

回響：橢圓光學性質的向量證明

連威翔

在數學傳播 158 期「橢圓的曲率公式和萬有引力的平方反比規律」一文第二節中 (參考 [1])，作者使用平面向量研究曲線上質點運動與曲線的曲率、曲率半徑的關係，簡潔易懂，因此引發筆者的研究興趣。

在本文中，筆者也將以向量的觀點研究沿著橢圓軌跡運動的一質點，並證明《橢圓的光學性質》，以下是對該性質的敘述，隨後則是筆者的證明：

橢圓的光學性質：如下圖，令橢圓長軸長為 $2a$ 、焦距為 c ，設兩焦點為 F_1 、 F_2 。 P 為橢圓上一運動質點， A 、 B 為過 P 的橢圓切線上、位於 P 點不同側的兩點：

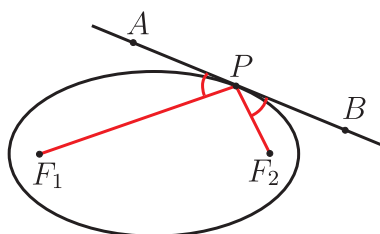


圖 1

則不論 P 在橢圓上的哪個位置，均有 $\angle APF_1 = \angle BPF_2$ 。

證明：令位置向量 $X_1 = \overrightarrow{F_1P}$ ， $X_2 = \overrightarrow{F_2P}$ ，兩者均以時間 t 為變數，則根據定義有

$$|X_1| + |X_2| = 2a \quad (1)$$

$$X_1 - X_2 = \overrightarrow{F_1F_2} \quad (2)$$

注意 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 是長度為 $2c$ 的常向量。將 (2) 式等號兩側對時間 t 微分，可知

$$X_1' - X_2' = (0, 0) \Rightarrow X_1' = X_2' \quad (3)$$

又因為位置向量 X_1 對時間 t 微分，即為圖 1 動點 P 在橢圓上移動的速度向量 (切向量)，設其為 V ，同理向量 X_2 對 t 的微分也是，因此由 (3) 可知

$$X_1' = X_2' = V \quad (4)$$

在圖 1 中令 $\angle APF_1 = \theta_1$, $\angle BPF_2 = \theta_2$, 假設 P 沿著橢圓進行逆時針方向運動, 此時圖 1 中點 P 的運動情形可參考下圖:

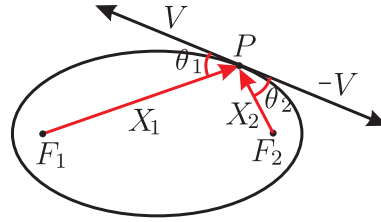


圖 2

一般來說, 求向量 $X(x(t), y(t))$ 的長度 $|X|$ 對時間 t 的導函數時, 將有

$$\begin{aligned} \frac{d|X|}{dt} &= \frac{d(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2})}{dt} = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \\ &= \frac{(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))}{|X|} = \frac{X \cdot X'}{|X|} \end{aligned}$$

因此, 取 (1) 式兩側對時間 t 的導函數可得

$$\frac{X_1 \cdot X'_1}{|X_1|} + \frac{X_2 \cdot X'_2}{|X_2|} = 0 \quad (5)$$

由 (4), (5) 式並參考圖 2, 由內積定義可知

$$\begin{aligned} \frac{X_1 \cdot V}{|X_1|} + \frac{X_2 \cdot V}{|X_2|} = 0 &\Rightarrow \frac{X_2 \cdot V}{|X_2|} = \frac{-X_1 \cdot V}{|X_1|} \\ &\Rightarrow \frac{(-X_2) \cdot (-V)}{|-X_2||-V|} = \frac{(-X_1) \cdot V}{|-X_1||V|} \Rightarrow \cos \theta_2 = \cos \theta_1 \\ &\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \quad \text{或} \quad \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \end{aligned}$$

但由圖 2 可知 $\angle F_1PF_2 \geq 0$, 故 $\theta_1 + \theta_2 \leq \theta_1 + \theta_2 + \angle F_1PF_2 = \pi$, 因此得到 $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \angle APF_1 = \angle BPF_2$, 這樣就證出了橢圓的光學性質。

值得一提的是, 在 [1] 文末的註 5 中, 作者以平面幾何的方法巧妙地證明了橢圓的「焦切距乘積定理」, 證明中也使用了《橢圓的光學性質》, 因此筆者寫下本文的一點研究心得, 希望也可供對 [1] 文有興趣的讀者參考。

參考資料

1. 張海潮, 莊正良。橢圓的曲率公式和萬有引力的平方反比規律。數學傳播季刊, 40(2), 24-34, 2016。