數學傳播 41卷1期, pp. 50-60

最簡勾股差

賴昱維

摘要: 本研究由勾股定差的素勾股數家族找到了最簡勾股差的判別方法, 由此方法可從正整數集合中直接挑出最簡勾股差。

關鍵詞: 勾股數、Pell 數列、Pell 方程。

1. 緒論

清代數學家劉彝程由勾股數 (Pythagorean triple) 爲邊長所構作的幾何圖形證明了勾股差小於 10 且勾長小於27的最簡勾股三角形只有四種, 分別爲勾股差爲 1 的 (3, 4, 5) 與 (21, 20, 29) 以及勾股差爲 7 的 (5, 12, 13) 與 (15, 8, 17), 更由此推論「不存在勾股差爲 3, 5, 9 的最簡勾股三角形」(Paul Yiu, 1996)。王重臻由已知的最簡勾股差數列發現「對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式」(王重臻, 2007)。我想知道「對整數 k 而言, $|8k\pm 1|$ 皆是最簡勾股差」是否正確, 卻發現 9 爲 $|8\times 1+1|$, 可是 9 並不是最簡勾股差, 即 $|8k\pm 1|$ 並不全是最簡勾股差。因此, 我想探討「怎樣的正整數才是最簡勾股差?」

2. 預備知識

2.1. 名詞定義

勾股數: 又名畢氏數或商高數, 是符合畢氏定理 $(a^2+b^2=c^2)$ 的正整數解 (a,b,c)。

素勾股數: 又名互質畢氏數 (primitive Pythagorean triple), 即(a,b,c)的最大公因數等於 1。

勾股三角形 (Pythagorean triangle): 以勾股數爲三邊長的直角三角形。

最簡勾股三角形: 以素勾股數爲三邊長的直角三角形。

最簡勾股差: 素勾股數的勾股差, 即最簡勾股三角形的勾股邊長差。

素勾股數家族: 由同一生成公式產生的 $\{(a_n,b_n,c_n)\}$, 如歐幾里得家族 (the Euclid family): $\{(u_n^2-v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2+v_n^2) \mid \forall\ n, u_n, v_n\in N, u_n>v_n, (u_n,v_n)=1, u_n, v_n$ 一奇一偶$\}$。勾

股定差的素勾股數家族: 素勾股數家族的 $|a_n-b_n|$ 爲定值, 如費馬家族 (the Fermat family):

$$\{(P_{n+1}^2-P_n^2, 2P_{n+1}P_n, P_{n+1}^2+P_n^2) \mid n\in N, P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}, P_0=0, P_1=1\}。$$

2.2. Pell 數列與勾股定差的素勾股數家族

馬丁 (Martin) 在 1875 年先令 $u_n=P_{n+1}$, $v_n=P_n$, 然後由 Pell 數列 (Pell sequence) $\langle P_n\rangle$ 產生勾股定差爲 1 的費馬家族, 即引理1 (Price, H. Lee, 2008)。

引理 1: 費馬家族中的素勾股數 $(a_n,b_n,c_n)=(P_{n+1}^2-P_n^2, 2P_{n+1}P_n, P_{n+1}^2+P_n^2)$, $\forall\, n\in N$, $P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}$, $P_0=0$, $P_1=1$, 則其勾股差 $|a_n-b_n|=1$。

證明:

(1) 由 $\langle P_n\rangle$ 的遞迴關係式可得: $P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}\Leftrightarrow P_{n-2}=P_n-2P_{n-1}$。

(2) 由於 $(a_n,b_n,c_n)=(P_{n+1}^2-P_n^2, 2P_{n+1}P_n, P_{n+1}^2+P_n^2)$, 所以勾股差爲:

$$\begin{aligned}
|a_n-b_n| &= |P_{n+1}^2-P_n^2-2P_{n+1}P_n| \\
&= |(2P_n+P_{n-1})^2-(2P_{n-1}+P_{n-2})^2-2(2P_n+P_{n-1})(2P_{n-1}+P_{n-2})| \\
&= |4P_n^2-7P_{n-1}^2-P_{n-2}^2-4P_nP_{n-1}-6P_{n-1}P_{n-2}-4P_nP_{n-2}| \\
&= |4P_n^2-7P_{n-1}^2-(P_n-2P_{n-1})^2-4P_nP_{n-1}-6P_{n-1}(P_n-2P_{n-1}) \\
&\quad -4P_n(P_n-2P_{n-1})| \\
&= |P_n^2-P_{n-1}^2-2P_nP_{n-1}| = |a_{n-1}-b_{n-1}|
\end{aligned}$$

(3) 由 (2) 可得:

$$\begin{aligned}
|a_n-b_n| &= |a_{n-1}-b_{n-1}| = |a_{n-2}-b_{n-2}| \\
&= \cdots = |a_1-b_1| \\
&= |P_2^2-P_1^2-2P_2P_1| \\
&= |2^2-1^2-2\times 2\times 1| = 1
\end{aligned}$$

□

由於 $(\sqrt{2}-1)$ 的連分數可表示如下, 所以 $(\sqrt{2}-1)$ 的漸近分數數列爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{29}$, $\ldots$, 即爲 Pell 數列所構成的 $\left\langle \frac{P_n}{P_{n+1}}\right\rangle$, 所以由此可產生費馬家族 (許介彥, 2005)。

$$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

在第四十七屆全國中小學科展中, 王重臻由遞迴關係式 $S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$ 產生了勾股定差的素勾股數家族 (王重臻): 由歐幾里得家族生成公式分析費馬家族的素勾股數: (3,4,5), (21,20,29), (119,120,169), (697,696,985), (4059,4060,5471), 可得到 $\langle u_n\rangle$ 爲 2, 5, 12, 29, 70, $\langle v_n\rangle$ 爲 1, 2, 5, 12, 29, 則 $\langle u_n\rangle$ 與 $\langle v_n\rangle$ 皆存在遞迴關係: $S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$。並且由最簡勾股差數列發現「對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式。」

$$\langle|a_n-b_n|\rangle:1,7,17,23,31,41,47,49,71,73,79,89,97,103,113,119,127,137,151,161,\\ 167,191,\ldots$$

2.3. Pell 方程與勾股定差的素勾股數家族

2.3.1. Pell 方程

許介彥在2005年由 Pell 方程 (Pell's equation) 產生了費馬家族 (許介彥), 說明如下:

(1) 先由費馬家族得到 $(a_n,b_n,c_n)=(a_n,a_n+1,c_n)$, 因此

$$\begin{aligned} a_n^2+b_n^2=c_n^2 \Leftrightarrow a_n^2+(a_n+1)^2=c_n^2 &\Leftrightarrow 2a_n^2+2a_n+1=c_n^2\\ &\Leftrightarrow 4a_n^2+4a_n+2=2c_n^2 \Leftrightarrow 2(2a_n+1)^2=2c_n^2-1. \end{aligned}$$

(2) 將兩邊等號同時加上 $[(2a_n+1)^2-4c_n(2a_n+1)+2c_n^2]$ 得到:

$$\begin{aligned} &2(2a_n+1)^2-4c_n(2a_n+1)+2c_n^2=(2a_n+1)^2-4c_n(2a_n+1)+4c_n^2-1\\ &\Leftrightarrow 2(2a_n+1-c_n)^2=(2a_n+1-c_n)^2-1 \end{aligned}$$

(3) 令 $\begin{cases} x_n=2a_n+1-2c_n\\ y_n=2a_n+1-c_n \end{cases}$, 則上式成了 Pell 方程的形式, 同時也得到迭代公式 (1)。

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{x_n+2y_n-1}{2}\\ b_n=\dfrac{x_n+2y_n+1}{2}\\ c_n=x_n+y_n. \end{cases} \tag{1}$$

(4) 由 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 產生了正整數解 (x_n,y_n) 爲 (3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408) $\cdots$, 再代入迭代公式 (1), 即可產生費馬家族。

(5) 其勾股差

$$|a_n-b_n|=\left|\left(\frac{x_n+2y_n-1}{2}\right)-\left(\frac{x_n+2y_n+1}{2}\right)\right|=1.$$

2.3.2. 最簡勾股差之合成法則

王重臻由 Pell 方程的形式提出最簡勾股差之合成法則 (王重臻): 若 d_s 與 d_t 爲最簡勾股差, 則 d_sd_t 亦爲最簡勾股差。說明如下:

(1) 先令最簡勾股差爲 d_s, d_t, 則

$$d_s = |a_s - b_s| = |(u_s^2 - v_s^2) - 2u_sv_s| = |(u_s - v_s)^2 - 2v_s^2|$$
$$d_t = |a_t - b_t| = |(u_t^2 - v_t^2) - 2u_tv_t| = |(u_t - v_t)^2 - 2v_t^2|$$

(2) 再令 $\Delta v_s = u_s - v_s$, $\Delta v_t = u_t - v_t$, 則

$$d_s = |\Delta v_s^2 - 2v_s^2| = (\Delta v_s + v_s\sqrt{2})|\Delta v_s - v_s\sqrt{2}|$$
$$d_t = |\Delta v_t^2 - 2v_t^2| = (\Delta v_t + v_t\sqrt{2})|\Delta v_t - v_t\sqrt{2}|$$

(3) 則

$$\begin{aligned}
d_sd_t &= |\Delta v_s^2 - 2v_s^2||\Delta v_t^2 - 2v_t^2| \\
&= [(\Delta v_s + v_s\sqrt{2})|\Delta v_s - v_s\sqrt{2}|][(\Delta v_t + v_t\sqrt{2})|\Delta v_t - v_t\sqrt{2}|] \\
&= (\Delta v_s + v_s\sqrt{2})(\Delta v_t + v_t\sqrt{2})|\Delta v_s - v_s\sqrt{2}||\Delta v_t - v_t\sqrt{2}| \\
&= [(\Delta v_s\Delta v_t + 2v_sv_t) + (v_s\Delta v_t + v_t\Delta v_s)\sqrt{2}]|(\Delta v_s\Delta v_t + 2v_sv_t) \\
&\quad -(v_s\Delta v_t + v_t\Delta v_s)\sqrt{2}| \\
&= |(2v_sv_t + \Delta v_s\Delta v_t)^2 - 2(v_s\Delta v_t + v_t\Delta v_s)^2|
\end{aligned}$$

2.4. 迭代公式與勾股定差的素勾股數家族

劉彝程在 1894 年將 (a_1, b_1, c_1) 分別爲 (3, 4, 5), (5, 12, 13) 與 (15, 8, 17) 代入迭代公式 (2), 迭代產生了費馬家族與勾股定差爲 7 的素勾股數家族, 即引理 2 至 4 (Paul Yiu)。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 2b_n + 3c_n. \end{cases} , \qquad \forall\ n \in N. \tag{2}$$

引理 2: 由勾股數 $(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5)$ 代入迭代公式 (2), 迭代產生費馬家族。

證明:

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| &= |(2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\
&= |a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = |a_1 - b_1| = |3 - 4| = 1.
\end{aligned}$$ □

引理 3: 由勾股數 $(a_1, b_1, c_1) = (5, 12, 13)$ 代入迭代公式 (2), 迭代產生產生勾股定差爲 7 的素勾股數家族。

證明:

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |(2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\ &= |a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = |a_1 - b_1| = |5 - 12| = 7. \end{aligned} \qquad \square$$

引理 4: 由勾股數 $(a_1, b_1, c_1) = (15, 8, 17)$ 代入迭代公式 (2), 迭代產生產生勾股定差爲 7 的素勾股數家族。

證明:

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |(2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\ &= |a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = |a_1 - b_1| = |15 - 8| = 7. \end{aligned} \qquad \square$$

貝格倫 (B. Berggrens) 在 1934 年將 $(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5)$ 代入迭代公式 (3), 迭代產生費馬家族, 即引理 5 (Price, H. Lee)。

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \forall\, n \in N. \tag{3}$$

引理 5: 由勾股數 $(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5)$ 代入迭代公式 (3), 迭代產生費馬家族。

證明:

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |(a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\ &= |b_{n-1} - a_{n-1}| = |a_{n-1} - b_{n-1}| \\ &= \cdots = |b_1 - a_1| = |a_1 - b_1| = |3 - 4| = 1. \end{aligned} \qquad \square$$

我發現由劉彝程與貝格倫的迭代公式可迭代產生勾股定差爲 $|a_1 - b_1|$ 的素勾股數家族。

引理 6: 將 (a_1, b_1, c_1) 代入迭代公式 (2), 迭代產生勾股定差爲 $|a_1 - b_1|$ 的素勾股數家族。

證明:

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |(2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\ &= |a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = |a_1 - b_1|. \end{aligned} \qquad \square$$

引理 7: 將 (a_1, b_1, c_1) 代入迭代公式 (3), 迭代產生勾股定差爲 $|a_1 - b_1|$ 的素勾股數家族。

證明:

$$\begin{aligned}|a_n - b_n| &= |(a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1}) - (2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1})| \\ &= |b_{n-1} - a_{n-1}| = |a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = |b_1 - a_1| = |a_1 - b_1|.\end{aligned}$$ □

2.5. 遞迴關係式與勾股定差的素勾股數家族

我在第 55 屆全國科展由費馬家族得到 $\left\langle \frac{v_n}{u_n} \right\rangle = \left\langle \frac{P_n}{P_{n+1}} \right\rangle$ 之後, 接著延伸產生 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$, 即引理 8 (賴昱維, 2015)。

引理 8: $\forall\ n \in N,\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1},\ P_0 = 0,\ P_1 = 1,$ 若 $\left\langle \frac{v_n}{u_n} \right\rangle = \left\langle \frac{P_n}{P_{n+1}} \right\rangle$, 則 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$。

證明:

$$\begin{aligned}&\frac{u_n}{v_n} - \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} - \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{2P_n}{P_n} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}.\end{aligned}$$ □

我由 $\frac{v_1}{u_1}$ 開始, 利用 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ 產生 $\left\langle \frac{v_n}{u_n} \right\rangle$, 再利用歐幾里得家族生成公式產生勾股定差爲 $|u_1^2 - v_1^2 - 2u_1v_1|$ 的素勾股數家族 $\{(a_n, b_n, c_n)\}$ (賴昱維)。

引理 9: $\forall\ n, u_1v_1 \in N,\ n > 1,\ u_1 > v_1,\ (u_1, v_1) = 1,\ u_1, v_1$ 一奇一偶, 且 $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{2 + \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$, 若 $(a_n, b_n, c_n) = (u_n^2 - v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2 + v_n^2)$, 則 $|a_n - b_n| = |u_1^2 - v_1^2 - 2u_1v_1|$。

證明:

(1) 因爲且 $(u_1, v_1) = 1$, 所以 $(2u_1 + v_1, u_1) = 1$, 因此由 $\frac{v_2}{u_2} = \frac{1}{2 + \frac{v_1}{u_1}} = \frac{u_1}{2u_1 + v_1}$ 可得 $u_2 = 2u_1 + v_1,\ v_2 = u_1$。

(2) 因爲 $(2u_1 + v_1, u_1) = 1$, 所以 $(u_2, v_2) = 1$, 且 $(2u_2 + v_2, u_2) = 1$。因此由 $\frac{v_3}{u_3} =$

$\dfrac{1}{2+\dfrac{v_2}{u_2}} = \dfrac{u_2}{2u_2+v_2}$ 可得 $u_3 = 2u_2+v_2$, $v_3 = u_2$。因爲 $(2u_2+v_2, u_2) = 1$, 所以 $(u_3, v_3) = 1$。

(3) 同理可推得 $(u_{n-1}, v_{n-1}) = 1$, 所以 $(2u_{n-1}+v_{n-1}, u_{n-1}) = 1$, 因此由 $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2+\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}} = \dfrac{u_{n-1}}{2u_{n-1}+v_{n-1}}$ 可得 $u_n = 2u_{n-1}+v_{n-1}$, $v_n = u_{n-1}$。因爲 $(2u_{n-1}+v_{n-1}, u_{n-1}) = 1$, 所以 $(u_n, v_n) = 1$。

(4) 由 (3) 可得

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| &= |u_n^2 - v_n^2 - 2u_nv_n| \\
&= |(2u_{n-1}+v_{n-1})^2 - u_{n-1}^2 - 2(2u_{n-1}+v_{n-1})u_{n-1}| \\
&= |-u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2 + 2u_{n-1}v_{n-1}| \\
&= |u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2 - 2u_{n-1}v_{n-1}| \\
&= |a_{n-1} - b_{n-1}|
\end{aligned}$$

(5) 由 (4) 可得

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| &= |a_{n-1} - b_{n-1}| \\
&= |a_{n-2} - b_{n-2}| \\
&= \cdots = |a_2 - b_2| \\
&= |a_1 - b_1| \\
&= |u_1^2 - v_1^2 - 2u_1v_1|.
\end{aligned}$$

□

3. 主要結果與證明

3.1. 最簡勾股差之奇偶性質

劉彝程提出「勾股差小於 10 且勾長小於 27 的勾股差只有 1 與 7」與「不存在勾股差爲 3, 5, 9 的最簡勾股三角形」(Paul Yiu)。我由此推論「不存在勾股差爲偶數的最簡勾股三角形。」

定理 1: 不存在勾股差爲偶數的最簡勾股三角形。

證明: 因爲 $(a_n, b_n, c_n) = (u_n^2 - v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2 + v_n^2)$, 且 u_n 與 v_n 爲一奇一偶, 所以 a_n, 爲奇數, b_n 爲偶數, 可知 $|a_n - b_n|$ 必爲奇數, 因此偶數不是最簡勾股差, 也就是說不存在勾股差爲偶數的最簡勾股三角形。 □

3.2. 勾股定差的素勾股數家族

3.2.1. 勾股定差

我在預備知識中比較各種文獻已知之勾股定差的素勾股數家族後, 我將其整理成表 1。由於 $1 = |8\times 0+1| = |8\times 0-1|$, 所以 1 是 $|8k\pm 1|$ 的形式, 而 $|a_1-b_1|$ 由歐幾里得家族生成公式可得 $|u_1^2-v_1^2-2u_1v_1|$, 所以 $|a_1-b_1|$ 與 $|u_1^2-v_1^2-2u_1v_1|$ 是相等的。

表 1. 各種勾股定差的素勾股數家族

作者	生成公式	$\{(a_n,b_n,c_n)\}$	$\|a_n-b_n\|$
馬丁	$\langle P_n\rangle$	$\{(P_{n+1}^2-P_n^2, 2P_{n+1}P_n, P_{n+1}^2+P_n^2)\}$	1
許介彥	$\left\langle \dfrac{P_n}{P_{n+1}}\right\rangle$	$\{(P_{n+1}^2-P_n^2, 2P_{n+1}P_n, P_{n+1}^2+P_n^2)\}$	1
許介彥	$x^2-2y^2=1$	$\left\{\left(\frac{x_n+2y_n-1}{2}, \frac{x_n+2y_n+1}{2}, x_n+y_n\right)\right\}$	1
王重臻	$S_n+2S_{n+1}=S_{n+2}$	$\{(u_n^2-v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2+v_n^2)\}$	$\|8k\pm 1\|$
劉彞程	$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}+b_{n-1}+2c_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}+2c_{n-1} \\ c_n=2a_{n-1}+2b_{n-1}+3c_{n-1} \end{cases}$	$\{(a_n,b_n,c_n)\}$	$\|a_1-b_1\|$
貝格倫	$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&2 \\ 2&1&2 \\ 2&2&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$	$\{(a_n,b_n,c_n)\}$	$\|a_1-b_1\|$
賴昱維	$\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2+\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$	$\{(u_n^2-v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2+v_n^2)\}$	$\|u_1^2-v_1^2-2u_1v_1\|$

3.2.2. 最簡勾股差

我藉著探討 $|8k\pm 1|$ 與 $|u_n^2-v_n^2-2u_nv_n|$ 的關係證明王重臻所發現的「對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式」, 即定理 2 (王重臻)。

定理 2: 對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式。

證明: 由於 $|a_n-b_n|=|u_n^2-v_n^2-2u_nv_n|=|(u_n-v_n)^2-2v_n^2|$, 且 u_n 與 v_n 爲一奇一偶, 即 (u_n-v_n) 爲奇數。因此, 我探討 v_n 的奇偶性如下:

(1) 當 v_n 爲奇數時, 令 $v_n=2s-1$, $u_n-v_n=2t-1$, $\forall\ s,t\in N$, 則

$$\begin{aligned}|a_n-b_n|&=|(u_n-v_n)^2-2v_n^2|=|(2t-1)^2-2(2s-1)^2|\\&=|4t^2-4t+1-8s^2+8s-2|=|4t(t-1)-8s(s-1)-1|\end{aligned}$$

由於 $(t-1)$ 與 t 爲連續整數, 所以 $(t-1)$ 與 t 爲一奇一偶, 因此, 令 $4t(t-1)-8s(s-1)=8k$, $\forall\ k\in Z$, 則

$$|a_n-b_n|=|4t(t-1)-8s(s-1)-1|=|8k-1|$$

(2) 當 v_n 爲偶數時, 令 $v_n=2s$, $(u_n-v_n)=2t-1$, $\forall\ s,t\in N$, 則

$$\begin{aligned}|a_n-b_n|&=|(u_n-v_n)^2-2v_n^2|=|(2t-1)^2-2(2s)^2|\\&=|4t^2-4t+1-8s^2|=|4t(t-1)-8s^2+1|\end{aligned}$$

由於 $(t-1)$ 與 t 爲連續整數, 所以 $(t-1)$ 與 t 爲一奇一偶, 因此, $\forall k\in Z$, 令 $4t(t-1)-8s^2=8k$, 則

$$|a_n-b_n|=|4t(t-1)-8s^2+1|=|8k+1|$$

所以由 (1) 與 (2) 證明「最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm1|$的形式。」 □

3.2.3. $|8k\pm1|$ 之因數形式

對整數 k 而言, 我探討 $|8k\pm1|$ 之因數形式得到定理 3。

定理3: 對整數 k 而言, $|8k\pm1|$ 的所有因數可寫成 $|8k\pm1|$ 或 $|8k\pm3|$ 的形式。

證明:

(1) 由於所有正整數可分成 $|8k\pm3|$, $|8k\pm2|$, $|8k\pm1|$, $|8k|$, $|8k+4|$, $\forall\ k\in Z$。

(2) 其中 $|8k\pm2|$, $|8k|$, $|8k+4|$ 爲偶數, $|8k\pm1|$ 爲奇數, 所以 $|8k\pm1|$ 的因數不可寫成 $|8k\pm2|$, $|8k|$, $|8k+4|$ 的形式。

(3) $|8k\pm1|$ 的因數可寫成 $|8k\pm3|$ 的形式: 對整數 p,q 而言, 取 $|8k\pm3|$ 中任兩數相乘所得的數皆可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式。

$$\begin{aligned}|8p-3||8q-3|&=|64pq-24p-24q+9|=|8(8pq-3p-3q+1)+1|\\|8p-3||8q+3|&=|64pq+24p-24q-9|=|8(8pq+3p-3q-1)-1|\\|8p+3||8q+3|&=|64pq+24p+24q+9|=|8(8pq+3p+3q+1)+1|\end{aligned}$$

(4) $|8k\pm1|$ 的因數可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式: 對整數 p,q 而言, 取 $|8k\pm1|$ 中任兩數相乘所得的數皆可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式。

$$|8p-1||8q-1| = |64pq-8p-8q+1| = |8(8pq-p-q)+1|$$
$$|8p-1||8q+1| = |64pq+8p-8q-1| = |8(8pq+p-q)-1|$$
$$|8p+1||8q+1| = |64pq+8p+8q+1| = |8(8pq+p+q)+1|$$

所以由 (3) 與 (4) 證明「$|8k\pm1|$ 的所有因數可寫成 $|8k\pm1|$ 或 $|8k\pm3|$ 的形式。」 □

3.2.4. $|8k\pm1|$ 的分類

根據定理 2 及 3, 我可依照質數與否及因數的形式將 $|8k\pm1|$ 加以分類於表 2。因此, 當 $|8k\pm1|$ 是最簡勾股差時, 我發現這些數可分成 1, 質數與合數。

(1) 最簡勾股差爲 1, 即爲費馬家族, 而 1 可寫成 $|8\times0\pm1|$ 的形式。
(2) 最簡勾股差爲質數, 皆可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式, 如 7, 17, 23, 31, 41, ... 等。
(3) 最簡勾股差爲合數, 其所有因數皆可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式, 如 49, 119, 161, 217, 287, ... 等。

當 $|8k\pm1|$ 不是最簡勾股差時, 我發現這些數皆爲合數, 且在其所有因數中, 有一部分可寫成 $|8k\pm3|$ 的形式, 剩餘部分可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式, 如 9, 15, 25, 33, 39, ... 等。

表 2. $|8k\pm1|$ 的分類

$\|8k\pm1\|$		因數形式	最簡股差
1		$\|8k\pm1\|$	是
7,17,23,31,41,47,71,73,79,89,97,103,...	質數	$\|8k\pm1\|$	是
49,119,161,217,287,289,329,391,497,...	合數	$\|8k\pm1\|$	是
9,15,25,33,39,55,57,63,65,81,87,95,...	合數	$\|8k\pm1\|$ 與 $\|8k\pm3\|$	否

3.2.5. 最簡勾股差的判別法

因此對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm1|$ 的形式, 但是 $|8k\pm1|$ 並不全是最簡勾股差。而且當 $|8k\pm1|$ 是最簡勾股差時, 這些數可以是 1, 質數與合數, 而這三種正整數的所

有因數皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式。基於上述的理由, 我發現最簡勾股差的判別方法為:「對整數 k 而言, 最簡勾股差的所有因數皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式, 而且當一正整數的所有因數皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式時, 此正整數為最簡勾股差。」

4. 結論

本研究的靈感來自於第四十七屆全國中小學科展高中組數學科的作品, 作者雖然發現了「對整數 k 而言, 最簡勾股差皆可寫成 $|8k\pm 1|$ 的形式。」但是, 並不是所有 $|8k\pm 1|$ 形式的數全都是最簡勾股差。為了由正整數集合中可直接挑出最簡勾股差, 本研究則進一步探討勾股定差的素勾股數家族之規律性, 由此發現了最簡勾股差的判別方法。

致謝: 由衷感謝彰化師範大學數學系施皓耀教授, 因為在施教授的鼓勵與指導下, 這一篇文章才能完成。此外, 更感謝編審老師對文章的指正。

參考資料

1. 王重臻。勾股鐵路網。中華民國第 47 屆中小學展覽會高中組數學科, 2007。
2. 許介彥。數學悠哉遊。頁 272-275, 台北市: 三民, 2005。
3. 賴昱維。分進合擊 — 分解勾股數。中華民國第 55 屆中小學展覽會國中組數學科, 2015。
4. Paul Yiu。《九章算術》傳統的連續數勾股形構作。香港數學教育學會《數學教育》, 1996, 3, from: http://hkame.vela.hk/uploaded_files/magazine/3/61.pdf.
5. H. Lee Price, "The Pythagorean Tree: A New Species". arXiv:0809.4324, 2008 [math.HO], from: http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf.

—本文作者就讀台中一中數理資優班一年級—