

# 切蛋糕和吃掉它\*

Marianne Freiberger<sup>†</sup>

翻譯：吳德琪

2016 年兩位電腦科學家 (Haris Aziz 和 Simon Mackenzie) 在切蛋糕理論 (cake cutting theory) 得到重大的突破 (<https://arxiv.org/pdf/1604.03655.pdf>)。給定任何人數，他們找出方法來切蛋糕分給這些人，並且使得彼此不會嫉妒或羨慕別人所分得的結果。這個理論並不只限於分蛋糕，因為蛋糕可以置換為任何連續的物件，如土地，廣告時間，油等。切蛋糕理論是受到生活中各類問題，如離婚協議，政治衝突等紛爭所啟發。

當只有二個人時 (註一)，要怎麼分蛋糕是非常容易的：第一個人把蛋糕切成兩塊，第二個人得優先選擇其中較喜歡的一塊。第一個人會確定切法可使自己最後無論得到哪一塊都能滿意：他依據不同的蛋糕，依據自己的偏好，也許將蛋糕平分成兩塊；也許將蛋糕切成大小不等的兩塊，但小塊的蛋糕上面多一顆草莓。所以不管第二個人選走哪一塊，他都不會嫉羨。第二個人也許並不滿意蛋糕的切法，然而因為可以優先選擇，他也不會嫉羨另一個人得到的那一塊。一般而言，如果一種分配方法可以讓所有牽涉的人不會嫉妒或羨慕別人得到的結果，我們稱它為無嫉羨 (envy free) 分法。



你想吃哪一片蛋糕？

分給二個人的方法早為人們所知 (甚至聖經上的故事都有這樣的情節)，然而直到 1960 年代，數學家 John L. Selfridge ([https://en.wikipedia.org/wiki/John\\_Selfridge](https://en.wikipedia.org/wiki/John_Selfridge)) 設計出一個優美和有效率的無嫉羨分法可以分給三個人 (稍後數學家 John H. Conway (<https://www.math.princeton.edu/directory/john-conway>) 也獨立做出)。1995 年，政治科學家 Steven J. Brams (<http://politics.as.nyu.edu/object/stevenbrams>) 和數學家 Alan D. Taylor (<http://www.math.union.edu/people/faculty/taylor.html>) 合作得到突破，做出可以分給  $n$  個人的無嫉羨分法 ([https://www.jstore.org/stable/2974850?seq=1#fndtn-page\\_scan\\_tab\\_contents](https://www.jstore.org/stable/2974850?seq=1#fndtn-page_scan_tab_contents))。Brams 和 Taylor 的方

\* *Cut your cake and eat it (eventually)*, 原載+Plus Magazine, <https://plus.maths.org/content/cutting-cakes>

<sup>†</sup>Marianne Freiberger 是 Plus 的兩位編輯之一。負責 Plus 的日常運作，撰寫文章和新聞，進行訪談，向大眾宣傳雜誌，並推廣相關活動。

法有個大缺點：即使僅有四個人分蛋糕時，爲了要得到無嫉羨分法，可能得切無數刀，因此可能使必須詢問這四個人問題的次數（決定問題最終解決所需的時間），達到任意大的數。這些都取決於參與者的偏好（如果幸運的話，可能是小的數），無法從外在設定的邏輯來固定計算步驟或切割次數的上限。這使得數學家們大大地沮喪，他們知道涉及  $n$  個人時，有一個只要切  $n - 1$  刀的無嫉羨分法。如何找出這個分法就是問題所在。

有一種是活動刀子方法 (moving knife)：一個或數個刀子架在蛋糕上方滑動，當參與者認爲該切下一刀時就喊「停」。若僅有四個人要分蛋糕，這種方法能使得所需切下的刀數降爲 5 次 (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489604000502>)，但是參與者在過程中仍得做出無限次的選擇：在刀子滑動軸線上的每一點他們都必須做出是否要喊「停」的決定。因爲我們真正想要的是能在電腦上一步步離散執行的方法，所以活動刀子方法並不十分令人滿意。

Haris Aziz (<https://sites.google.com/site/harisaziz/>) 和 Simon MacKenzie 設計出的新方法就是離散的，而且可以使得所需切下的刀數和詢問這  $n$  個人問題的數目是有限的。 $n$  個人的無限無嫉羨分配方法作者之一，Brams 對這個新結果很高興，他說「我相信 Haris Aziz 和 Simon MacKenzie 的新算法是重要新理論而且無疑地改進發展我和 Taylor 早先結果，因爲可以將步驟降爲有限。我們已證明了邏輯計算步驟的確存在有限上界，但是我們無法找出它來。」

這意味切蛋糕或類似的衝突能被「秒殺」了嗎？並不盡然！Haris Aziz 和 Simon MacKenzie 的新方法是純粹理論方面的興趣。當有  $n$  個人要分蛋糕，必須詢問問題數目的上界是

$$n^{n^{n^{n^n}}}$$

不管他們的偏好是什麼，你所需詢問問題的數目都不需超過這個數字。但這仍是一個難以想像的大數：即使在  $n = 2$  時，普通的計算器都會放棄。Brams 說「藉由或不藉由活動刀子的幫助，如何降低這個上界仍是一個挑戰。但是我不認爲這個上界會低到使得邏輯計算方法的理論結果會有實際的效用。」

還有另一個問題。Haris Aziz 和 Simon MacKenzie 的方法保證沒有人會嫉羨別人所分得的蛋糕。但是並不能保證每個人會很滿意所分到的蛋糕。可能有其他不同的分法可使得其中一或數個人更滿意自己分得的結果，而且不會使任何人更不滿意。在數學語言中，無嫉羨分法通常不是帕累托最優 (pareto-optimal) 分法，它可能會使這些分食蛋糕者發牢騷：即使不嫉羨別人所得，但可能很不高興，因爲知道有不同的分法能得到更好



吃蛋糕的方式百百種

的結果。通常不可能同時辦到無嫉羨和帕累托最優。因此一方面理論學家辛苦地要降低邏輯步驟的上界，一方面現場專業人員，在個別實際紛爭衝突中，必須努力找出什麼才是最佳方法：要滿足無嫉羨要求？分者最中意？或是其他要求？

## 要怎麼切蛋糕分給三個人，而且沒人會嫉羨別人

假設  $A, B, C$  三個人要分食蛋糕。一開始由  $C$  來把蛋糕切成他認為一樣好的三塊。 $A, B$  先選出自己想要的一塊。如果  $A, B$  選擇不同的一塊，我們就得到了無嫉羨分法。假設  $A, B$  選擇相同的一塊。我們讓  $B$  把選中的這塊蛋糕再切下一小塊，使得修整後的這塊和  $B$  認為第二好的一塊同樣得好。把切下一小塊放到一旁（第二輪再處理），讓  $A$  在其餘三塊蛋糕中選出自己最喜歡的一塊。 $B$  接著選出自己想要的一塊，唯一的限制是，如果  $A$  沒有選走修整後的那塊蛋糕， $B$  必須選擇它（註二）。 $C$  拿走最後一塊。現在， $A$  不會嫉羨別人，因為他第一個做選擇。 $B$  不會嫉羨別人，因為有兩塊蛋糕他認為同是最好的選擇，不管  $A$  選走哪一塊，至少還有一塊也是最好的留給他。 $C$  不會嫉羨，因為開始的三塊對他來說一樣好，唯一他認為「貶值」的一塊，也就是被修整後的那一塊蛋糕，已經被  $A$  或  $B$  取走了。

現在來到第二輪，我們要分完切下的一小塊。假設在第一輪中  $A$  選擇了被修整後的那一塊蛋糕，就由  $B$  來把切下的一小塊再切成他認為一樣好的三塊。讓  $A$  先選， $C$  次之， $B$  最後。現在， $A$  不會嫉羨別人，因為他第一個做選擇。如果  $C$  會嫉羨別人，那麼他嫉羨的人必是  $A$ ，因為在第一輪他並不嫉羨，而第二輪中他比  $B$  先選擇，所以他不會嫉羨  $B$ 。但是  $C$  可能會嫉羨  $A$  嗎？想想看，在第一輪中  $A$  選擇了被修整後的那一塊蛋糕，也就是說，第一輪中  $A$  選擇了  $C$  認為比其餘兩塊較次的一塊蛋糕。假設最初  $C$  切成的三塊蛋糕，對  $C$  來說價值分別為  $V$ ，切下來的那一小塊，對  $C$  來說價值為  $W$ 。現在  $C$  已分到的，對  $C$  來說，總價值為  $V$  再加上  $W$  的一部分。 $A$  分到的，對  $C$  來說，總價值為  $V - W$  再加上  $W$  的一部分。顯而易見地， $V - W$  再加上  $W$  的一部分永遠比  $V$  還小。因此，對  $C$  來說， $A$  分配到的比他自己分配到的價值更低，因此  $C$  不會嫉羨  $A$ 。

如果在第一輪中是  $B$  選擇了被修整後的那塊蛋糕，那怎麼辦？我們只要把上面步驟中的  $A, B$  角色互換即可。

延伸閱讀：<https://www.quantamagazine.org/20161006-new-algorithm-solves-cake-cutting-problem/>

註一：為方便起見，以下代名詞都用他。

註二：想想看，為什麼在第一輪中要設下限制，即，如果  $A$  沒有選走修整後的那塊蛋糕， $B$  必須選擇它？