數學傳播 41卷2期, pp. 34-60

積分因子 — Lie 群之觀點

林琦焜

『*The older examinations on ordinary differential equations as found in standard books are not systematic. The writers developed special integration theories for homogeneous differential equations, for linear differential equations, and other special integrable forms of differential equations. However, the mathematicians did not realize that these special theories are all contained in the term infinitesimal transformations, which is closely connected with the term of a one parametric group.*』

Sophus Lie (1842∼1899)

一、前言

開宗明義而言一階常微分方程只有一件事就是 — 積分因子。如何解一階常微分方程等價於找到其對應的積分因子。

記得大二修常微分方程時任課老師用了一本非常不合適的教科書, 所有微分方程的問題都化為矩陣的固有值問題。這樣的結果導致了學生會解二階 (甚至高階) 常微分方程卻不會解一階常微分方程 (因為沒有矩陣!), 後來自己另外找一本之前學長用過的教科書來看。雖然比較容易閱讀, 但卻淪為兵來將擋水來土掩, 一道題目接著一道題目, 一種方法跟著另一種方法似乎又回到中學準備聯考的參考書。微分方程理論是現代數學最重要的學科, 不應該是這種題庫式的學習, 雖然這可以應付考試但人卻淪為機械最後失去學習的熱情。如果你不想被人牽著鼻子走 (當順民!) 自然會發出類似引言中 Sophus Lie 的感嘆: 是否有系統性的方法來處理微分方程? 實際上這正是 19 世紀末挪威數學家 Sophus Lie (1842∼1899) 研究微分方程並進而發展出 Lie 群 (Lie group) 的動機。

十九世紀恰好介於法國大革命與第一次世界大戰之間的一百二十年中, 在數學史上是未曾有過飛躍進步的黃金時代。但同時也發生了兩件悲劇那就是挪威數學家 Niels Abel (1802∼

1829) 與法國數學家 Évariste Galois (1811~1932) 這兩位天才的早逝。他們都是 Lagrange 的追隨者研究代數方程式論。法國大數學家 Joseph-Louis Lagrange (1736~1813) 在他的偉大著作《代數方程式解法檢討》(Réflexions sur la résolution algébrique des q́uations) 提出统一的方法, 現在稱爲 Lagrange resolvent (拉格朗日預解式) 針對二次, 三次, 四次代數方程式爲何有根式解[1]做了全盤的探討, 並指出代數方程式是否有根式解的問題實質上是預解式的置換問題。Lagrange 把置換群 (permutation group) 用於代數方程式求解, 這是群論的開始。對於五次方程式其對應的預解式遠高於五次, 所以他預見到也許一般的五次方程式没有根式解!

> 『高於四次代數方程式的根式解至今仍是尚未解決的問題, 不過也還沒有人證明它是不可解的。······ 根據推理, 我們發覺那些宣稱五次代數方程式有根式解的方法是很有疑問的。』
>
> — Lagrange 回憶錄 —

關於代數方程式, 高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777~1855) 是第一位證明代數方程式根的存在定理, 人稱代數基本定理, 它指出「任意複係數多項式都有一個複數根」。Niels Abel 證明了五次以上的一般代數方程式沒有根式解, 從此開拓了代數學的新面貌。但是一般五次以上方程式沒有根式解, 並不表示所有的代數方程式都沒有根式解。因此接下來的工作是判定那些方程式有根式解? 透過研究 Lagrange 的原著得出的靈感 Galois 在 1832 年提出任意代數方程式有根式解的充分必要條件。他把方程式求解問題轉化成置換群 (permutation group) 的問題。並在複雜的計算中洞見方程式求解的本質。但是 Galois 的工作要等到 1846 年 經由 Joseph Liouville (1809~1882) 的整理之後發表在他所創立的著名期刊
(Journal de Mathématiques Pures et Appliquées) 才重見天日。由於 Liouville 的鼓吹, 數學家開始認識到 Galois 理論的重要性, 群論 (Group Theory) 也才正式進入數學的舞台。Galois 使用群論的想法去討論方程式的可解性, 整套想法今天稱爲 Galois 理論, 這個概念後來對於數學與物理都有極深遠的影響。這個深刻的內涵就是

$$\text{對稱(symmetry)} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{不變量(invariant)} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{群論(group theory)}$$

挪威數學家 Sophus Lie 在聽過同胞數學家 Ludwig Sylow (1832~1918) 介紹 Abel 與 Galois 關於代數方程式之工作, 之後他想用類似 Galois 的方法 (對稱, 不變的概念) 去研究微分方程, 結果他得到 Lie 群 (Lie Groups)。所謂 Lie 群, 是一種連續的變換群 (continuous transformation group)。雖然 Sophus Lie 於 1872~1899 年間得到系統的方法研究微分方

[1]所謂根式解 (solvable by radicals) 是指代數方程式的根可以藉由係數經過加減乘除與開根號表示出來。例如二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解 $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 就是一個根式解。

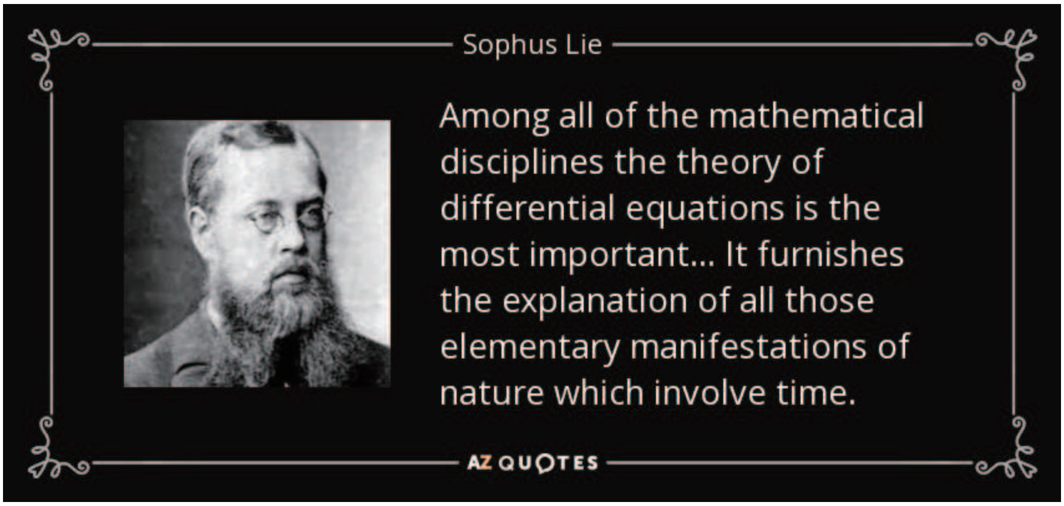

圖 1: S. Lie (1842∼1899). 取自 http://www.azquotes.com/

程, 但後來的歷史卻是往抽象理論發展。直到 1950 年代 G. Birkhoff ([1]) 與 I. Sedov ([7]) 關於量綱分析 (dimensional analysis) 在應用問題的具體的成果, 這引導人們發展出將量綱分析與 Lie 群結合的新方法, 現在稱爲微分方程的對稱分析 (Symmetric Analysis)。因爲 Lie 群的重心是對稱、不變性, 與方程是否是線性無關, 因此可以解決非線性問題。簡言之, 微分方程群分析是用來尋找非線性微分方程的對稱性, 從而獲得精確解來描述複雜的自然現象。

『如果你無法解非線性微分方程, 那麼就尋求 Lie 群的智慧吧!』

這樣的發展是正確也是健康的, 按 S. Lie 的初衷是使用 Lie 群來求解微分方程, 同時代志同道合的同伴克萊茵 (Felix Kein, 1849∼1925) 更在著名的《埃爾朗根綱領》(Erlangen program) 把幾何定義爲一個變換群之下的不變性質, 可見這些大師們不是將 Lie 群視爲只是純數學的一個分支。把數學與科學的需求割裂, 正如一個人失去生命的活水泉源, 最後終將枯竭而死。數學雖然讓人感到抽象, 卻要從自然科學問題終汲取營養, 同時又不吝嗇地用自己這片肥沃土地上生長出來的果實回報自然科學。正如呼吸一樣無論是科學或數學, 破壞這種平衡都是危險的。枯燥乏味抽象空洞的經院式科學註定要滅亡的。

兩個變數的微分方程之積分因子一定存在, 但三個 (或更多個) 變數的微分方程則不一定。這也部份地說明了三維流體困難之所在。藉由積分因子來介紹 Lie 群不僅符合歷史事實, 對於以對稱的角度來理解微分方程也有幫助。如果微分方程真的是描述大自然, 那麼在你還沒有解她之前就應該跟你透露大自然的秘密。學微分方程我們不應該只學到單純的解題技巧, 而是看到微分方程之本質及其與真實現象之關聯。

本文的重點並不是積分因子而是對稱。對稱 (symmetry) 是由 sym(相同) 與 metric (分量, 測量) 組合而成, 和在一起就是相同的分量。我們說物理定律是對稱的, 意思是我們可以對物理定律或者對我們表達物理定律的方式做一些事, 結果沒有任何差異。對稱 (symmetry) 說明了那些沒有改變或不能發生的事, 所以對稱是現代物理學的動力。德國數學家 Hermann Weyl (1885∼1955) 給對稱下了一個絕佳的定義:「假如你對某件事物做了某些事情 (operation) 之後, 它看起來和原來完全相同, 那麼它就是對稱的。」Hermann Weyl 也曾說:「我的研究工作嘗試把真理與美統一起來, 可是如果要我在兩者之中擇一的話, 通常我都選擇美。」其實他心中的美就是對稱。當數學應用到物理時, 美學判斷的有效性最爲可觀。數學家在他們的研究中, 受到結構美之概念形式的強烈期望所驅使, 是相當平常的。

基礎物理發現的第一個重要的對稱性是 Lorentz 不變性 (經 Lorentz 變換後不變)。這是作爲 Maxwell 方程的數學性質而被發現的。愛因斯坦就是以 Lorentz 變換爲基礎而發現狹義相對論, 後來再加以推廣, 由廣義座標不變性的想法, 加上等價原理, 導致了廣義相對論。對稱性也導致英國物理學家諾貝爾物理獎得主 P. Dirac (1902∼1984) 把狹義相對論與量子力學以數學方法合併在一起後 (量子場論), 預測反物質的存在。這後來是由美國加州理工學院的安德森由實驗證實, 並因此榮獲諾貝爾物理獎。因此藉由對稱性可以幫助我們“看”到物理現象, 從此就不在黑暗中摸索。

二、積分因子的起源 — 全微分

學過微積分的人如果沒有體會到微積分基本定理的重要性, 那麼可以肯定地說他 (她) 這門課是白修的。微積分基本定理描述了微積分的兩個主要運算 — 微分和積分之間的關係。它的本質是微分方程: 假設 f 爲定義在閉區間 $[a,b]$ 的實值 (real-valued) 可積分函數, 則

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y(x)=\int_a^x f(t)dt\,, \qquad x\in[a,b]. \tag{2.1}$$

如果 f 只是 x 的函數則微分方程的解 y 只是 f 的不定積分或原函數, 所以我們稱之爲求積法 (method of quadrature)[2]。若 f 同時是 x,y 的函數

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad y(x)=? \tag{2.2}$$

我們就不能直接積分 (2.2), 否則微分方程就只是微積分的真子集 (proper subset)。爲了方便可以假設 $f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 並將 (2.2) 刻意表示爲微分形式 (differential form)

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{2.3}$$

[2]從歷史而言 quadrature (求積法) 就是決定面積, 但也有平方 (squaring) 的意思, 平面上任意幾何圖形若能藉由圓規與直尺化爲相同面積的正方形就稱爲可平方的 (quadrable)。

如果 (2.3) 恰好是一個全微分也就是存在函數 $\Phi(x,y)$ 使得

$$d\Phi(x,y)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{2.4}$$

則根據微積分基本定理我們得微分方程 (2.3) 的 (隱函數) 解

$$\Phi(x,y)=c, \qquad c\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

形式上這相當於 (2.4) 直接積分但此時是平面上的線積分, 一樣是積分但意義卻有本質上的差異。實際上由全微分 (2.4) 得知 (P,Q) 正是 Φ 之梯度, $\nabla\Phi=(P,Q)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P(x,y), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q(x,y). \tag{2.6}$$

將 y 視爲常數而 (2.6) 第一式先對 x 積分

$$\Phi(x,y)=\int P(x,y)dx+g(y). \tag{2.7}$$

這裡 g 是任意 y 的函數, 但扮演著任意的常數之角色。然後 (2.7) 對 y 微分得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q(x,y)=\int\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx+g'(y)$$

或者

$$g'(y)=Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dx. \tag{2.8}$$

由 (2.4) 可推得 (2.8) 的右式與 x 無關因此可以直接對 y 積分, 帶回 (2.7) 得

$$\Phi(x,y)=\int P(x,y)dx+\int Q(x,y)dy-\iint\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy; \tag{2.9}$$

顯然並不是直接對 (2.4) 積分

$$\Phi(x,y)\neq\int P(x,y)dx+\int Q(x,y)dy,$$

而是多了一個雙重積分。同理將 x 視爲常數而 (2.6) 第二式對 y 積分得

$$\Phi(x,y)=\int P(x,y)dx+\int Q(x,y)dy-\iint\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dydx. \tag{2.10}$$

由全微分 (2.4) 得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.11}$$

也就是正合 (exact) 的條件, 所以實際上 (2.9) 與 (2.10) 是等價的。要真正理解一階微分方程 (2.3) 我們需要線積分的知識, 而且由 (2.9), (2.10) 也粗略看出 Green 定理的雛型。

如果 (2.3) 不是一個全微分呢? (2.3) 與 (2.4) 相比較, 如果 (P, Q)、(Φ_x, Φ_y) 是兩個平行的向量, 也就是說存在 $\mu(x, y) \neq 0$ 使得

$$\mu(x,y) = \frac{\Phi_x}{P} = \frac{\Phi_y}{Q}, \tag{2.12}$$

這個公比就是 積分因子[3], 因爲 (2.3) 乘了 $\mu(x, y)$ 之後成爲一個全微分 (本質上就是可以積分, 這也是積分因子爲何如此定義之緣由!)

$$d\Phi = \mu P dx + \mu Q dy. \tag{2.13}$$

按照正合的條件 (2.11), 我們有

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x, \tag{2.14}$$

所以 $\mu(x, y)$ 滿足一階線性偏微分方程

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = (P_y - Q_x)\mu. \tag{2.15}$$

如何解一階常微分方程基本上都化爲尋找積分因子的問題, 而解積分因子本質上是一個一階線性偏微分方程的問題。

$$\text{一階常微分方程} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{積分因子} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{一階線性偏微分方程}$$

三、積分因子 — 微分之平移

考慮齊次線性微分方程

$$y' + y = 0. \tag{3.1}$$

簡單的分離變數可得

$$y = ce^{-x} \quad \Longleftrightarrow \quad ye^x = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

以算子的角度而言這相當於

$$(D+1)y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D(ye^x) = 0, \qquad D = \frac{d}{dx}.$$

指數函數 e^x 是超越函數, 所以 x 不具量綱 (dimensionless), $[x] = 1$。這個事實也可以由方程式看出來

$$[y'] = [y] \quad \Longrightarrow \quad \frac{[y]}{[x]} = [y] \quad \Longrightarrow \quad [x] = 1, \tag{3.2}$$

[3]積分因子 (integrating factor) 這個概念是法國數學家 A. Clairaut (1713～1765) 在 1739 年所提出。他在科學上的貢獻是證明牛頓—惠更斯的猜想: 地球在兩極是比較扁平的。

積分因子 $\mu=e^x$ 乘函數 y 之作用對應於將微分算子 $D+1$ 平移到 D。因此我們稱積分因子是微分之平移。

其次我們考慮
$$y'+ay=0. \tag{3.3}$$
雖然分離變數仍然可以得到解
$$y=ce^{-ax} \quad\Longrightarrow\quad ye^{ax}=c, \qquad c\in\mathbb{R},$$
但這並不是我們所關心, 對方程式做量綱分析得
$$[y']=[ay] \quad\Longrightarrow\quad \frac{[y]}{[x]}=[a][y] \quad\Longrightarrow\quad [a][x]=1,$$
這提供了正確的變數變換
$$y(x)=f(\xi), \qquad \xi=ax, \tag{3.4}$$
所以由連鎖律得
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=a\frac{df}{d\xi},$$
但是 $y'=-ay$ 所以
$$\frac{df}{d\xi}=-f \quad\Longrightarrow\quad y=f=ce^{-\xi}=ce^{-ax},$$
表爲算子
$$(D+a)y=0 \quad\Longleftrightarrow\quad D(ye^{ax})=0.$$

現在將 a 換爲多項式 x
$$y'+xy=0, \tag{3.5}$$
仿前面的作法對方程式做量綱分析得
$$[y']=[xy] \quad\Longrightarrow\quad \frac{[y]}{[x]}=[x][y] \quad\Longrightarrow\quad [x]^2=1,$$
因此可以考慮變數變換
$$y(x)=f(\xi), \qquad \xi=x^2,$$
再由連鎖律得
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=2x\frac{df}{d\xi},$$
所以原方程式成爲
$$\frac{df}{d\xi}+\frac{1}{2}f=0 \quad\Longrightarrow\quad y=f=ce^{-\frac{\xi}{2}}=ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

以算子的角度而言這相當於

$$(D+x)y=0 \quad\Longleftrightarrow\quad D\big(ye^{\frac{x^2}{2}}\big)=0,$$

雖然量綱分析可以得到變數變換 $\xi=x^2$, 但是微分方程中 f 的係數是 $\frac{1}{2}$ 並不是 1。由計算過程中可以想像真正的變數變換

$$y=\tilde{f}(\xi), \qquad \xi=\int x dx=\frac{x^2}{2}, \tag{3.6}$$

$$\frac{d\tilde{f}}{d\xi}+\tilde{f}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=\tilde{f}=ce^{-\xi}=ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

現在將 x 推廣爲 x^α

$$y'+x^\alpha y=0, \tag{3.7}$$

依樣畫葫蘆

$$y=f(\xi), \qquad \xi=\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \tag{3.8}$$

$$\frac{df}{d\xi}+f=0 \quad\Longrightarrow\quad y=f(\xi)=ce^{-\xi}=ce^{-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}},$$

$$(D+x^\alpha)y=0 \quad\Longleftrightarrow\quad D\left(ye^{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\right)=0.$$

同理可以考慮一階線性齊次微分方程

$$y'+p(x)y=0, \tag{3.9}$$

$$y=f(\xi), \qquad \xi=\int p(x)dx, \tag{3.10}$$

$$\frac{df}{d\xi}+f=0 \quad\Longrightarrow\quad y=f(\xi)=ce^{-\xi}=ce^{-\int p(x)dx},$$

$$\big(D+p(x)\big)y=0 \quad\Longleftrightarrow\quad D\big(ye^{\int p(x)dx}\big)=0.$$

積分因子 $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ 作用到函數 y 對應於將微分算子 $D+p$ 平移到 D。這個特徵在 Fourier 與 Laplace 變換也顯現出來。

四、積分因子與一階線性偏微分方程

要找一階常微分方程 (2.3) 的積分因子等價於解一階線性偏微分方程 (2.15)! 本質上偏微分方程 (2.15) 是遠比常微分方程 (2.3) 來的困難。但是在某些情形下是容易由 (2.15) 求解得出積分因子 μ。而根據 Lagrange 的理論這等價於特徵方程式

$$\frac{dx}{Q}=\frac{dy}{-P}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu}. \tag{4.1}$$

在某些情形下是容易由特徵方程式(4.1)得出積分因子 μ。在此我們考慮五種分別只與 x, y, xy, x/y, y/x 有關的特殊積分因子。

(1) 如果$\mu=\mu(x)$只與x有關, 由(4.1)考慮一、三 兩項

$$\frac{dx}{Q}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{Q}dx.$$

若 $R_1\equiv\dfrac{P_y-Q_x}{Q}$只與$x$有關, 則上式積分得

$$\mu(x)=\exp\int R_1(\xi)d\xi. \tag{4.2}$$

(2) 若$\mu=\mu(y)$只與y有關, 由(4.1)考慮二、三 兩項

$$\frac{dx}{-P}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{-P}dx.$$

顯然若$R_2\equiv\dfrac{P_y-Q_x}{-P}$只與$y$有關, 則上式積分得

$$\mu(y)=\exp\int R_2(\xi)d\xi. \tag{4.3}$$

(3) 如果 $\mu=\mu(xy)$ 只與 xy 有關, 根據 $d(xy)=xdy+ydx$, 可以在 (4.1) 一、二 兩項分別乘 y、x

$$\frac{ydx}{yQ}=\frac{xdy}{-xP}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu},$$

再由比例的性質得

$$\frac{ydx+xdy}{yQ-xP}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{P_y-Q_x}{yQ-xP}d(xy). \tag{4.4}$$

若 $R_3\equiv\dfrac{P_y-Q_x}{yQ-xP}$ 只與 xy 有關, 則上式積分得

$$\mu(xy)=\exp\int R_3(\xi)d\xi. \tag{4.5}$$

(4) 若 $\mu=\mu(x/y)$ 只與 x/y 有關, 根據

$$d\Big(\frac{x}{y}\Big)=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

可以在 (4.1) 一、二 兩項分別乘 y、x 再由比例的性質得

$$\frac{ydx}{yQ}=\frac{xdy}{-xP}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu} \quad\Longrightarrow\quad \frac{ydx-xdy}{yQ+xP}=\frac{d\mu}{(P_y-Q_x)\mu}, \tag{4.6}$$

因此

$$\frac{y^2(P_y - Q_x)}{yQ + xP} d\Big(\frac{x}{y}\Big) = \frac{d\mu}{\mu}.$$

若 $R_4 \equiv \dfrac{y^2(P_y - Q_x)}{yQ + xP}$ 只與 x/y 有關, 則上式積分得

$$\mu(x/y) = \exp\int R_4(\xi)d\xi. \tag{4.7}$$

(5) 如果 $\mu = \mu(y/x)$ 只與 y/x 有關, 根據

$$d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

仿 (4) 由比例的性質得

$$\frac{ydx}{yQ} = \frac{xdy}{-xP} = \frac{d\mu}{(P_y - Q_x)\mu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{xdy - ydx}{-(yQ + xP)} = \frac{d\mu}{(P_y - Q_x)\mu}, \tag{4.8}$$

因此

$$-\frac{x^2(P_y - Q_x)}{yQ + xP} d\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{d\mu}{\mu}.$$

若 $R_5 \equiv -\dfrac{x^2(P_y - Q_x)}{yQ + xP}$ 只與 y/x 有關, 則上式積分得

$$\mu(y/x) = \exp\int R_5(\xi)d\xi. \tag{4.9}$$

以上這些公式都不應該背, 而是根據正合 (exact) 的條件得 (2.15) 或 (4.1)。當然還會有其他形式的積分因子。

例題 4.1: 一階線性非齊次微分方程

$$L[y] = y' + p(x)y = q(x) \tag{4.10}$$

可以化爲 (2.3) 的微分形式 (differential form)

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0. \tag{4.11}$$

由特徵方程式 (4.1)

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{q(x) - p(x)y} = \frac{d\mu}{p(x)\mu},$$

顯然最簡單的情形是選取第一、第三兩項比較得

$$\mu'(x) = \frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{4.12}$$

這相當於 (4.10) 乘 μ

$$\mu y' + p(x)\mu y = \mu q(x). \tag{4.13}$$

然後我們期待 (4.13) 左邊是 μy 的微分 (就是全微分!)

$$\mu y' + p(x)\mu y = (\mu y)' = \mu y' + \mu' y. \tag{4.14}$$

所以 μ 滿足一階線性微分方程 (4.12)。有興趣也可以利用 (4.2) 來驗證這個結果。此時

$$P(x,y) = p(x)y - q(x), \qquad Q(x,y) = 1, \qquad R_1(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q} = p(x). \tag{4.15}$$

因此一階線性微分方程 (4.10) 一定存在只跟 x 有關的積分因子

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx};$$

積分因子並沒有唯一, 例如

$$\mu(x) = c_1 e^{\int p(x)dx}, \qquad c_1 \in \mathbb{R},$$

都是積分因子。正如固有 (特徵) 向量, 在實際的應用我們選取形式上最簡單的那個。有了積分因子而且只是x的函數, $\mu = \mu(x)$, (4.13) 成爲

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)q(x),$$

積分得

$$y = y_h + y_p = \frac{c}{\mu(x)} + \int_{x_0}^{x} \frac{\mu(s)}{\mu(x)} q(s)ds, \tag{4.16}$$

其中 y_h 是齊次解 (homogeneous solution);

$$L[y_h] = y_h' + p(x)y_h = 0. \tag{4.17}$$

值得一提的是積分因子 μ 正好是齊次解 y_h 的倒數, 而 μ 滿足 L 的伴隨方程

$$L^*[\mu] = \mu' - p(x)\mu = 0. \tag{4.18}$$

□

我們談一個積分因子之應用 — Gronwall 不等式, 這個不等式在微分方程 (包含 PDE) 有重要的應用。

定理 4.2: 已知 $a, u, v \geq 0$ 滿足不等式

$$u'(t) \leq au(t) + w(t)\,, \qquad \forall t \in [0,T], \tag{4.19}$$

其中 $u \in C^1[0,T], w \in C[0,T]$, 則

$$u(t) \le e^{at}\left(u(0) + \int_0^t |w(s)|\, ds\right). \tag{4.20}$$

證明: 將 (4.20) 寫爲

$$u'(t) - au(t) \le w(t),$$

兩邊同乘積分因子 $\mu = e^{-at}$

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{-at}\right) \le e^{-at}w(t),$$

積分得

$$u(t)e^{-at} - u(0) \le e^{-at}\left(u(0) + \int_0^t e^{-as}w(s)\, ds\right),$$

整理之後就是 Gronwall 不等式 (4.20)。 □

五、積分因子與對稱性

我們仍然從簡單的微分方程出發

$$y' = 2x \quad\Longrightarrow\quad \Phi(x,y) = y - x^2 = c. \tag{5.1}$$

簡單的量綱分析得

$$[y'] = [x] \quad\Longrightarrow\quad [y] = [x]^2.$$

由此自然可以引進尺度變換 (scaling)

$$x \to \hat{x} = \lambda x, \qquad y \to \hat{y} = \lambda^2 y, \qquad c \to \hat{c} = ??? \tag{5.2}$$

將 (5.2) 代入 (5.1) 的一般解得

$$c(\lambda) \equiv \hat{c} = \Phi(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y} - \hat{x}^2 = \lambda^2(y - x^2) = \lambda^2 c.$$

所以微分方程 (5.1) 經尺度變換

$$x \to \hat{x} = \lambda x, \qquad y \to \hat{y} = \lambda^2 y, \qquad c \to \hat{c} = \lambda^2 c \tag{5.3}$$

是不變的:

$$\hat{y}' = 2\hat{x} \quad\Longrightarrow\quad \Phi(\hat{x},\hat{y}) = \hat{y} - \hat{x}^2 = \hat{c}. \tag{5.1'}$$

透過對稱性得出積分因子就是 S. Lie 最開始的想法。令微分方程 (2.3) 之通解爲 $\Phi(x,y) = c$ 並且假設 $\mu(x,y)$ 是它的積分因子

$$d\Phi = \Phi_x dx + \Phi_y dy = \mu P dx + \mu Q dy = 0. \tag{5.4}$$

現在考慮更一般的尺度變換

$$x \to \hat{x} = \lambda x, \qquad y \to \hat{y} = \lambda^\beta y, \qquad 0 < \lambda < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

假設 (2.3) 在 (5.5) 這個變換下是不變的, 這相當於說其通解滿足

$$\Phi(x,y) = c \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\lambda x, \lambda^\beta y) = c(\lambda). \tag{5.6}$$

兩邊對 λ 微分 (這是全微分!)

$$\begin{aligned} c'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\Phi(\lambda x, \lambda^\beta y) \\ &= \frac{\partial\Phi(\lambda x, \lambda^\beta y)}{\partial(\lambda x)}\frac{d(\lambda x)}{d\lambda} + \frac{\partial\Phi(\lambda x, \lambda^\beta y)}{\partial(\lambda^\beta y)}\frac{d(\lambda^\beta y)}{d\lambda} \\ &= x\frac{\partial\Phi(\lambda x, \lambda^\beta y)}{\partial(\lambda x)} + \beta\lambda^{\beta-1}y\frac{\partial\Phi(\lambda x, \lambda^\beta y)}{\partial(\lambda^\beta y)}. \end{aligned}$$

令 $\lambda = 1$ (理由是 $\lambda = 1$ 時 $(\hat{x},\hat{y}) = (x,y)$) 並由 (5.4) 得

$$c'(1) = x\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} + \beta y\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = \mu x P + \mu\beta y Q.$$

可以假設 $c'(1) = 1$ 則在 (5.5) 這個變換下微分方程 (2.3) 之積分因子爲

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xP + \beta y Q}. \tag{5.7}$$

這個想法並沒有侷限在尺度變換可以推廣爲任意的變換。

在前言我們已經提到所謂 Lie 群, 是一種連續的變換群 (continuous transformation group)。更精確地說

定義 5.1: 已知集合 G 滿足

(1) G 是一個有限維流形 (manifold)

(2) G是一個群 (group)

(3) 乘法 $\mu : G \times G \mapsto G$, $(f,g) \mapsto fg$ 與反元素 $\tau : G \mapsto G$, $\tau(g) = g^{-1}$ 是平滑函數。

則稱 G 爲一 Lie 群。

以單位圓 $x^2+y^2=1$ 而言最明顯的對稱是旋轉

$$\Gamma_\varepsilon : (x,y) \mapsto (\hat{x},\hat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon), \qquad \varepsilon \in (-\pi,\pi]$$

或者表爲極座標

$$\Gamma_\varepsilon : (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto (\cos(\theta+\varepsilon), \sin(\theta+\varepsilon), \qquad \varepsilon \in (-\pi,\pi]$$

讀者可以容易驗證 $x^2+y^2=\hat{x}^2+\hat{y}^2=1$ 而且 $G=\{\Gamma_\varepsilon | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ 是一個 Lie 群。

定理 5.2: 假設微分方程 (2.3) 經由變換

$$(x,y) \mapsto (\hat{x}(s), \hat{y}(s)), \qquad (\hat{x}(0),\hat{y}(0)) = (x,y), \qquad 0 < s < \infty \tag{5.8}$$

是不變的則 (2.3) 的積分因子爲

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\xi P + \eta Q}, \tag{5.9}$$

其中

$$(\xi,\eta) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\hat{x}(s), \hat{y}(s)). \tag{5.10}$$

而偏微分算子

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.11}$$

則稱爲 Lie 群 (5.8) 之無窮小生成元 (infinitesimal generator) 或 Lie 代數。

證明: 假設 (2.3) 之通解可以表示爲 $\Phi(x,y)=c$ 而且變換 (5.8) 之通解爲

$$\Phi(\hat{x}(s),\hat{y}(s)) = \hat{c}(s),$$

所以

$$\frac{d}{ds}\Phi(\hat{x}(s),\hat{y}(s))\bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\hat{c}(s)\bigg|_{s=0} = \hat{c}'(0),$$

或

$$\xi\Phi_x(x,y) + \eta\Phi_y(x,y) = \mu(\xi P + \eta Q) = \hat{c}'(0) \equiv 1.$$

所以積分因子 μ 正是 (5.9)。 □

例題 5.3: 我們可以藉由 Lie 群的理論得出一階線性非齊次常微分方程 (4.10) 或 (4.11) 的積分因子爲 (4.12)

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

關於非齊次方程我們一定先考慮 (4.17), 這是基本常識! 令 y_h 是齊次解, 根據疊加原理 (就是線性!) 若 y 是線性非齊次常微分方程 (4.10) 的解則 $y+sy_h$ 也會是 (4.10) 的解, 也就是說 (4.10) 經由變換

$$(x,y)\mapsto(\hat{x}(s),\hat{y}(s))=(x,y+sy_h),\qquad 0<s<\infty \tag{5.12}$$

是不變的。此時

$$(\xi,\eta)=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}(\hat{x}(s),\hat{y}(s))=(0,y_h),$$

所以 (4.10) 的積分因子正是 (4.12)

$$\mu(x)=\frac{1}{\xi P+\eta Q}=\eta^{-1}=y_h^{-1}=e^{-\int p(x)dx}.$$

(5.12) 這個變換有事後孔明之嫌, 將 y_h 換爲任意的函數 $\theta(x)$

$$(x,y)\mapsto(\hat{x}(s),\hat{y}(s))=(x,y+s\theta(x)),\qquad 0<s<\infty, \tag{5.13}$$

我們期望這個變換使得 (4.10) 保持不變

$$\hat{y}'+p(\hat{x})\hat{y}=q(\hat{x})$$

或

$$y'+s\theta'+p(x)(y+s\theta)=(y'+p(x)y)+s(\theta'+p(x)\theta)=q(x),$$

所以 θ 一定是齊次方程的解:

$$\theta'+p(x)\theta=0\quad\Longrightarrow\quad\theta(x)=e^{-\int p(x)dx}=y_h(x).$$ □

我們看一個不是那麼明顯的例子

例題 5.4: 試解一階常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-y^2)}{x^2}. \tag{5.14}$$

解: 先將 (5.14) 表爲微分形式

$$y(y^2-x)dx+x^2dy=0. \tag{5.15}$$

常微分方程 (5.14) 或 (5.15) 的對稱群並不容易看出來, 但藉由量綱分析 (dimensional analysis)

$$\frac{[y]}{[x]}=\frac{[y][x]}{[x]^2}=\frac{[y]^3}{[x]^2}\quad\Longrightarrow\quad[x]=[y]^2$$

可以得到尺度變換群

$$(x, y) \to (\lambda x, \lambda^{1/2} y) = (e^s x, e^{s/2} y).$$

根據 (5.9) 微分方程 (5.14) 的積分因子爲

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP + \frac{1}{2}yQ} = \frac{1}{xy(y^2 - x) + \frac{1}{2}yx^2} = \frac{1}{xy^3 - \frac{1}{2}x^2 y}.$$

假設 $\Phi(x, y) = c$ 是通解則

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x^2 \mu(x, y) = \frac{x^2}{xy^3 - \frac{1}{2}x^2 y} = \frac{x^2}{xy(y^2 - \frac{1}{2}x)} = -\frac{2}{y} + \frac{2y}{y^2 - \frac{1}{2}x},$$

所以對 y 積分得

$$\Phi(x, y) = -2 \ln y + \ln\left(y^2 - \frac{1}{2}x\right) + f(x);$$

這裡 f 是任意 x 的函數。然後 Φ 對 x 取偏導數

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f'(x) - \frac{1}{2y^2 - x} = \mu(x, y) y(y^2 - x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2y^2 - x},$$

比較得

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \ln x + \ln A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

所以微分方程 (5.14) 的通解爲

$$\Phi(x, y) = \ln \frac{Ax(y^2 - \frac{1}{2}x)}{y^2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

六、可分離變數的本質

我們考慮齊次一階微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{6.1}$$

其中 P, Q 都是 k 次的齊次多項式

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y), \qquad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q(x, y). \tag{6.2}$$

因此微分方程 (6.1) 經尺度變換

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y) \tag{6.3}$$

是不變的。這告訴我們 x, y 具有相同的量綱 (dimension), 自然就引進新的變數

$$v = \frac{y}{x}, \qquad [v] = 1, \tag{6.4}$$

並將 (6.1) 改寫爲

$$P(x,vx)dx+Q(x,xv)d(vx)=0,$$

或

$$x^k\big[(P(1,v)+Q(1,v)v)dx+Q(1,v)xdv\big]=0, \tag{6.5}$$

也就是微分方程 (6.1) 是可分離變數的

$$\frac{dx}{x}+\frac{Q(1,v)}{P(1,v)+vQ(1,v)}dv=0, \tag{6.6}$$

或

$$du+\frac{Q(1,v)}{P(1,v)+vQ(1,v)}dv=0, \qquad u=\ln x. \tag{6.7}$$

如何解齊次一階微分方程 (6.1) 就轉化爲 (6.7) 如何積分的問題? 而且由 (6.5)–(6.6) 也可推得齊次一階微分方程 (6.1) 的積分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^k}\frac{1}{x(P(1,v)+Q(1,v)v)}=\frac{1}{xP+yQ}, \tag{6.8}$$

而且 (6.7) 也告訴我們自然的變數變換

$$(x,y)\mapsto(u,v)=\Big(\ln x,\frac{y}{x}\Big). \tag{6.9}$$

也因爲 (6.9) 的存在使得齊次一階微分方程 (6.1) 可以分離變數的原因。其內在本質是因爲對稱群的存在導致了微分方程的可積性。

例題 6.1: 已知一階常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=w(x,y) \tag{6.10}$$

經尺度變換

$$(x,y)\mapsto(\hat{x},\hat{y})=(\lambda x,\lambda^\beta y), \qquad 0<\lambda<\infty$$

是不變的, 也就是

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}}=w(\hat{x},\hat{y}) \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda^{\beta-1}\frac{dy}{dx}=w(\lambda x,\lambda^\beta y), \tag{6.11}$$

則微分方程 (6.10) 是可分離的。

解: 給定的尺度變換告訴我們 x,y 的量綱關係, $[y]=[x]^\beta$, 自然就引進新的 (無量綱) 變數

$$v=\frac{y}{x^\beta}, \qquad [v]=1, \tag{6.12}$$

並將 (6.10) 改寫爲

$$\frac{dv}{dx} = \frac{w(x, x^\beta v)}{x^\beta} - \beta\frac{v}{x}. \tag{6.13}$$

另一方面 (6.11) 兩邊對 λ 微分之後令 $\lambda = 1$ 得

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + \beta y\frac{\partial w}{\partial y} = (\beta - 1)\frac{dy}{dx} = (\beta - 1)w, \tag{6.14}$$

所以 w 滿足一階偏微分方程, 按 Lagrange 方法解這個偏微分方程等價於解常微分方程 (特徵方程式)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dw}{(\beta - 1)w}. \tag{6.15}$$

簡單的計算得

$$\frac{y}{x^\beta} = c_1, \qquad \frac{w}{x^{\beta-1}} = c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.16}$$

因此一般解爲 $F(c_1, c_2) = 0$, 再藉由隱函數定理表示爲

$$c_2 = f(c_1) \quad \Longrightarrow \quad w(x, y) = x^{\beta-1} f\big(\frac{y}{x^\beta}\big). \tag{6.17}$$

藉由 (6.17) 這個表現式可以將 (6.13) 改寫爲

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v)}{x} - \frac{\beta v}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - \beta v}. \tag{6.18}$$

因此微分方程 (6.10) 是可以分離的, 將 (6.18) 表爲

$$du = \frac{dv}{f(v) - \beta v} \qquad u = \ln|x|, \tag{6.19}$$

所以可分離的變數爲

$$(x, y) \mapsto (u, v) = \left(\ln|x|, \frac{y}{x^\beta}\right). \tag{6.20}$$

值得一提的是 (6.16) 的兩個參數 c_1, c_2 是無量綱的 (dimensionless)

$$[c_1] = \frac{[y]}{[x]^\beta} = 1, \qquad [w] = \left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{[y]}{[x]} = [x]^{\beta-1}, \qquad [c_2] = \left[\frac{w}{x^{\beta-1}}\right] = 1. \qquad \square$$

例題 6.2: 證明常微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}f(xy) \quad 或 \quad yf(xy)dx - xdy = 0 \tag{6.21}$$

是可分離的並求其解。

解: 首先對方程式做一下量綱分析

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]=\left[\frac{y}{x}\right][f(xy)]\quad\Longrightarrow\quad[f(xy)]=1\quad\Longrightarrow\quad[xy]=1,$$

所以尺度變換為

$$(x,y)\mapsto(\hat{x},\hat{y})=(\lambda x,\lambda^{-1}y)=(e^s x,e^{-s}y).$$

而其一次微分 (對應於無窮小生成元)

$$(\xi,\eta)=\frac{d}{ds}(e^s x,e^{-s}y)\Big|_{s=0}=(x,-y),$$

因此根據 (5.9) 積分因子為

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi P+\eta Q}=\frac{1}{xy(1+f(xy))}.$$

原方程式 (6.21) 改寫為

$$\frac{yf(xy)}{xy(1+f(xy))}dx-\frac{x}{xy(1+f(xy))}dy=0.$$

在此自然就會考慮變數變換 $v=xy$ 則上式成為

$$\frac{\frac{v}{x}f(v)}{v(1+f(v))}dx-\frac{x}{v(1+f(v))}\frac{xdv-vdx}{x^2}=0,$$

整理之後就是分離變數的形式

$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v(f(v)+1)}=0,$$

所以通解為

$$\ln|x|-\int\frac{dv}{v(f(v)+1)}=c,\qquad c\in\mathbb{R}.$$

當然可分離變數的變數變換為

$$(x,y)\mapsto(u,v)=(\ln|x|,xy).$$

另外仿齊次方程先考慮變數變換 $v=xy$ 並將 (6.21) 改寫為 x,v 的方程式

$$\frac{v(f(v)+1)}{x}dx-dv=0,$$

或

$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v(f(v)+1)}=0\quad\Longrightarrow\quad\ln|x|-\int\frac{dv}{v(f(v)+1)}=c,$$

這相當於說積分因子爲

$$\mu(x,y)=\frac{1}{v(f(v)+1)}=\frac{1}{xy(f(xy)+1)}. \qquad \square$$

例題 6.3: 非齊次線性一階常微分方程 (4.10)

$$y'+p(x)y=q(x)$$

是可分離的。

解: 利用積分因子將 (4.13) 改寫爲

$$d(yy_h^{-1})=q(x)y_h^{-1}dx,$$

則通解爲

$$\frac{y}{y_h}-\int\frac{q(x)}{y_h(x)}dx=c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

這等於說可分離變數的變數變換爲

$$(x,y)\mapsto\left(x,\frac{y}{y_h}\right). \qquad \square$$

例題 6.4: Riccati 方程

$$y'=xy^2-\frac{2y}{x}-\frac{1}{x^3}$$

是可分離的並求其解。

解: 首先對方程式做一下量綱分析得

$$\frac{[y]}{[x]}=[x][y]^2=\frac{[y]}{[x]}=\frac{1}{[x]^3} \quad\Longrightarrow\quad [y]=[x]^{-2}$$

所以尺度變換爲

$$(x,y)\mapsto(\hat{x},\hat{y})=(\lambda x,\lambda^{-2}y)=(e^sx,e^{-2s}y),$$

所以

$$(\xi,\eta)=\frac{d}{ds}(e^sx,e^{-2s}y)\bigg|_{s=0}=(x,-2y).$$

因此由 (5.9) 積分因子爲

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi P+\eta Q}=\frac{1}{x(xy^2-\frac{2y}{x}-\frac{1}{x^3})+2y}=\frac{x^2}{x^4y^2-1}.$$

Riccati方程改寫爲
$$\frac{dx}{x}-\frac{2xydx+x^2dy}{x^4y^2-1}=\frac{dx}{x}-\frac{d(x^2y)}{x^4y^2-1}=0.$$
所以考慮變數變換 $v=x^2y$ (實際上由量綱分析得 $[y][x]^2=1$ 就可以猜的到這個變數變換!) 則上式成爲分離變數的形式
$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{v^2-1}=0,$$
通解爲
$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|=c,\quad \text{或} \quad y=\frac{c+x^2}{x^2(c-x^2)}\qquad c\in\mathbb{R}.$$
當然可分離變數的變數變換爲
$$(x,y)\mapsto(u,v)=(\ln|x|,x^2y).$$ □

七、二階微分方程

正合與積分因子的觀念可以推廣至高階微分方程, 只是這時候比較複雜。給定線性二階微分算子
$$L[u]\equiv p(x)u''+q(x)u'+r(x)u, \tag{7.1}$$
如果 $L[u]$ 可以寫成一階微分算子的微分
$$L[u]=(pu'+fu)', \tag{7.2}$$
則稱 $L[u]$ 是正合。將 (7.2) 展開
$$L[u]=p(x)u''+q(x)u'+r(x)u=pu''+(p'+f)u'+f'u,$$
比較係數得
$$q=p'+f,\quad r=f'\quad\Longrightarrow\quad q=p'+f,\quad r=f'\quad\Longrightarrow\quad q'=p''+r.$$
因此若 $L[u]$ 是正合, 若且唯若係數 p,q,r 滿足
$$p''-q'+r=0. \tag{7.3}$$
如果 $L[u]$ 不是正合, 我們期望乘上函數 v 之後 $vL[u]$ 是正合: 也就是存在函數 b 使得
$$vL[u]=(vpu'+bu)'. \tag{7.4}$$
將 (7.4) 右邊展開並比較係數得
$$vr=b',\quad vq=(vp)'+b\quad\Longrightarrow\quad (vp)''-(vq)'+vr=0,$$
整理得

定理 7.1: $v(x)$ 是線性二階微分方程 $L[u]=0$ 的積分因子若且唯若 v 滿足 $L^*[v]=0$ 其中 L^* 是伴隨算子

$$L^*[v] \equiv (pv)'' - (qv)' + rv = pv'' + (2p'-q)v' + (p''-q'+r)v. \tag{7.5}$$

註解:

1. 從歷史的角度而言, 一個微分算子之伴隨算子的出現就是因爲想找到它的積分因子 (請參考 (4.18))。
2. 伴隨算子最容易 (自然) 理解的方式是引進內積, 由分部積分 (忽略邊界項) 得

$$\begin{aligned}\langle L[u], v\rangle &\equiv \int [p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u]vdx \\ &= \int u''(pv) + u'(qv) + ruvdx \\ &= \int u(pv)'' - u(qv)' + ruvdx \\ &= \int u[(pv)'' - (qv)' + rv]dx \equiv \langle u, L^*[v]\rangle.\end{aligned}$$

   所以 (7.5) 的一階微分 $(vq)'$ 之係數 -1 的意思是分部積分一次。
3. 關於伴隨算子我們提一下 Lagrange 等式

$$vL[u] - uL^*[v] = \frac{d}{dx}\Big[p(u'v - uv') - (p'-q)uv\Big], \tag{7.6}$$

   積分就是 Green 公式 (Green formula)

$$\int_a^b \big(vL[u] - uL^*[v]\big)dx = \frac{d}{dx}\Big[p(u'v - uv') - (p'-q)uv\Big]\Big|_a^b. \tag{7.7}$$

4. 如何找高階微分方程之積分因子? 其想法是 Leibniz 公式

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}, \qquad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{7.8}$$

   類比於二項式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k}.$$

   我們可以將 Leibniz 公式視爲微分的平移, 這也是我在第三節一直強調積分因子是微分之平移的緣由。

例題 7.2: 齊次線性二階微分方程

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0 \tag{7.9}$$

可以寫成 Liouville 標準式 (Liouville normal form)

$$u''+q(x)u=0, \tag{7.10}$$

其中

$$\begin{cases} u(x)=y(x)\exp\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int a(x)dx\right), \\ q(x)=b(x)-\dfrac{1}{4}a(x)^2-\dfrac{1}{2}a'(x). \end{cases} \tag{7.11}$$

解: 方程式 (7.9) 乘 μ 之後與 Leibniz 公式 (7.8) 做比較

$$\begin{aligned} \mu(y''+ay'+by)&=\mu y''+\mu ay'+\mu by=0, \\ (\mu y)''&=\mu y''+2\mu'y'+\mu''y. \end{aligned}$$

顯然 μ 必須滿足一階微分方程

$$\mu'=\frac{1}{2}a\mu \quad\Longrightarrow\quad \mu=\exp\left(\frac{1}{2}\int a(x)dx\right). \tag{7.12}$$

利用 μ 與其二階微分

$$\mu''=\frac{1}{4}a^2\mu+\frac{1}{2}a'\mu,$$

可以將 (7.9) 改寫爲

$$\mu(y''+a(x)y'+b(x)y)=(\mu y''+2\mu'y'+\mu''y)+(b-\mu'')y=0,$$

或

$$(\mu y)''+\left(b-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a'\right)(\mu y)=0,$$

這就是 Liouville 標準式 (7.10)。 □

註解:

1. (7.12) 中積分符號之前的係數 $\frac{1}{2}$ 是有意思的, 因爲我們考慮的是二階微分方程的積分因子。如果將 (7.9) 視爲 y' 的一階微分方程則積分因子爲

$$\mu(x)=\exp\left(\int a(x)dx\right), \tag{7.13}$$

此時 (7.9) 就成爲自伴隨形式 (請不要與 Liouville 標準式混淆!)

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{dy}{dx}\right)+\mu(x)b(x)y=0. \tag{7.14}$$

例題 7.4: Hooke 定律是力學基本定律之一。在彈性限度內, 彈簧的彈力 F 和彈簧的 位移 x 成正比,

$$F\propto x \quad\Longrightarrow\quad F=-kx;$$

這裡 k 是比例常數, 負號則是說明 F 是恢復力。因爲加速度 $a=\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 所以 Hooke 定律是一個二階線性微分方程

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{7.15}$$

雖然可以經由代換 $x(t)=e^{\lambda t}$ 得出一般解, 但是這個方法只能處理線性方程而且係數 m,k 是常數的情形。典型的方法是 (7.15) 乘 $\dot{x}$ (稱爲能量法, energy method)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=0, \tag{7.16}$$

由此得到能量守恆律 (其實就是 Hamilton-Jacobi 方程)

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=c, \qquad c\in\mathbb{R}. \tag{7.17}$$

這裡重要的是除了守恆律之外我們也將二階微分方程 (7.15) 降爲一階微分方程 (7.17), 只是多了一個積分參數 c, 所以就可以透過三角函數的積分技巧來積分。真正的事實是微積分的積分技巧並不是前面這些先賢們吃飽了撐著故意設計這種題目整人或表現自己高超的技巧, 而是在處理微分方程時自然出現的問題。這裡順便提一下理論物理學家 (我是跟 V. Zakharov 學到的) 喜歡把牛頓第二運動定律 (7.15) 表示爲

$$m\ddot{x}+\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=0; \tag{7.18}$$

這裡 $\frac{\delta}{\delta x}$ 是變分, 但我們姑且把它視爲微分。對 (7.18) 而言動能 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 固定是由加速度 $m\ddot{x}$ 來的, 第二項括弧內的 $\frac{1}{2}kx^2$ 就是位 (勢) 能。這個概念對於非線性方程也成立。回到 (7.16), 爲什麼要乘 $\dot{x}$ 呢? 這是有意義的。原方程式 (7.15) 經時間平移變換是不變的

$$(x,t)\mapsto(\hat{x},\hat{t}\,)=(x,t+s), \qquad 0<s<\infty, \tag{7.19}$$

則

$$\dot{x}(t)=\lim_{s\to0}\frac{\hat{x}-x}{s}=\lim_{s\to0}\frac{x(t+s)-x(t)}{s}. \tag{7.20}$$

這項稱爲時間平移變換之無窮小生成元, 正是方程式乘 $\dot{x}$ 的理由, 從而推導出對應之守恆律。由 Lie 群的角度而言 $\dot{x}$ 就是 (7.15) 的積分因子。 □

談二階微分方程如果不提 Riccati 方程[4]就是不完全的。

例題 7.5: 齊次線性二階微分方程 (7.9)

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

等價於 Riccati 方程

$$v' + v^2 + a(x)v' + b(x) = 0, \qquad v = \frac{y'}{y}. \tag{7.21}$$

如果 (7.9) 的一般解爲$y = c_1y_1 + c_2y_2$ 則 Riccati 方程 (7.21) 的解爲

$$v = \frac{c_1y_1' + c_2y_2'}{c_1y_1 + c_2y_2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.22}$$

解: 幾乎所有的書都是告訴我們令 $v = \frac{y'}{y}$ 然後直接計算得 (7.21)。這實在是不負責任的說法。事實上接近於 Bernoulli 方程的想法, (7.9) 除以 y

$$\frac{y''}{y} + a(x)\frac{y'}{y} + b(x) = 0,$$

由此自然會考慮變數變換

$$v = \frac{y'}{y} \quad \Longrightarrow \quad v' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{y''}{y} - v^2,$$

整理之後就是 (7.21)。 □

誌謝

本文是作者於 2009 年暑假在中研院數學所《數學名題及其故事》一系列演講之一, 在此特別謝謝李志豪教授的鼓勵與安排。

參考資料

1. G. Birkhoff, Hydrodynamics; a Study in Logic, Fact and Similitude, Princeton University Press, 1950.
2. G. W. Bluman and J. D. Cole, Similarty Methods for Differential Equations, Applied Mathematics Sciences, Vol. 13 , Springer-Verlag, 1974.

[4]看到這種拼寫方式就可以肯定是義大利人, Jacopo Riccati (1676∼1754) 是在 Johann Bernoulli (1667∼1748) 的建議下得出以他名字命名的 Riccati 方程, 所以要瞭解這個方程必須從 Bernoulli 方程著手。

作者之一的 J.D. Cole 正是 Burgers 方程之 Hopf-Cole transformation 的 Cole。該書分成常微分方程與偏微分方程兩部分, 雖然 1984 年我就買了這本書但因爲不懂也沒有動機, 再加上此書是舊的打字印刷讀起來很不舒服, 所以就一直束之高閣。直到去美國讀書學了量綱分析之後才開始閱讀其中的偏微分方程。Cole 是流體力學專家 (數學史告訴我們幾乎最好的應用數學家都與流體力學有關)。書中有不少流體力學的應用, 這是我個人最喜歡的一部分。關於印刷的問題是無法改變, 那麼就強迫自己慢慢地閱讀, 我保證妳 (你) 絕對會有收穫的。

3. Brian J. Cantwell, Introduction to Symmetry Analysis, (Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press, 2002.

一開始我以爲作者是 Stanford 大學數學系的教授, 經詢問連文璟教授才知道 Cantwell 是工學院的教授。後來與劉太平教授聊天時他提到 Stanford 大學的數學家是遍佈在學校各處並不侷限在數學系。我也曾聽說: 有人問麻省理工學院的人爲何 MIT 的工學院這麼強, 他們回答說 :「那是因爲他們有堅強的理學院」。的確, 一個只誇口他們的工學院有多強的學校怎麼可能是一個好的大學! 本書有一段關於群與對稱之歷史的前言, 對於 Abel, Galois 還有 Felix Klein, Sophus Lie 的故事有簡明的介紹。一個優秀的數學家對歷史絕對有一定程度的認識, 反之對數學史沒有興趣也沒有認識的人肯定不可能成爲好數學家。Cantell 教授在這本書的前言特別強調「我堅決相信任何科學與工程的研究所課程都需要將量綱分析與 Lie 群包含在內的廣泛基礎課, 尤其當許多未解的問題是強非線性時, 學生應該像熟悉 Fourier 分析一樣熟悉對稱分析。」關於這點我是強烈地贊同。

4. Lawrence Dresner, Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Pitman Advanced Pub. Program, 1983.

我是休假期間訪問亞伯達大學數學系 (University of Alberta, Canada) 在該系的圖書室找到此書的, 該書寫得非常直觀, 我很喜歡。這本書與 [2] 一樣的問題是舊的打字印刷, 所以只能慢慢地閱讀。我會建議邊讀邊作筆記內心想著要與人分享 (教別人啦! 施比受更有福!), 那麼我們讀書就會有動機而不僅僅是應付考試。

5. Peter E. Hydon, Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide, (Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press, 2000.

劍橋大學出版社這一套應用數學叢書的風格非常優雅簡練。這本書只利用 213 頁的篇幅就將微分方程的對稱方法做了非常友善且容易明瞭的介紹, 每一章的習題不多 (又不是參考書!) 但對於理解書本內容是重要的練習。幾年前 Texas A & M 大學的陳鞏教授曾在新竹清華大學上課用過這本書, 之後就沒有聽說有甚麼人再使用過, 我個人覺得非常可惜。其實此書很容易讀, 有興趣的同學可以找幾個死黨一個人負責一章, 一個學期就可以讀懂(不僅僅是讀完) 這本書。

6. N. Kh. Ibraglmov, Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie), *Russian Math. Survey*, 47, 89-156, 1992.
7. L. I. Sedov, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, 10th Edition, CRC Press, 1993.
8. John Starrett, Solving Differential Equations by Symmetry Group, *American Mathematical Monthly*, 114, 778-792, 2007.

閱讀是一輩子的事。除了教科書之外也應該在大學時就培養閱讀期刊的習慣。American Mathematical Monthly, 是一份相當合適大學部學生的期刊。如果妳 (你) 不知如何開始的話, 可以在心中設定一個主題例如: 微積分基本定理, Green 定理, 代數基本定理 $\cdots\cdots$。當妳 (你) 找到一篇文章之後可以往前查詢相關文獻, 讀懂之後就可以寫出自己的心得報告與批判 (讀書一定要有批判精神!)。

9. 林琦焜。從量綱看世界。數學傳播, 33(3), 13-27, 2009。
10. 林琦焜。最小作用量原理。數學傳播, 35(1), 15-28, 2010。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—