數學傳播 41卷2期, pp. 22-33

數學 — 簡單與高深*

席南華

本文原載《數理與人文》叢書, 取得作者及叢書編輯同意轉載, 謹此致謝。

— 數學傳播編輯部

席南華, 中國科學院院士, 中國科學院數學與系統科學研究院學術院長, 中國科學院大學副校長。研究代數群與量子群, 對仿射 A 型外爾群 (Affine Weyl group of type A) 證明了路茲梯格 (Lusztig) 關於雙邊胞腔的基環的猜想, 確定了德林 – 朗蘭茲關於仿射赫克代數的猜想 (Deligne-Langlands conjecture for affine Hecke algebras of type A) 成立的充要條件, 與路茲梯格合作發現典範左胞腔, 在量子群的表示和基的研究上開展了系統深入的工作。

我們常常喜歡瞭解數學的前沿, 那裡給人的印象都是高深的數學。其實, 前沿和高深的數學都是圍繞基本問題展開的。很多基本的問題都來自簡單的數學。這裡我想用一些例子說明簡單的數學其實與高深的數學有著密切的關係, 簡單的數學能說明我們認識一些高深和前沿數學的根基是什麼。

1. 排隊

學數學一般都開始於數 $1, 2, 3, 4, \ldots$, 然後有加法、減法等, 下面我們從數的排隊開始說起。在幼稚園裡孩子們首先要學會做的事情之一是排隊。這很合理, 因爲生活中很多時候都需要秩序。不過排隊卻是一個非常複雜的問題。比方說三個數 1, 2, 3 排隊就有 6 種可能。全中國的人放在一起排隊的排法是一個天文數字。排隊這件事情並不簡單, 裡面有著豐富的數學內容。而且, 特別有意思的是排隊之中有結構。要認識這個結構, 我們需要換一個角度來看排隊。排隊其實是一個映射, 可以看成是自身到自身的映射。比如說, 1, 2, 3 的一個排隊 231 的含義是第一個位置排 2, 第二個位置排 3, 第三個位置排 1, 所以排隊 231 可以看成從集合 $\{1, 2, 3\}$ 到自身的映射 $f_{231}: 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 1$。重新排隊就是兩個映射的合成, 是一種運算, 例如把 231

*本文根據作者的同名報告整理而成。

重新排回 123 可以看作是映射 f_{231} 與 f_{312} 的合成: $1 \to 2 \to 1, 2 \to 3 \to 2, 3 \to 1 \to 3$, 即 $f_{312} \circ f_{231} = f_{123}$。排隊中的這種運算有結合律, 在 $1, 2, 3$ 的六個排隊中, 123 有些特別, 它與其他任何一個排隊做合成運算還是那個排隊。當然, $1, 2, 3$ 的每一個排隊都可以經過一次重新排隊成爲 123。實際上我們已經接觸到了數學中一個極重要的概念 — 群, 1,2,3 的六個排隊在映射合成運算下成爲群, 稱爲三個數位或三個字母的對稱群。

一般說來, 集合 G 稱爲一個群, 如果它有一個二元運算, 滿足結合律, 有一個單位元, 每個元素都有逆元。即對集合 G 的任意兩個元素 $a, b \in G$, 在 G 中有相應的元素 $a \cdot b$; 結合律是指 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; 有一個單位元是指$G$中有一個元素 e, 使得對 G 中的任意元素 a, 有 $e \cdot a = a \cdot e = a$; 每個元素存在逆元是指對 G 中任意元素 a, 存在 G 中的元素 b 使得 $a \cdot b = b \cdot a = e$。

群很常見, 例子很多, 如整數集對於加法成爲群, 單位元是 0; 非零有理數全體對於乘法成爲群, 單位元是 1; n 階可逆實方陣對於矩陣乘法成爲群, 單位元是單位矩陣; $1, 2, \ldots, n$ 的排隊 (或排列) 有 $n!$ 個, 在映射合成下成爲群, 稱爲 n 個數位或文字的對稱群, 也稱爲置換群, 常記作 S_n。

一件意想不到的事情是對稱群和解多項式方程有極大的關係。

在歷史上解方程當然是很重要的事情。最簡單的多項式方程是一元一次方程, 現在小學生都會解。早在西元前 2000 年巴比倫人就會解一元二次方程, 現在是初中生要學的。一元三次方程和一元四次方程的根式解在 15、16 世紀時由義大利人發現[1], 不過相當複雜, 好像中學生並不要求掌握, 估計一般人也未必記得這些公式。接下來人們想得到更高次方程的根式解, 爲此事數學家忙了很長時間, 花了很大的力氣, 其中包括偉大的數學家 Lagrange, 但都失敗了。原來答案是否定的。1824 年, 挪威數學家 Abel 證明了五次和更高次的一元多項式方程一般沒有根式解[2]。這個結論有時也叫 Abel-Ruffini 定理, 因爲 Ruffini 在 1799 年幾乎證明了這個定理, 不過他的論證有漏洞。這個結果出乎人們意料。幾年後法國數學家 Galois 找到證明這個定理更好的方法, 實際上他的方法匯出了更徹底的結果: 給出了一元多項式方程何時有根式解的準則。Galois 發現一個方程的根的排列關係是非常重要的。在這裡他引出了群的概念, 對每一個一元多項式, 有相應的群。一個方程有根式解當且僅當這個群可解。Galois 發現對次數爲 n 的一般多項式, 相應的群是我們剛才提到的對稱群 S_n, 而當 n 大於等於 5 時, 這個對稱群是不可解的。正是這個不可解性導致了方程的根式不可解。我們剛才所討論的結論一部分可以表述如下:

定理: (1) 如果 $n \geq 5$, 則 n 個文字的對稱群 S_n 不可解 (Galois)。(2) 五次或更高次的一元多項式方程一般沒有根式解 (Abel-Ruffini)。

[1]在三次方程的求解史上, 我國唐代初期的數學家王孝通的工作有重要地位, 其著作《缉古算經》建立並求解了二十多個一元三次方程。(作者感謝本文的審稿者指出這個史實, 對於其他的建議如增加一些文獻等在此一並致謝。

[2]N.-H. Abel, Mémoire sur les équations algébriques oú on démontre l'impossibilité de la résolurion de l'équation générale du cinquième degré. Christiania: Groendahl, 1824, 7 pages.

Galois 的工作影響是非常深遠的, 群論由此誕生, 成爲數學的一個重要分支, 深深地影響了以後的數學發展。Galois 是才華橫溢的數學家, 在 20 歲那年跟人決鬥, 不幸英年早逝, 給數學的發展帶來巨大的損失。有些證據讓人推測 Galois 的決鬥與其情人有關, 所以你們如果哪天失戀的話, 千萬要記著, 冷靜, 不然數學的事業會受到很大的損失。Abel 的命運也是比較悲慘的, 他貧困交加, 雖然非常有才華, 但是在 27 歲時就因病去世了。數學裡有很多以 Abel 命名的重要物件, 如 Abel 群、Abel 簇、Abel 範疇、Abel 函數等。挪威在 2002 年設立了 Abel 數學獎以紀念這位偉大的數學家, 每年獎勵一兩位數學家, 獎金高達約一百萬美元。

在當今社會數學家的命運要好得多[3], 生活沒有什麼風險, 收入也非常穩定[4], 雖然不會成爲富豪, 但是會非常愉快, 能做自己喜歡的事情, 在其他國家有很多朋友和同行, 有很多時間旅行, 也不用帶什麼實驗設備, 不過別忘了帶著你的愛人, 不然你會寂寞的。

前面定理中的對稱群 S_n 是作爲一個一元 n 次方程的 Galois 群出現的, 從而群的不可解性導致相應的方程沒有根式解。Galois 群是數學裡非常重要的概念。我們對這一點要多說幾句。把所有一元整係數多項式的根全部拿來放到一起, 這就構成一個集合, 一般記作 $\bar{\mathbb{Q}}$, 顯然它包含有理數集。集合 $\bar{\mathbb{Q}}$ 中的非零數的逆在這個集合中, 任意兩個數的和、差、積還在這個集合中, 所以是一個域, 稱爲有理數域的代數閉包。在中學我們學過多項式函數、指數函數、三角函數、對數函數等。這裡我們考慮域 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上一些特別但又自然的函數 $f:\bar{\mathbb{Q}}\to\bar{\mathbb{Q}}$, 它們保持加法和乘法, 即有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b),\quad f(1)=1.$$

所有這種函數的全體一般記作 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, 稱爲有理數域的絕對 Galois 群, 是代數數論研究的中心物件之一, 很多重要的工作和這個群都有關係, 如在 20 世紀末 Wiles 對 Fermat 大定理的著名證明中起著關鍵的作用, 也還有很多未解決的重要問題, 如 Langlands 綱領中的一些問題, 著名的 hafarevich 猜想等。這是由簡單數學匯出來的一些高深的數學。

2. 計數

數字的出現無疑與計數有關。計數有時很簡單, 比如集合 {甲, 乙, 丙} 含有三個元素, n 個數 $1,2,\ldots,n$ 的排列數是 $n!$; 有時很不容易, 如一個國家的人口數很難得到準確的值。計數是組合數學研究的問題。不管怎麼說, 對有限集, 理論上計數是件簡單的事情, 一個一個數就行了。但對無限集事情就比較麻煩, 比如有理數和無理數誰多呢? 如果你有一個面積無限的王國, 增加或損失幾百萬平方千米的國土對你都無所謂。或許你們讀過伽莫夫的科普作品《從一到無

[3] Sarah E. Needleman, Doing the Math to Find the Good Jobs-Mathematicians Land Top Spot in New Ranking of Best and Worst Occupations in the U.S., *The Wall Street Journal*, January 6, 2009.

[4] 在 http://www.careercast.com/jobs-rated/jobs-rated-2009-comprehensive-ranking-200-different-jobs 上可以看到美國 2009 年的職業排行, 並提供了下一年的職業排行連接。

窮大》, 從中可以知道如果一個旅店有無窮多間客房, 哪怕住滿了客人, 仍能安排一個新來的客人: 把原來住 1 號房的客人換到 2 號房, 住 2 號房的客人換到 3 號房, $\cdots\cdots$, 這樣 1 號房就可以空出來給新來的客人住了。如果一個旅店的客房數有限, 這樣的事情就辦不到了。這些事實表明有限的世界和無限的世界有本質的不同。

怎樣比較無限的集合呢? 我們不能像有限集那樣斤斤計較多一個元素少一個元素, 那不是無限的本質。德國數學家 Cantor 找到了比較無限集大小的辦法, 建立了集合論。Cantor 利用映射來比較集合的多少, 這個辦法對有限集和無限集都管用。Cantor 利用一一映射建立了等勢的概念。一個從集合 A 到集合 B 的映射稱爲一一映射, 如果它把不同的元素映到不同的元素, 並且 B 裡的每個元素都有 A 裡的元素映過來。兩個集合稱爲等勢, 如果它們之間有一一映射。兩個有限集等勢的充要條件是它們所含的元素的個數一樣。對無限集, 等勢是個有趣的概念, 準確把握了無限的本質, 忽略了次要的因素。等勢的集合只是表明兩者勢力相當, 猶如兵來將擋、水來土掩, 不表明兩者有一樣多的元素。實際上一個無限集可以和它的子集等勢, 如整數集和自然數集等勢, 它們之間的一一映射可以構造如下: 0 映到 0, 負整數 a 映到正奇數 $2|a|-1$, 正整數 a 映到正偶數 $2a$。與自然數集或它的子集等勢的集合稱爲可數集。這是一個容易理解的概念。下面這個很有意思的結果是 Cantor 證明的。

定理 (Cantor, 1874): (1) 有理數集是可數集。(2) 有理數域的代數閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ 是可數集。(3) 實數集不是可數集。

1877 年, 在一封給 Dedekind 的信中 Cantor 還證明了單位線段中的點集和 n 維空間的所有點集等勢, 特別是實數和複數等勢。我們來看一下這個定理的一些含義。有理數顯然比自然數多得多, 但居然是可數的, 數的時候要小心, 不然會數得亂糟糟。下面給出一種數的辦法, 每個非零有理數都可以寫成兩個整數 a 和 b 的商 a/b, 其中 a 和 b 沒有大於 1 的公因數。於是有理數可以先按 a 和 b 的絕對值的和的大小分成若干部分排序, 每一部分再數, 所以一種數法是:

$$0, 1, -1, 1/2, 2, -1/2, -2, 1/3, 3, -1/3, -3,$$
$$1/4, 2/3, 3/2, 4, -1/4, -2/3, -3/2, -4, \ldots.$$

有理數的代數閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ 中的數無疑比有理數多得多, 居然也是可數的, 這很容易讓人感到驚訝。想想看, 對每一個正的有理數 a, 都能通過開方衍生出無限個無理數, 即無窮數列 $a, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, \ldots, a^{\frac{1}{n}}, \ldots$ 中除有限個外都是無理數。這有點像現實世界, 每一件合理的事情都有無限個不合理的事情相伴, 一個結論就是現實世界中無理和不公平的事情總比有理和公平的事情多。

一個複數稱爲代數數, 如果它是某個整係數的一元多項式的根, 否則稱爲超越數。斷言某個數是超越數遠非易事, 實際上, 直到 1844 年才由 Liouville 證明了超越數的存在性, 1851

年他給出了首批超越數, 其中一個是 $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$。最重要的超越數可能是圓周率 π 和 Euler 數 $e=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$, π 的超越性由 Lindeman 於 1882 年證明, e 的超越性由 Hermite 於 1873年證明。

上面定理的 (2) 和 (3) 表明超越數不僅存在, 而且比代數數多得多, 不在一個量級上, 雖然這個定理沒有指出一個超越數。這很有意思, 它顯示了等勢這個概念的威力, 告訴我們恰當的概念能深刻揭示事情的本質, 引導我們前行。

Cantor 建立的集合論已成爲現代數學的基礎。德國人在 19 世紀和 20 世紀初爲數學和物理學做出巨大的貢獻, 在概念和思維方式上都有很多的突破。也許德國深刻的哲學起了很大的作用, 有時間看一看 Leibniz、Kant 等人的哲學著作是很有益處的。

上面的定理引出一個很自然的問題: 在自然數全體和實數全體中, 有沒有一個集合, 它既不可數 (即不與自然數集等勢), 也不與實數集等勢。1878 年 Cantor 提出了連續統假設: 這樣的集合不存在, 也就是說, 不存在一個集合, 它的勢比自然數集的勢大, 但比實數集的勢小, 猶如在 1 和 2 之間不存在整數。存在或不存在之類的問題對數學而言常常是很重要的, 雖然可能不會像莎士比亞的戲劇《哈姆雷特》中的 “to be or not to be”那麼重要。連續統假設是那麼自然的一個問題, 很能吸引我們的好奇心。1900 年, 在巴黎舉行的國際數學家大會上, Hilbert 提出了著名的 23 個未解決的數學問題, 連續統假設排在第一個。

Gödel, 偉大的奧地利數理邏輯學家, 在 1940 年證明了連續統假設與我們平常用的公理體系是沒有矛盾的, 即連續統假設與 Zermelo-Fraenkel 集合論無矛盾。沒有矛盾, 並不意味著它是對的。1963 年 Cohen 建立了強有力的方法 — 力迫法, 用這個方法他證明了連續統假設之否與我們平常用的公理體系也是沒有矛盾的, 即連續統假設之否與 Zermelo-Fraenkel 集合論無矛盾。也就是說, 在我們常用的公理體系中, 加入這個假設不會產生矛盾; 加入這個假設之否, 也不會產生矛盾。這顯然出乎常人的意料, 一個重要而又自然的問題, 竟在我們常用的公理體系裡沒法斷定真假, 就像我們生活裡聽到的一句話: 說你行也行, 說你不行也行。看上去, 連續統假設似乎已經弄明白了, 但其實對這個問題的思考一直在延續, 產生很多深刻的數學。Woodin 的工作表明連續統假設是錯的也許更合理, 當然這裡面有很多的條件, 這些條件說出來過於專業, 這裡就不說了。我們可以把連續統假設和平面幾何的平行公理比較, 對平行公理的思索和研究導致了雙曲幾何等非歐幾何的產生, Riemann 幾何是非歐幾何的一種, 是廣義相對論的數學框架, 所以對簡單的好問題的不斷思索常常把我們帶到很深刻的數學新天地。

Cohen 因在連續統假設上的工作獲得 1966 年的菲爾茲獎。他原來是分析數學的專家, 在其中做出過重要貢獻, 於 1964 年獲分析數學中的 Bocher 獎。有一個傳言說 Cohen 在完成了對連續統假設的工作後覺得數學中的問題只有 Riemann 假設值得他去研究, 有點像古詩「曾

經滄海難爲水」所描述的那樣。

Gödel 對數理邏輯的貢獻巨大。邏輯推理是數學的一個基礎工具, 在古代是哲學的一部分, 對形式邏輯的系統研究應該始於古希臘的亞里斯多德, Euclid 的《幾何原本》是使用形式邏輯組織數學理論的典範。從古到今, 哲學家和數學家一直在探索邏輯的本質和它的方方面面, 有很多人的工作非常傑出, 如 Leibniz、Frege、Russell 等。Leibniz 可能還是迄今爲止最出色的符號大師, 他引進了很多特別好的符號, 如微分符號 $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ 等。對數學來說, 引進恰當的符號是很重要的, 符號是表示內容的一種形式, 形式要爲內容服務, 所以必須與內容相符。如果沒有很好的形式的話, 很多內容是沒辦法恰當地表示出來的。很多時候你不要忽略形式的價值。

我們一般都相信在數學中一個陳述的真假性一定可以被證明, 對邏輯本身充滿了信心, 對說明事情的明確性常有這樣的表達「邏輯上無懈可擊」。但邏輯本身遠非像常人所想的那樣簡單和無往不利, 有時讓人感到不太踏實, 前面連續統假設的研究就是一個例子, 其實在此之前 Gödel 的兩個不完備性定理給數學基礎帶來巨大的危機, 宣告了 Frege、Russell、Hilbert 等人尋找對數學足夠用的公理系統的努力是不會成功的, 儘管 Hilbert 曾經非常樂觀地認爲「我們必須知道, 我們將會知道」(“Wir müssen wissen. Wir werden wissen”, 1930)。Gödel 的兩個不完備性定理可以表述如下:

定理 (Gödel, 1931): 一個無矛盾的公理化理論如果包含算術公理體系, 那麼在這個理論中存在一個陳述句, 其真假不能在這個理論中判斷。

定理 (Gödel, 1931): 一個公理化理論如果包含算術公理體系, 當它無矛盾時, 其無矛盾性不能由這個理論自身證明。

這兩個定理和我們生活中的一些感受十分類似, 有些事情沒法說清真假 (法庭上這類事情最好少發生), 一個人常常無法自證清白, 需要他人的說明才行。Gödel的不完備定理和其他工作不僅在數學上產生巨大的影響, 在哲學上亦是如此。一本有名的書《GEB — 一條永恆的金帶》(*Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Douglas R Hofstadter, 1979) 向人們展示了不完備定理、埃舍爾的繪畫、巴赫的音樂之間的奇妙聯繫。不完備定理還提示我們, 人類認識的能力可以走到哪裡在邏輯上很難找到一個確切的答案, 但對這個問題的探討, 會幫助我們更進一步認知我們的邏輯能到達的範圍。數理邏輯與電腦科學有密切的關係。理論電腦科學最有名的一個問題就是 P 和 NP 問題, 這個問題是克雷數學研究所的千禧年問題之一, 誰能解決這個問題就能獲得一百萬美元的獎金。這個問題的表述有多種, 最容易明白的可能是下面這個。

P 和 **NP**: 設 A 是有限集, 由一些整數組成, 用 S_A 表示 A 中所有數的和。問題: 能否找到多項式時間的演算法以確定是否存在 A 的子集 B 使得 $S_B = 0$?

到目前爲止數學家和理論電腦專家對這個問題還沒什麼辦法, 一部分專家傾向於答案是肯定的, 更多的專家傾向於答案是否定的, 還有一部分專家傾向於這個問題可能在現有的框架下是無法確定對與錯的, 猶如連續統假設一樣。如果 P 和 NP 的答案是肯定的, 那表明世界上現在用的密碼絕大多數在理論上是容易破解的, 這對很多行業如通信業、銀行業等來講是個災難。

3. 方程

我們前面從數的排除講到解方程, 從計數講到連續統假設、P 和 NP 問題, 現在我們回到解方程。二元一次和三元一次方程組是在初中學習的內容, 能輕而易舉地解決一些趣味的民間數學問題, 如有一百個和尚, 吃一百個饅頭, 一個大和尚吃三個饅頭, 三個小和尚吃一個饅頭, 問共有大和尚多少人, 小和尚多少人? 消元法是解線性方程組的有效方法, 如果未知元很多, 也是很麻煩的事情, 矩陣理論應運而生。在我國古代的數學著作《九章算術》裡已經開始使用矩陣解線性方程組了, 其中也出現了行列式。矩陣 (matrix) 這個術語是 Sylvester 在 1850 年創立的, 作爲系統的理論出現可能是 1858 年 Cayley 的工作 "Memoir on the theory of matrices"。想法簡單樸素, 就是把方程組的係數按行和列排在一起。

高等代數裡有矩陣理論, 你們在學習的時候肯定很喜歡對角矩陣, 因爲它們的計算容易, 特徵值一目了然。還有兩類矩陣你們也會覺得好對付, 一類是特徵值都是 1 的方陣, 稱爲幺冪矩陣; 另一類是特徵值都是 0 的方陣, 稱爲冪零矩陣, 因爲它們的某個冪是零矩陣。這三類矩陣很簡單, Jordan 定理告訴我們, 它們對認識一般的方陣非常有用, 數學常常就是這樣, 用簡單的物件把握複雜的物件。

定理 (Jordan **分解**): 設 A 是方陣, 則 (1) 存在唯一的可對角化方陣 S 和冪零方陣 N, 使得 $A=S+N$ 且 $SN=NS$。(2) 如果 A 可逆, 存在唯一的可對角化方陣 S 和特徵根全爲 1 的方陣 U, 使得 $A=SU=US$。

Jordan 分解在代數群和李代數中十分重要。還有一類很簡單的矩陣, 稱爲置換矩陣, 它們的每一行每一列都只有一個非零元, 而且那個非零元等於 1。置換矩陣與我們前面說的排隊 (對數而言更常用的說法是排列) 密切相關。設 $\sigma=i_1i_2\cdots i_n$ 是 $12\cdots n$ 的一個排列, 命 $\xi_\sigma=(a_{rs})_{1\le r,s\le n}$, 其中

$$a_{rs}=\begin{cases}1, & \text{如果 } s=i_r,\\ 0, & \text{否則,}\end{cases}$$

即對每個 $1\le i\le n$, 矩陣 ξ_σ 的第 i 行僅在第 i_r 處爲 1, 其餘位置都是 0。所有的置換矩陣都可以這樣得到。置換矩陣在矩陣研究中也是很有用的。

定理: $G = \bigcup_{\sigma \in S_n} B\xi_\sigma B$, 其中 G 是 n 階可逆方陣全體, B 是 n 階可逆上三角方陣全體。

這個分解稱爲 Bruhat 分解, 對一般的簡約代數群也成立, 最早出現在 Gelfand 和 Naimark 於 1950 年出版的書中[5], Bruhat 在 1954 年宣佈這個分解對複數域上的半單群成立[6], 1955 年 Chevalley 證明它對任意代數閉域上的簡約群成立[7], Borel 和 Tits 在 1965 年考慮了任意域上的情形[8]。這個分解把很多問題歸結到置換群或 Weyl 群的情形, 對研究代數群的結構和表示都十分重要, 與拓樸和代數幾何中的旗流形的聯繫十分有意思。

假設 V 是 n 維複線性空間, 所有如下形式的子空間鏈:

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i$$

構成的集合有一個很好的幾何結構, 稱爲旗流形 (flag manifold), 記作$\mathcal{B}$。容易看出, $\mathcal{B}$ 可以等同於 B 在 G 中的左陪集全體 G/B。這樣一來, B 在 $B\xi_\sigma B$ 中的左陪集全體 $B\xi_\sigma B/B = \mathcal{B}_\sigma$ 就可以看作是 $\mathcal{B}$ 的子流形, 稱爲 Schubert 胞腔, 它同胚於一個線性空間。Schubert 胞腔在旗流形中的閉包稱爲 Schubert 簇, 這些簇一般都有奇點, 20 世紀 80 年代發現這些奇點的性質和李代數的表示有出人意料的深刻聯繫, 啟示了後面很多的發展。

一個域上的 n 階冪零方陣全體 $\mathcal{N}$ 也構成有奇點的代數簇, 看一下 $n = 2$ 的情形就能明白這一點: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 冪零當且僅當

$$\begin{aligned} a^2 + bc = 0, &\quad ab + bd = 0, \\ ca + dc = 0, &\quad cb + d^2 = 0. \end{aligned}$$

這些方程都是二次齊性的, 所以在零矩陣處的偏導數都是0, 就是說沒有切面, 所以零矩陣是奇點。代數幾何學家對奇點的解消是非常感興趣的。1964 年廣中平佑證明了複數域上的代數簇的奇點都可以解消, 爲此他獲得 1970 年的菲爾茲獎。對簇 $\mathcal{N}$ 荷蘭數學家 Springer 找到一個很有意思的解消, 那就是旗流形的餘切叢。這個解消現在稱爲 Springer 解消, 其纖維稱爲 Springer 纖維, 與 Weyl 群的表示、Hecke 代數的表示、相交上同調群等都有深刻的聯繫。Springer 在代數群領域有很多重要的貢獻, 一直保持著旺盛的研究精力, 在 80 歲時還被邀請到國際數學家大會做 45 分鐘報告。他風度優雅, 曾在 1986 年訪問過中國。1988 年 Kazhdan 和 Lusztig 定義了仿射 Springer 纖維[9], 被吳寶珠用於基本引理的證明, 吳寶珠因爲證明了基

[5] I. M. Gelfand and M. A. Naimark, Unitarnye predstavleniya klassiceskih grupp, Trudy Mat. Inst. Steklov, Vol. 36, Moscow, 1950.

[6] F. Bruhat, Representations induites des groupes de Lie semisimples complexes, Comptes Rendues Acad. Sci. Paris 238 (1954), 437-439.

[7] C. Chevalley, Sur certains groups simples, Tohoku Math. J. 7 (1955), 14-66.

[8] A. Borel and J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. IHES 27 (1965), 55-152.

[9] D. Kazhdan and G. Lusztig, Fixed point varieties on affine flag manifolds, Israel J. Math. 62 (1988), 129-168.

本引理獲得 2010 年的菲爾茲獎。

前面談了一元高次方程, 也談了多元一次方程, 現在看一看不定方程。簡單的應是整係數方程, 一般稱作丟番圖方程。最常見的一個方程可能是

$$x^2+y^2=z^2.$$

我們知道這個方程跟圓有關係, 一個有趣的問題是方程的整數解。畢氏定理的一個特例勾 3 股 4 弦 5 給出了一個整數解。一般解的公式也很容易給出:

$$x=2uv,\quad y=u^2-v^2,\quad z=u^2+v^2,$$

其中, u,v是整數。(x與y可以互換。)

自然, 要考慮高次的情形, 就是 Fermat 方程 (其中 $n\geq 3$)

$$x^n+y^n=z^n.$$

Fermat 研究這個方程, 認爲沒有平凡的整數解, 即如果 x,y,z 是整數解, 則一定有 $xyz=0$。他對 $n=4$ 的情形證明了這個結論, 對一般的情形, 他在一本書的邊頁上寫到「我找到了一個奇妙的證明, 但空白太窄, 無法寫下」。人們以後一直嘗試找到 Fermat 的證明, 不過都失敗了。Euler 則證明了 $n=3$ 時, Fermat 方程無平凡整數解。Fermat 方程的研究對數論的發展影響很大, 實際上, 代數數論就是這樣誕生的。德國曾經爲這個問題設立一個獎, 十萬馬克。Hilbert — 當時非常偉大的數學家 — 被人問到爲什麼不去解決這個問題, 他的回答很有意思: 這是一個會下金蛋的雞。現在代數數論是非常主流的分支, 與代數幾何、李群表示論聯繫密切。

Fermat 方程的問題最後在 1995 年被 Wiles 解決, 他證明了方程無平凡整數解。這是 20 世紀一項偉大的數學成就, 他獲得了那十萬馬克 (時值五萬美元)。Wiles 年輕的時候就很有名, 在普林斯頓大學任教授。他對這個問題做了多年的探索, 有一天, 他感到自己能解決這個問題, 潛心研究七年, 終於取得成功。期間他沒有發表什麼論文。這種潛心研究的情況在中國的現狀與學術環境中是很難出現的。

一元高次方程、多元一次方程、一個特殊的不定方程 — Fermat 方程已經引出非常深刻的數學, 而且很不容易, 那對解一般的多項式方程組, 困難之大是顯而易見的。笛卡兒的一個偉大貢獻是把方程和幾何聯繫起來。我們有一些很簡單的例子, 像二元一次方程是直線, 三元一次方程是平面, 二元二次方程是圓錐曲線, 等等。代數幾何就是研究多元多項式方程組的零點的集合對應的幾何圖形是什麼。

代數幾何方向產生過許多非常偉大的數學家, 很多人因爲這個方向的工作獲得菲爾茲獎, 如格羅登迪克、曼福德、德林、森重文等。代數幾何現在不僅自身充滿活力, 而且在數論、表示

論、數學物理等方向都有非常深刻的應用。2010 年獲菲爾茲獎的工作「基本引理」的證明中代數幾何是至關重要的。

4. 形

我們熟悉的簡單的形有線段、三角形、正方形、圓、球、環面、四面體、正方體等。這裡我們首要關心的是一些幾何的度量和性質, 如長度、面積、體積、曲直、彎曲程度、切線、光滑性等。

對於長度, 我們通常認爲: 兩點之間直線距離最短。但一個幾何圖形兩點之間一般沒有直線, 如地球表面的兩點之間沒有直線可走。所以一般而言怎樣找到兩點之間最短的長度是一個複雜的問題。

求切線和加速度導致了數學裡微分的概念, 而求長度和面積等這些需要, 產生了積分。微積分的產生改變了數學的整個面貌。後來在 Euler 等人的工作下, 以微積分爲基礎的數學領域 — 分析學產生了。從此, 數學三分天下: 代數、幾何、分析, 這和古代的三國類似。三國的演變是最後魏國把其他兩國給滅了, 但代數、幾何與分析不會如此, 倒是各自發展的同時有日趨深入交叉。

一些簡單的幾何發現最後可以引到神奇的數學世界。對於多邊形, 簡單地數一下, 就會發現, 頂點數等於它的邊數。對於凸多面體, Euler 發現頂點數減去棱數加上面數等於 2, 比如, 四面體有四個面、四個頂點、六條棱, $4-6+4=2$。這個公式常稱爲 Euler 公式, 其實之前已經有人知道, 只是不公平的事經常會發生, Euler 的名氣大, 人們就把這個公式歸於他的名下了。剛才出現的數字 2 其實是這些凸多面體的 Euler 示性數, 有多種解釋。先做一件簡單的事情, 就是把多面體的棱角給磨平, 這個過程好像人進入社會中, 社會會把你的棱角磨平。這就得到一個光滑的曲面。對於任一光滑的曲面, 有一個反映它彎曲程度的重要度量 κ, 稱爲 Gauss 曲率, 還有一個面積元 $\mathrm{d}s$。對剛才通過磨平多面體棱角得到的曲面 M, 給 Gauss 曲率做積分就得到 2, 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \kappa \mathrm{d}s = 2,$$

這是 Euler 公式的一個本質。對於一般的閉曲面, 有類似的公式, 稱爲 Gauss-Bonnet 公式,

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \kappa \mathrm{d}s = 2-2g,$$

其中 g 是曲面的虧格。就是說 Gauss 曲率積分後, 等於 $2-2g$, 這是曲面的 Euler 示性數。Euler 示性數還可以通過上同調群定義。對高維的流形, 也有 Gauss-Bonnet 公式。陳省身對高維 Gauss-Bonnet 公式的證明是一個劃時代的工作, 揭開了整體微分幾何的新篇章。可能一般人難以想到, 對凸多面體做的一點簡單算術, 背後會有那麼多的高深數學。

我們看一下剛才說到的虧格, 這是一個重要的幾何量, 在曲面的情形, 直觀的意義就是閉曲面所圍的洞的個數, 如像汽車輪胎那樣的環面, 虧格就是1, 因爲這個曲面圍了一個洞。把球面接上 n 個手柄, 就得到虧格爲 g 的閉曲面。本質上, 這是唯一的虧格爲 g 的可定向閉曲面, 就是說對可定向閉曲面而言, 虧格可以用來分類, 用數學的語言表述就是:

定理: 虧格爲 g 的可定向閉曲面同胚於球面接上 n 個手柄。

在曲面的情形, 虧格等於零意味著是球面。球面在拓樸學中是極其重要的, n 維的球面由下面的方程定義:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=a^2.$$

關於球面最有名的問題是 Poincaré 猜想: 單連通的三維閉流形同胚於三維球面。這個問題對拓樸學的發展影響巨大, 產生了三個菲爾茲獎。由於問題太難, 剛開始, 人們考慮高維的 Poincaré 猜想。在高維的情形, 空間維度大, 所以工具多。1961 年 Smale 證明了當維數爲 5 或更大時, Poincaré 猜想成立[10], 他因此獲得 1966 年的菲爾茲獎。1982 年 Freedman 對四維流形證明了 Poincaré 猜想[11], 他因此四年後獲得菲爾茲獎。原本的 Poincaré 猜想直到 2003 年才由佩雷爾曼解決, 他因此獲得 2006 年的菲爾茲獎。佩雷爾曼的方法是 Ricci 流, 來自幾何分析。這非常有意思, 一個拓樸的難題, 最後的解決用到的是分析的方法, 這也說明不同分支的數學之間聯繫的深刻。

我們已經看到, 球面對於拓樸學乃至整個數學都是非常重要的。球面上的拓樸問題應該還能產生數學大獎, 一個原因是同倫群的計算遠未完成, 1958 年 Serre 獲得菲爾茲獎, 他關於球面同倫群的工作是重要的原因。

一維的球面就是圓周, 與圓周有關的是紐結, 即三維空間中同胚於圓周的曲線。關於紐結, 有豐富深刻的數學。Jones 獲得菲爾茲獎的重要工作之一就是發現了紐結的 Jones 多項式[12]。後來, Witten 在量子場論中的研究給 Jones 多項式一個新的解釋[13], 令人吃驚。

我們看一下虧格等於 1 的曲面, 拓樸上它只有一個, 就是環面, 代數上稱爲橢圓曲線, 其定義的方程很簡單, 就是

$$y^2=x^3+ax+b,$$

因爲是光滑的, 所以有 $4a^3+27b^2\neq 0$。橢圓曲線是數論的中心研究物件之一, 在 Fermat 大定理的證明中起了關鍵的作用。BSD 猜想斷言某些 L 函數在 1 處的階與橢圓曲線的有理點群

[10] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. Ann. of Math. (2) 74 (1961), 391-406.

[11] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geom. 17 (1982), no.3, 357-453.

[12] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no.1, 103-111.

[13] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial. Comm. Math. Phys. 121 (1989), no.3, 351-399.

的結構密切相關。這是克雷研究所的七個千禧年問題之一, 懸賞百萬美元。到目前爲止, 七個千禧年問題只有 Poincaré 猜想得到解決。

5. 微分方程

我們看了很多代數方程, 現在看一下微分方程。微分方程在數學裡是極大的一塊, 在實際應用中極其重要。有了微積分後, 很多物理學中的問題就可以通過微分方程來表達。數學中也自然產生微分方程, 比如複變函數中的解析函數, 它有實部和虛部, 實部和虛部會滿足 Cauchy-Riemann 條件, 於是實部和虛部都滿足調和方程

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0,$$

也就是 Laplace 方程。Laplace 方程看上去簡單優美, 其解稱爲調和函數, 在數學和物理中都十分重要。調和函數和解析函數的關係密切, 給一個調和函數就能構造一個解析函數。

來源於物理的方程特別有意思, 比如電磁學中的 Maxwell 方程、量子力學中的 Schrödinger 方程、關於流體的 Navier-Stokes 方程、相對論中的 Einstein 方程等。這些方程自出現起就一直是研究的重點, 對物理和數學的發展起了巨大的推動作用, 它們的數值解則是計算數學研究的重要內容。

6. 結束語

我們從小學就開始學習數學, 學到初中、高中、大學、研究生, 學了很多的數學, 但是看一下最近幾屆的數學家大會報告, 很可能會發現自己基本上都不明白, 這讓人有點失落。數學的世界豐富龐大, 深不見底, 數學之路望不到盡頭。好在數學非常有魅力, 學習和探索的路上充滿了優美的風景, 讓人沉醉, 流連忘返。還有一件使人愉悅的事情是高深的數學前沿其實和我們熟悉的簡單數學密切相關, 更確切地說是植根於簡單數學的。

—本文作者爲中國科學院院士, 中國科學院數學與系統科學研究院學術院長, 中國科學院大學副校長—