26	74	82	95	67	31	43
73	81	57	25	32	44	96	68
66	98	42	34	27	55	83	71

$S_8 = 476$, $S_8^2 = 32564$.

圖 23. 用圖 16 各元素的前 2 位數構成的平方幻方。

53	74	19	36	87	68	45	22
42	25	88	67	16	39	54	73
78	57	32	15	64	83	26	49
29	46	63	84	35	12	77	58
14	33	56	79	48	27	82	65
85	62	47	28	59	76	13	34
37	18	75	52	23	44	69	86
66	89	24	43	72	55	38	17

$S_8 = 404$, $S_8^2 = 24644$.

圖 24. 用圖 16 各元素的後 2 位數構成的平方幻方。

九、9 階回文數平方幻方

圖 25 是一個 9 階回文數平方幻方, $S_9 = 4950$, $S_9^2 = 3291285$。各個子陣 H、Z、A、B 分別代表: 幻方、自然數方陣、A 方陣、B 方陣。它們的關係 (構造方法) 是:

$$H = (h_{ij}) = Z[(a_{ij}), (b_{ij})] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 9)$$

即: 幻方的元素取自 Z 陣的第 (a_{ij}) 行, 第 (b_{ij}) 列所對應的元素。

例如: $h_{(1,1)}$的元素, 應該取 Z 陣的第 $(a_{1,1})$ 行, 第 $(b_{1,1})$ 列所對應的元素。我們發現 $(a_{1,1})$ 位置上的數是 8, $(b_{1,1})$ 位置上的數是 7, 即應該取 Z 陣第 8 行、第 7 列上的元素 777, 然後把 777 填寫在 $h_{(1,1)}$ 的位置上。餘類推。我們稱這個方法為「方陣定位法」[6]。

H: 幻方

777	383	565	212	424	909	646	858	131
616	828	101	747	353	535	272	484	969
242	454	939	676	888	161	717	323	505
363	575	787	404	919	222	838	141	656
808	111	626	333	545	757	464	979	282
434	949	252	868	171	686	303	515	727
585	767	373	929	202	414	151	636	848
121	606	818	555	737	343	989	262	474
959	232	444	181	666	878	525	707	313

Z 陣:

101	202	303	404	505	606	707	808	909
111	212	313	414	515	616	717	818	919
121	222	323	424	525	626	727	828	929
131	232	333	434	535	636	737	838	939
141	242	343	444	545	646	747	848	949
151	252	353	454	555	656	757	858	959
161	262	363	464	565	666	767	868	969
171	272	373	474	575	676	777	878	979
181	282	383	484	585	686	787	888	989

圖25. $S_9 = 4950$, $S_9^2 = 3291285$.

8	9	7	2	3	1	5	6	4
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
9	7	8	3	1	2	6	4	5
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2

A 陣

7	3	5	2	4	9	6	8	1
6	8	1	7	3	5	2	4	9
2	4	9	6	8	1	7	3	5
3	5	7	4	9	2	8	1	6
8	1	6	3	5	7	4	9	2
4	9	2	8	1	6	3	5	7
5	7	3	9	2	4	1	6	8
1	6	8	5	7	3	9	2	4
9	2	4	1	6	8	5	7	3

B 陣

十、結語

回文數是個新問題, 196 回文數的難題, 不知難壞了多少「數學頭腦」。回文數幻方更是一個新問題, 由此可以繁衍出類似的: 回文數幻圓、回文數幻星, 等等, 希望有興趣的朋友進一步鑽研開發, 得到更加優秀的結果。

還是古人那句話: 嚶其鳴矣, 求其友聲。

誠摯感謝: 審稿老師的認真審核與修改, 並提出寶貴的意見和建議。

再感謝 50 多年前教語文的呂振洲老師, 認真審核文章發現其中一個重要的疏漏。爲激勵幻友開發研究多出新成果, 呂老師語重心長的寫道:「研讀回文, 拍案喜驚。回文數字, 變換無窮。令人激盪, 妙趣横生。待研開發, 繁衍新生。」

附錄: 8 階回文數雙重幻方淺探

「回文數雙重幻方」是一塊未開發的處女地, 筆者嘗試造出一個回文數雙重幻方以饗幻友, 由於數術低微, 心餘力竭, 未能如願, 今將「半成品」奉獻給大家, 期待著幻方愛好者把這點瑕疵修正過來, 當然, 我要重書修改者一筆。

H:

20000002	30300303	88000088	55500555	11011011	44444444	70077007	60666606
11111111	44044044	70777707	60066006	20200202	30000003	88800888	55000055
70700707	60000006	11100111	44000044	88888888	55055055	20222202	30033003
88088088	55555555	20022002	30333303	70000007	60600606	11000011	44400444
50055005	80888808	33033033	22222222	66000066	77700777	40000004	10100101
66600666	77000077	40400404	10000001	50555505	80088008	33333333	22022022
40444404	10011001	66666666	77077077	33300333	22000022	50500505	80000008
33000033	22200222	50000005	80800808	40044004	10111101	66066066	77777777

上面是一個「積幻方」— 每行、每列及兩條對角線之積:

Π_8 =6.1578252597,6582307873,7263039017,3732771407,5601656783,9322613120 (61位數)

並且, 它們的每行、每列 8 元素之和都等於 380000016, 但是兩條對角線之和不相等, 故權且稱爲「積幻方」。

左對角線上 8 元素之和等於 379843816, 右對角線上 8 元素之和等於 380156216。

各行之和:

380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016

各列之和:

380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016 380000016

距離完整的雙重幻方, 僅僅差對角線之和不相等。

参考資料

1. [美]李學數。數學與數學家的故事, 第4冊。上海科學技術出版社。2015。
2. [美]陳以鴻(譯)。數學的奇妙。上海科技教育出版社。2001。(西奧妮·帕帕斯)。
3. 任現淼。趣味數學365。北京廣播學院出版社。1993。
4. 吳振奎等。名人趣題妙解。天津教育出版社。2001。
5. 梁培基, 顧同新。平方幻方與雙重幻方的構造。數學傳播季刊, 13(3), 65-69 , 1989。
6. 梁培基, 張航輔, 張俠輔。幻方的一種構造方法。雲南大學學報, 11(4), 1989。

—本文作者任職中國河南省封丘縣科協—

2016 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

偶數奇數 文 / 游筑鈵

就算再數下去,
我們仍然擦肩而過。
不會有偶然的相遇,
也不會有奇特的邂逅。

—本文作者就讀南亞技術學院時尚設計科—