數學傳播 41卷1期, pp. 43-47

# 斯坦那多邊形與等邊多邊形

齊平中 · 林彥熹

## 前言

本文將探討等邊多邊形與所謂「斯坦那多邊形」(見以下定義 1) 間的關聯, 而我們首先介紹爲什麼我們想要探討這個問題。而在將「單心斯坦那問題」的村莊數推廣到 $n$ 的過程中, 我們便開始研究怎麼樣的多邊形會是斯坦那多邊形。

我們將證明等邊多邊形必爲斯坦那多邊形, 但同時我們也發現斯坦那多邊形不一定是等邊的多邊形, 如平行四邊形也是斯坦那多邊形。

因此我們進一步想要找出一個多邊形是斯坦那多邊形的充分必要條件。

斯坦那 (J. Steiner, 1796∼1863) 是十九世紀幾何方面的代表人物之一, 他曾經談論到一個看似簡單的問題

**斯坦那問題**: 如何以一個總長最短的道路系統將三個村莊 $A$, $B$, $C$ 連接起來。即給定三點 $A$, $B$, $C$, 如何找到一點 $P$ 使其到 $A$, $B$, $C$ 三點距離和最短。

這個問題的證明並不困難, 這裡不寫出詳細的證明, 然而最終的 $P$ 爲一個正三角形內的一點並滿足 $P$ 到這個正三角形三邊的垂足即是 $A$, $B$, $C$ 三點, 證明的過程中用到了一個令我們感興趣的定理 — 維維安尼定理。

維維安尼 (V. Viviani, 1622∼1703) 是著名的物理學家伽利略 (G. Galilei, 1564∼1642) 的弟子。他是義大利物理、數學家, 這個定理即是他發現的。

**定理** 1 (**維維安尼定理**): 正三角形內任一點到三邊的距離之和等於定值。

事實上, 這個定值是此正三角形的高。我們下面直接證明較一般的命題。

**定理** 2: 如圖 1, 若 $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ 是一個等邊凸 $n$ 邊形, 則其內部任一點 $P$ 到各邊距離之和等於定值。

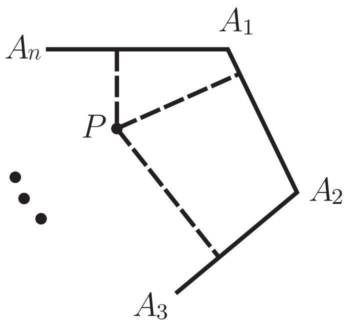


圖1

**證明**: 令此凸 $n$ 邊形邊長爲 $a$, 且 $P$ 到各邊距離之和爲 $S$, 並令 $A_{n+1}=A_1$, 則

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{n}\triangle PA_iA_{i+1}\text{的高}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{2\triangle PA_iA_{i+1}\text{的面積}}{a}\\&=\frac{2\sum_{i=1}^{n}\triangle PA_iA_{i+1}\text{的面積}}{a}\\&=\frac{2A_1A_2\ldots A_n\text{的面積}}{a}\end{aligned}$$

即 $S$ 等於定值, 故得證。

**定義** 1: 如果一個凸多邊形內部任一點到各邊距離之和恆爲定值, 則我們稱它爲「斯坦那」多邊形。

**定理** 3: 如果 $A_1A_2\ldots A_n$ 是一個斯坦那 $n$ 邊形, 則分別在 $A_nA_1$ 及 $A_3A_2$ 上作 $B_1$ 及 $B_2$ 滿足 $A_1A_2//B_1B_2$, 則 $B_1B_2A_3\ldots A_n$ 也是一個斯坦那 $n$ 邊形。

**證明**: 記任意點 $P$ 到 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊的距離和爲 $S(P)$、到 $B_1B_2A_3\ldots A_n$ 各邊的距離和爲 $T(P)$。則易知 $T(P)-S(P)=A_1A_2$ 與 $B_1B_2$ 的距離, 是定值。

又因爲 $A_1A_2\ldots A_n$ 是斯坦那多邊形, 所以 $S(P)$ 是定值, 所以 $T(P)$ 也是定值, 即 $B_1B_2A_3\ldots A_n$ 也是斯坦那多邊形, 得證。

定理 3 有個有趣的應用, 即所謂「搬樓不搬心」。比如, 一個光纖網路有一個核心, 以總長最短的路徑連接了周圍 $N$ 個樓。當其中一個樓搬移時, 只要沿著原來光纖線段的方向移動, 則不論搬遠或是搬近, 當核心留在原地時, 仍舊維持是一個最短的網路。

**評論**1: 我們稱上述由 $A_1A_2\ldots A_n$ 得到 $B_1B_2A_3\ldots A_n$ 的過程稱爲一次「操作」。而若在某次操作中此多邊形的邊與自己相交了 (如圖2), 定理3的證明仍然是正確的, 所以在接下來的討論中我們允許這種情況的出現。

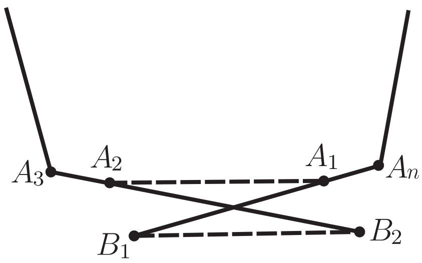


圖 2

而有了定理3以後, 我們做出以下猜測:

**猜想**1: 所有的斯坦那 $n$ 邊形皆可以由等邊 $n$ 邊形經由若干次操作得到。

爲了證明這個猜想我們要先證明一些引理。

**定義**2: 如圖 3, 我們稱與多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的邊 $A_iA_{i+1}$ 垂直且朝向多邊形外部的單位向量稱爲 $(\overrightarrow{r_i})$。

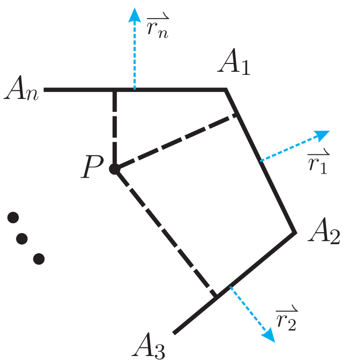


圖 3

**引理**1: 一個 $n$ 邊形是斯坦那 $n$ 邊形的充分必要條件是 $\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\cdots+\overrightarrow{r_n}=0$。

**證明**: 對於多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 內部任一點 $X$, $X$ 到 $A_iA_{i+1}$ 的距離是向量 $\overrightarrow{XA_i}$ 與 $\overrightarrow{r_i}$ 的內積, 即 $\overrightarrow{XA_i}\cdot\overrightarrow{r_i}$。

所以對其他任一點 $Y$, 會有

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{XA_i}\cdot\overrightarrow{r_i}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{YA_i}\cdot\overrightarrow{r_i}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{XA_i}\cdot\overrightarrow{r_i}-\overrightarrow{YA_i}\cdot\overrightarrow{r_i})=0$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{r_i}=0$$

也就是

$$\overrightarrow{XY}\cdot\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_i}=0$$

又因爲 $X$、$Y$ 皆爲任意點, 所以 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{r_i}=0$, 故得證。

**引理** 3: 若多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 及 $B_1B_2\ldots B_n$ 對 $i=1,2,\ldots,n$ 皆滿足 $A_iA_{i+1}//B_iB_{i+1}$, 且假設 $A_1A_2$ 與 $B_1B_2$ 重合且等長, 則 $A_1A_2\ldots A_n$ 能經由若干次操作變成 $B_1B_2\ldots B_n$。

**證明**: 由評論 1, 我們可以依序進行操作使 $A_iA_{i+1}$ 落在 $B_iB_{i+1}$ 所在的直線上, 其中 $i=2,3,\ldots,n$, 且 $A_{n+1}=A_1$、$B_{n+1}=B_1$。則最後由於 $A_1A_2\ldots A_n$ 與 $B_1B_2\ldots B_n$ 的相對應邊都分別落在相同的直線上, 所以 $A_1A_2\ldots A_n$ 與 $B_1B_2\ldots B_n$ 全等, 故得證。

接下來我們便可以給出猜想 1 的證明。

**定理** 4: 所有的斯坦那 $n$ 邊形皆可以由等邊 $n$ 邊形經由若干次操作得到。

**證明**: 由引理 1 我們知道若將 $\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2},\ldots,\overrightarrow{r_n}$ 依序首尾相連, 便能得到一個等邊 $n$ 邊形。而再將這個多邊形旋轉90度便能得到一個與原本的多邊形的邊依序平行的多邊形。而由引理2我們知道原本的斯坦那多邊形能經由若干次操作成爲 $\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2},\ldots,\overrightarrow{r_n}$ 首尾相連並旋轉 90 度產生的等邊 $n$ 邊形, 故命題爲真。

## 結語及未來研究

若允許任意線段的網路 (即不限定單心)、$n$ 個村莊版本的斯納那 (最短公路網) 的問題在數學界已有明確的解答 (請見參考文獻1)。而在應用上, 也可以用電腦計算出一個最短的公路網。

但若只允許一個中心 (即如何找到平面上一個點使其與一個點集中每個點連線長度之和最短的問題), 我們尚無法直接找出 $n$ 個村莊版本的斯納那 (單心 $n$ 鎮最短公路網) 問題的解答, 困難在於給定 $n$ 個點後我們並無法直接畫出一個可以幫助證明的斯坦那多邊形。但我們證明出了所有的斯坦那多邊形都能夠由等邊多邊形經由若干次操作後得到。這仍然是一個相當有趣的結論。

在未來研究的方面, 我們可以定義「退化情形」, 並能證出在非退化的情形 (在三鎮的時候, 退化情形是一個一角大於 120 度的三角形) $N$ 鎮問題的解都必有一個對應的斯坦那多邊形。這個證明不列在本文, 它牽扯到如何判別退化與否, 會是個有趣的研究問題。

## 參考文獻


1. 庫蘭特、羅賓士合著, 吳定遠譯。數學導論。水牛出版社, 372-379, 2008年11月。
2. 黃家禮編著。幾何明珠。九張出版社, 157-166, 2009年4月。


—本文作者齊平中任教台北基督書院, 林彥熹就讀台北市私立薇閣高中二年級—

### 2016 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

**難題** 文 / 黃鈺婷

感情是一道難解的題 本該平行無交集
卻因變數和因數 糾纏在一起
我用微分接近你 你用積分 沉默的疏離
處於重心你立於不敗之地
我 沿著定律和公式軌跡
一圈一圈地 琢磨著意義

—本文作者就讀正修科技大學國際企業系—