數學傳播 41卷1期, pp. 27-42

維騰形變及古典摩斯不等式的純解析證明

蕭欽玉

古典的摩斯不等式從 50 年代開始, 在幾何及拓樸學上都扮演著重要的角色。在 1982 年, 維騰 (Witten) [2] 給出了全新且純解析的證明。維騰的證明奠基在把流形及摩斯函數看成物理上帶有調和振盪器 (Harmonic oscillators) 的系統, 利用調和振盪器的系統來逼近臨界點 (critical points)。其中「逼近臨界點」的想法根源於量子力學裡半經典極限 (semi-classical limit) 及薛丁格方程 (Schrödinger equations) 理論裡的半經典分析 (semi-classical analysis). 維騰的想法大大的推動了現今的幾何, 數學物理及偏微分方程上的發展, 許多古典幾何裡非常複雜的定理, 利用維騰的想法來處理將會變得簡單許多。我們覺得維騰的想法及工作也許會成爲未來數學系幾何學及相關領域的基本教材; 實在有必要向大學生介紹維騰的想法。有鑑於此, 我們在本文中將仔細介紹維騰對古典摩斯不等式的純解析證明。但有一點要提醒讀者, 我們的證明並不完全和維騰的證明一樣, 一些分析的部分, 我們採用較簡單且直接的方法, 但精神上和維騰是一樣的。希望讀者讀完本文後, 能去看看維騰的原始文章 [2], 相信能有更大的收穫。礙於長度限制, 一些證明我們將只點出關鍵, 細節部分請參見何福軒同學的學士論文 [3]。本文可看成現代幾何分析學的入門文章, 希望能引起一些大學生對這個領域的研究的興趣。本文將假設讀者具備基本的微分幾何及偏微分方程的知識。

一、古典摩斯不等式的陳述

在這篇文章中, 我們令 X 爲一個 n 維的緊緻平滑流形 (n-dimensional compact smooth manifold)。給定一個 X 上的平滑函數 $f \in C^\infty(X)$。我們稱 X 上的一個點 $p \in X$ 爲 f 的臨界點如果 $df(p) = 0$, 其中 d 代表流形 X 上的外導數 (exterior derivative)。我們把 f 所有的臨界點的集合記爲 $\mathrm{Crit}\,(f)$。我們引入以下的定義:

定義 1.1. 我們稱 f 的臨界點 p 爲非退化的, 如果存在一個局部座標 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 定義在 p 點附近使得這個矩陣 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{j,k=1}^{n}$ 爲可逆矩陣。

這邊值得注意的是, 若存一個局部座標 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 定義在 p 點附近使得這個

矩陣 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{j,k=1}^n$ 爲可逆矩陣, 則不難證明對所有定義在 p 點附近的局部座標 $x=(x_1,\ldots,x_n)$, 這個矩陣 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{j,k=1}^n$ 均爲爲可逆矩陣。

定義 1.2. 我們稱 f 爲 X 上的一個摩斯函數如果所有 f 的臨界點均爲非退化的。

從現在開始, 我們假定 f 爲一個摩斯函數。這邊值得提醒讀者的是, 根據古典的沙氏定理 (Sard's Theorem), 在 X 上我們可找到非常多的摩斯函數。準確的說, 所有 X 上的摩斯函數會是一個在所有 X 上的平滑函數的空間內在 C^2 拓樸的意義下的稠密的開集 (open and dense subset of all smooth functions on X in C^2 topology)。

由摩斯引理 (Morse Lemma) (請看引理 3.1) 可看出, $\mathrm{Crit}\,(f)$ 爲一個離散的集合。又 X 緊緻, 我們得到 $\mathrm{Crit}\,(f)$ 爲一個有限的集合。

給定一點 $p\in \mathrm{Crit}\,(f)$, 透過簡單的計算可看出這個矩陣 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{j,k=1}^n$ 負的特徵值的個數及正的特徵值的個數和局部座標 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 的選取無關。我們把這個矩陣 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{j,k=1}^n$ 負的特徵值的個數記爲 $n_-(p)$, 正的特徵值的個數記爲 $n_+(p)$。我們把 $n_-(p)$ 稱爲 p 的指標 (the index of p) 並記爲 $\mathrm{ind}\,(p)=n_-(p)$。

對所有 $j=0,1,2,\ldots,n$, 令 $\mathrm{Crit}\,(f,j):=\{x\in \mathrm{Crit}\,(f);\, \mathrm{ind}\,(x)=j\}$ 並把 m_j 記爲這個集合 $\mathrm{Crit}\,(f,j)$ 的個數。

爲了敘述古典摩斯不等式, 我們回憶一下基本微分幾何課上學到的德拉姆複形 (de-Rham complex) 及霍奇理論 (Hodge Theory)。德拉姆複形爲底下的映射:

$$d:\Omega^{-1}(X):=\{0\}\to\Omega^0(X)\to\Omega^1(X)\to\cdots\to\Omega^n(X)\to\Omega^{n+1}(X):=\{0\},$$

其中 $\Omega^r(X):=C^\infty(X,\Lambda^r(T^*X))$, $\Lambda^r(T^*X))$ 爲 X 上的 r 次微分形式。因爲 $d^2=0$, 我們可考慮如下的商群:

$$H^j(X)=\frac{\mathrm{Ker}\,d:\Omega^j(X)\to\Omega^{j+1}(X)}{\mathrm{Im}\,d:\Omega^{j-1}(X)\to\Omega^j(X)},\quad j=0,1,2,\ldots,n.$$

我們把 $H^j(X)$ 叫做第 j 個德拉姆上調群 (the j-th de-Rham cohomology group)。根據霍奇理論, 我們知道對所有的 $j=0,1,2,\ldots,n$, $H^j(X)$ 都是有限維的向量空間。我們這邊簡略的回憶一下霍奇理論的關鍵的定理。一般而言, 無論是從代數或幾何的方法都不容易證明 $H^j(X)$ 是有限維的向量空間。霍奇理論最重要的一個定理是構造了一個向量空間上的同構映射:

$$F:H^j(X)\to \mathrm{Ker}\,\triangle^{(j)}=\{u\in\Omega^j(X);\,\triangle^{(j)}u=0\},$$

其中 $\triangle^{(j)}$ 是作用在 j-形式的德拉姆算子 (de-Rham Laplacian) (當 $t=0$ 時, 第三節的 (9) 式就是德拉姆算子)。因 $\triangle^{(j)}$ 爲一個二階的橢圓偏微分方程, 根據橢圓偏微分方程的理論, 我們得到 $\mathrm{Ker}\,\triangle^{(j)}$ 爲一個有限維的向量空間。因爲 $H^j(X)$ 和 $\mathrm{Ker}\,\triangle^{(j)}$ 爲同構的, 我們立即得

到 $H^j(X)$ 爲一個有限維的向量空間。令 $b_j = \dim H^j(X)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$。我們把 b_j 叫做第 j 個貝梯數 (j-th Betti number)。貝梯數在幾何及拓樸裡都扮演著重要角色。有了以上的準備後, 我們可描述古典摩斯不等式:

定理 1.3 (古典摩斯不等式)**.** 我們有

(I) 弱摩斯不等式: 對所有的$q = 0, 1, \ldots, n$, 我們有

$$b_q \leq m_q. \tag{1}$$

(II) 強摩斯不等式: 對所有的$q = 0, 1, \ldots, n$, 我們有

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}b_j \leq \sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}m_j, \tag{2}$$

且$q = n$時我們有等式, 也就是說

(III)

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}b_j = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}m_j. \tag{3}$$

我們提醒讀者, 定理 1.3 中的 m_j 爲指標爲 j 的臨界點的個數。古典摩斯不等式把臨界點的個數和貝梯數非常完美的連結起來。

註記 1.4. 這個交錯和 $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}b_j$ 稱爲流形X的歐拉特徵數 (Euler characteristic number)。歐拉特徵數是很重要的幾何量, 和指標定理的研究有密切關係。藉由阿提雅-辛格的指標定理 (Atiyah-Singer index theorem), 我們知道 X 的歐拉特徵數也可表爲 X 上的特徵類在 X 上的積分。一般而言, 特徵類在 X 上的積分不太好算, 所以定理 1.3 中的 (III) 提供了另一種歐拉特徵數的計算方式。

值得一提的是, 目前阿提雅-辛格的指標定理的最有效的證明方式是透過計算狄拉克算子的熱核在時間變數 t 趨於零時的超跡 (super trace) 的極限值。變數 t 趨於零的過程類似於量子力學上的半經典極限, 和維騰對古典摩斯不等式的證明的想法有異曲同工的地方。作爲本文的延伸閱讀, 有興趣的讀者, 可參看一些近代指標定理的書籍。

註記 1.5. 在定理 1.3 中的 (I) 中, 我們往往只有不等式。若要得到等式, 通常流形 X 本身要具備更多的對稱性。

本文的目標就是要仔細介紹維騰對定理 1.3 的純解析證明. 我們先引入維騰形變 (Witten deformation) 的概念。

2. 維騰形變

維騰把外微分導數 d 變形成:

$$d_t := e^{-tf} \circ d \circ e^{tf}, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

當$t=0$時, d_t 就是原來的外微分導數 d。維騰進而考慮如下的複形:

$$d_t:\Omega^{-1}(X):=\{0\}\to\Omega^0(X)\to\Omega^1(X)\to\cdots\to\Omega^n(X)\to\Omega^{n+1}(X):=\{0\}. \quad (5)$$

現代數學家都稱 (5) 爲維騰複形 (Witten complex)。因爲 $d_t^2=0$, 我們可考慮如下的商群:

$$H_t^j(X)=\frac{\operatorname{Ker} d_t:\Omega^j(X)\to\Omega^{j+1}(X)}{\operatorname{Im} d_t:\Omega^{j-1}(X)\to\Omega^j(X)},\quad j=0,1,2,\ldots,n.$$

我們把 $H_t^j(X)$ 叫做第 j 個維騰上調群 (the j-th Witten cohomology group)。我們有以下簡單但重要的引理:

引理 2.1. 固定任一個 $q=0,1,2,\ldots,n$。對任何一個$t\ge 0$, $H_t^q(X)$ 都同構於 $H^q(X)$。特別的, $\dim H_t^q(X)=\dim H^q(X)$。

證明: 考慮這個映射: $e^{-tf}:H^q(X)\to H_t^q(X)$. 若$u\in\operatorname{Ker} d$, 則不難看出$e^{-tf}u\in\operatorname{Ker} d_t$. 反之, 若$u=dv\in\operatorname{Im} d$. 則

$$e^{-tf}u=e^{-tf}dv=(e^{-tf}de^{tf})e^{-tf}v\in\operatorname{Im} d_t.$$

從上面的說明及一些基本的計算, 不難看出e^{-tf}爲恰當定義(well-defined) 的同構映射。 □

引理 2.1及其衍生出來的概念在現代數學的發展上扮演著重要角色。從一般偏微分方程或微分幾何的理論上來說, 非常不容易準確的估計這個空間 $H^q(X)$ 的大小。引理 2.1 等於給了我們許多的自由度。我們可試著估計 $\dim H_t^q(X)$ 對某個 t 或 t 充分大或 t 充分小, 從而得到有關 $\dim H^q(X)$ 的估計。事實上, 對某個固定 t 或 t 充分小時, 我們仍然不容易估計 $\dim H_t^q(X)$。但當 t 充分大, 我們可利用一些幾何分析的工具證明如下的定理:

定理 2.2. 當t夠大時,

(I) 對所有的 $q=0,1,\ldots,n$, 我們有

$$\dim H_t^q(X)\le m_q. \quad (6)$$

(II) 對所有的 $q=0,1,\ldots,n$, 我們有

$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\dim H_t^j(X)\le\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}m_j, \quad (7)$$

且$q=n$時我們有等式, 也就是說

(III)
$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\dim H_t^j(X)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}m_j. \quad (8)$$

從定理 2.2 及引理 2.1, 我們立即得到定理 1.3. 本文接下來的目標就是要利用幾何分析的方法來證明定理 2.2。我們先介紹一些基本的幾何分析的知識。

3. 基本的幾何分析

我們在 X 的切叢 (tangent bundle) TX 上選定一個黎曼度量 (Riemannian metric)。我們把這個黎曼度量記爲$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$。根據對偶性, 這個在 TX 上的黎曼度量引出所有微分形式所構成的向量叢 $\oplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(T^*X)$ 上的一個度量。我們也把這個度量記爲 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$。$TX$ 上的黎曼度量引出 X 上的積分元素 dv_X。除了額外題醒, 我們均固定一個 $q = 0, 1, 2, \ldots, n$。向量叢 $\oplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(T^*X)$ 上的度量及積分元素 dv_X 引出 $\Omega^q(X)$ 上的一組 L^2 內積 $(\,\cdot \,|\, \cdot\,)$。準確的說, 我們有

$$(u \,|\, v) = \int_X \langle u \,|\, v \rangle dv_X, \quad \forall u, v \in \Omega^q(X).$$

令

$$d_t^* : \Omega^{q+1}(X) \to \Omega^q(X)$$

爲 d_t 根據 $(\,\cdot \,|\, \cdot\,)$ 而衍生出的伴 (adjoint)。也就是說,

$$(d_t u \,|\, v) = (u \,|\, d_t^* v), \quad \forall u \in \Omega^q(X), v \in \Omega^{q+1}(X).$$

我們把如下的二階偏微分方程

$$\triangle_t^{(q)} := d_t d_t^* + d_t^* d_t : \Omega^q(X) \to \Omega^q(X) \tag{9}$$

稱作維騰拉普拉斯算子 (Witten Laplacian)。令

$$\mathrm{Ker}\, \triangle_t^{(q)} := \{ u \in \Omega^q(X);\ \triangle_t^{(q)} u = 0 \}.$$

根據霍奇定理, $\dim \mathrm{Ker}\, \triangle_t^{(q)} = \dim H_t^q(X)$。因此了解 $\dim H_t^q(X)$ 等價於要了解這個空間 $\mathrm{Ker}\, \triangle_t^{(q)}$ 的維數。又值得注意的是, 這個空間 $\mathrm{Ker}\, \triangle_t^{(q)}$ 的維數和切叢上的黎曼度量的選取無關。因此, 我們可選定一個好的度量, 來幫我們簡化問題。我們回憶一下古典的摩斯引理:

引理 3.1 (摩斯引理)**.** 給定一個點$p \in \mathrm{Crit}\,(f)$, 我們可找到一組局部座標 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 定義在 p 附近的一個開集 U_p 使得 p 對應到 $\mathbb{R}^n$ 的原點 *(*我們寫成 $x(p) = 0$*)* 且在 U_p 上我們有

$$f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \cdots - \frac{1}{2}x_\ell^2 + \frac{1}{2}x_{\ell+1}^2 + \cdots + \frac{1}{2}x_n^2,$$

其中$\ell = \mathrm{ind}\,(p)$.

有關摩斯引理的證明可參考 [1] 的第六頁。我們需要:

引理 3.2. 我們可找到 TX 上的一個黎曼度量 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ 使得對每一個點 $p\in \mathrm{Crit}\,(f)$, 存在一組局部座標 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 定義在 p 附近的一個開集 U_p 使得 p 對應到 $\mathbb{R}^n$ 的原點且在 U_p 上我們有

$$\begin{aligned}&\langle\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,|\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\rangle=\delta_{j,k},\quad j,k=1,2,\ldots,n,\\&f(x)=-\frac{1}{2}x_1^2-\cdots-\frac{1}{2}x_\ell^2+\frac{1}{2}x_{\ell+1}^2+\cdots+\frac{1}{2}x_n^2,\end{aligned}\tag{10}$$

其中$\delta_{j,k}=1$若$j=k$, $\delta_{j,k}=0$若$j\neq k$.

引理3.2意義上是說, 我們可選到一個好的度量使得在每個臨界點附近, 度量都是平的且摩斯函數爲二次形。這樣的度量會幫我們簡化許多的計算。透過摩斯引理及標準的單位分割的技巧(partition of unity), 我們不難得到引理3.2。我們省略引理3.2的證明, 有興趣的讀者可參考[3]。

從現在開始我們假設我們的度量 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ 滿足引理 3.2 的所有條件。

對每個複數$\mu\in\mathbb{C}$, 令

$$E^q_{\mu,t}(X):=\{f\in\Omega^q(X);\ \triangle^{(q)}_t f=\mu f\}.$$

若 $E^q_{\mu,t}(X)$ 包含非零函數, 我們稱 μ 爲這個算子 $\triangle^{(q)}_t$ 的特徵值, $E^q_{\mu,t}(X)$ 爲特徵值 μ 的特徵空間, $E^q_{\mu,t}(X)$ 裡的元素稱爲特徵函數。我們把

$$\mathrm{Spec}\,\triangle^{(q)}_t$$

記爲所有 $\triangle^{(q)}_t$ 的特徵值的集合。由基本的偏微分方程的理論可知, $\mathrm{Spec}\,\triangle^{(q)}_t$ 爲 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 裡的離散子集。這邊 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 是指所有非負實數的集合。對每個正實數 $\lambda\in\mathbb{R}_+$, 令

$$\begin{aligned}&E^q_{\leq\lambda,t}(X):=\oplus_{\mu\in\mathrm{Spec}\,\triangle^{(q)}_t,0\leq\mu\leq\lambda}E^q_{\mu,t}(X),\\&E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X):=\oplus_{\mu\in\mathrm{Spec}\,\triangle^{(q)}_t,0<\mu\leq\lambda}E^q_{\mu,t}(X).\end{aligned}$$

我們需要底下簡單但重要的定理:

定理 3.3. 固定一個正實數$\lambda\in\mathbb{R}_+$. 對每個$q=0,1,2,\ldots,n$, 我們有

$$\sum_{j=0}^q(-1)^{q-j}\dim E^j_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)=\dim\big(d_tE^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)\big),$$

其中 $d_tE^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)=\{d_tu;\ u\in E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)\}$。

證明: 固定一個 $r=0,1,2,\ldots,n$, 考慮這個映射:

$$\begin{aligned}T^r:E^r_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)&\to E^{r+1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X),\\u&\to d_tu.\end{aligned}$$

透過簡單的計算可得知 T^r 爲恰當定義 (well-defined) 的映射。給定一個 $u \in \operatorname{Ker} T^r$。我們把 u 寫成 $u = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$, 其中對每個$j = 1, \ldots, N$, 我們有 $\triangle_t^{(r)} u = \mu_j u$, $0 < \mu_j \leq \lambda$, 且 $\mu_1, \ldots, \mu_N$ 均爲不同的值。因爲 $u \in \operatorname{Ker} T^r$, 我們有

$$d_t u = d_t u_1 + \cdots + d_t u_N = 0.$$

透過簡單的計算不難看出$d_t u_1, \ldots, d_t u_N$爲線性獨立的函數。因此, $d_t u_j = 0$, 對所有的 $j = 1, 2, \ldots, N$。固定一個 $j = 1, 2, \ldots, N$, 我們有

$$u_j = \frac{1}{\mu_j} \triangle_t^{(r)} u_j = \frac{1}{\mu_j}(d_t d_t^* + d_t^* d_t) u_j = \frac{1}{\mu_j} d_t (d_t^* u_j). \tag{11}$$

令

$$v = \frac{1}{\mu_1} d_t^* u_1 + \cdots + \frac{1}{\mu_N} d_t^* u_N.$$

從 (11), 不難看出 $v \in E^{r-1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)$ 且 $d_t v = u$。我們已證明了

$$\operatorname{Ker} T^r \subset d_t E^{r-1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X). \tag{12}$$

因爲 $d_t^2 = 0$, 我們顯然有

$$d_t E^{r-1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) \subset \operatorname{Ker} T^r. \tag{13}$$

從(12)及(13), 我們得到

$$\operatorname{Ker} T^r = d_t E^{r-1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) = \operatorname{Im} T^{r-1}. \tag{14}$$

我們固定一個 $q = 0, 1, 2, \ldots, n$. 從 (14), 我們有

$$\begin{aligned}
\dim\left(d_t E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)\right) &= \dim \operatorname{Im} T^q = \dim E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) - \dim \operatorname{Ker} T^q \\
&= \dim E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) - \dim \operatorname{Im} T^{q-1} \\
&= \dim E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) - \dim E^{q-1}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) + \dim \operatorname{Ker} T^{q-1} = \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \dim E^j_{0<\mu\leq\lambda,t}(X).
\end{aligned} \tag{15}$$

我們得到此定理。 $\square$

對每個 $q = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\dim\left(d_t E^q_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)\right) \geq 0$ 且當 $q = n$ 時, $\dim\left(d_t E^n_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)\right) = 0$。從這個簡單的觀察及定理 3.3, 我們得到

推論 3.4. 固定一個正實數$\lambda \in \mathbb{R}_+$. 對每個$q = 0, 1, 2, \ldots, n$, 我們有

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \dim E^j_{0<\mu\leq\lambda,t}(X) \geq 0, \tag{16}$$

且當$q=n$時, 我們有
$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{q-j}\dim E^{j}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X)=0. \tag{17}$$

我們現在可證明

定理 3.5. 固定一個正實數 $\lambda\in\mathbb{R}_+$,

(I) 對所有的 $q=0,1,\ldots,n$, 我們有
$$\mathrm{dim}H^{q}_{t}(X)\leq\mathrm{dim}E^{q}_{\leq\lambda,t}(X). \tag{18}$$

(II) 對所有的 $q=0,1,\ldots,n$, 我們有
$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\mathrm{dim}H^{j}_{t}(X)\leq\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\mathrm{dim}E^{j}_{\leq\lambda,t}(X), \tag{19}$$

且$q=n$時我們有等式, 也就是說

(III)
$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\mathrm{dim}H^{j}_{t}(X)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\mathrm{dim}E^{j}_{\leq\lambda,t}(X). \tag{20}$$

證明: 因爲 $\mathrm{dim}H^{q}_{t}(X)$ 爲特徵值爲 0 的維數而 $\mathrm{dim}E^{q}_{\leq\lambda,t}(X)$ 爲特徵值爲小於或等於 λ 的維數, 所以 (18) 成立。

我們有
$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\mathrm{dim}H^{j}_{t}(X)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\mathrm{dim}E^{j}_{\leq\lambda,t}(X)-\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\mathrm{dim}E^{j}_{0<\mu\leq\lambda,t}(X). \tag{21}$$

從 (21), (16) 及 (17), 我們立刻得到 (19) 及 (20)。 □

定理 3.5 及其衍生出來的概念推動了現代幾何分析學的發展。從一般幾何分析的理論上來說, 非常不容易準確的估計特徵值爲 0 的空間。定理 3.5 給了我們許多的彈性. 我們可試著估計 $\dim E^{q}_{\leq\lambda,t}(X)$ 對某個 λ 甚至可使 λ 依賴於 t, 從而得到有關 $\dim H^{q}_{t}(X)$ 的估計。我們可利用一般偏微分方程的工具證明如下的定理:

定理 3.6. 我們可找到一個常數 $C>0$ 及 $t_0>0$ 使得當 $t\geq t_0$ 時, 對所有的 $q=0,1,2,\ldots,n$, 我們都有
$$\dim E^{q}_{\leq e^{-Ct},t}(X)=m_q.$$

從定理 3.6 及定理 3.5, 我們立即得到定理 2.2 從而得到定理 1.3。本文最後一節就是要來證明定理3.6。證明定理 3.6 的過程中, 我們需要一些基本的偏微分方程的工具。因此, 在本文最後一節中, 讀者可學習到如何用基本的偏微分方程的工具來研究幾何學上的問題。

4. 定理 3.6 的證明

我們首先證明存在一個常數 $C > 0$ 及 $t_0 > 0$ 使得當 $t \geq t_0$ 時, 對所有的 $q = 0, 1, \ldots, n$, 我們都有 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \geq m_q$。證明的思路是想辦法在這個空間 $E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)$ 內造出 m_q 個線性獨立的函數. 如此一來就可說明 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \geq m_q$。接下來就用一些標準估計的方法證明 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \leq m_q$, 我們就完成定理 3.6 的證明。

我們固定一個 $q = 0, 1, 2, \ldots, n$。給定一個 $p \in \mathrm{Crit}\,(f, q)$, 在 U_p 內, 我們總是假定 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 爲滿足 (10) 的一組局部座標系且 $x(p) = 0$。選定一個分割函數 (cut-off function) $\chi \in C^\infty_0(U_p)$ 使得 χ 在 p 點附近爲 1。令

$$v(x) = e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\chi(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_q \in \Omega^q_0(U_p) \subset \Omega^q(X), \tag{22}$$

其中 $\Omega^q_0(U_p)$ 代表著所有在 U_p 內取值在 q 形式 (q-form) 且有緊緻支集 (compact support) 的平滑截影 (smooth sections) 的集合, $|x| = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$。對每個 $f \in \Omega^q(X)$, 我們用 $\|f\|$ 代表著 f 的 L^2 範數, 也就是說 $\|f\|^2 := (\, f \,|\, f\,)$。我們有以下的引理:

引理 4.1. 固定一個$j = 1, 2, \ldots$。我們可找到一個常數 $C_j > 0$ 及 $t_0 > 0$ 使得當 $t \geq t_0$ 時, 我們有

$$\left\|(\triangle^{(q)}_t)^j v\right\| \leq e^{-C_j t}. \tag{23}$$

透過一些直接且簡單的計算, 我們不難得到引理 4.1。我們省略引理 4.1 的證明, 有興趣的讀者可參考 [3]。

我們現在固定一個 $0 < C < C_1$, 其中 $C_1 > 0$ 是出現在引理 4.1 的常數。我們把 $L^2_q(X)$ 記爲 $\Omega^q(X)$ 對內積 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ 的完備空間 (the completion of $\Omega^q(X)$ with respect to $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$)。令

$$P^q_{\leq e^{-Ct}} : L^2_q(X) \to E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \tag{24}$$

爲對內積 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ 的垂直投影映射 (orthogonal projection with respect to $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$)。令

$$\beta := P^q_{\leq e^{-Ct}} v \in E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X). \tag{25}$$

我們有如下重要的定理:

定理 4.2. 我們可找到一個常數 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $t_0 > 0$ 使得當 $t \geq t_0$ 時, 我們有

$$\sup\{|\beta(x) - v(x)|\,;\, x \in X\} \leq e^{-\varepsilon_0 t}. \tag{26}$$

證明: 這個定理的證明可讓讀者知道如何用基本的偏微分方程的工具來估計函數的大小。我們先引入一些符號。我們先考慮 $\mathbb{R}^n$ 的情形。固定一個 $\mathbb{R}^n$ 的積分元素 $dv(x)$。給定一個 $g \in$

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 對每個非負整數 s, 我們用 $\|g\|_s$ 代表著 g 的 s 階的索博列夫範數 (Sobolev norm of order s)。也就是說

$$\|g\|_s^2 := \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\le s}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}g\right|^2 dv(x),$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 均爲非負整數。利用單位分割 (partition of unity) 的技巧, 對流形 X 上取值在 q 形式的平滑截影 $h\in\Omega^q(X)$, 我們仍然可定義 h 的 s 階的索博列夫範數。我們依然用 $\|h\|_s$ 代表著 h 的 s 階的索博列夫範數。我們回憶一下偏微分方程理論裡的索博列夫不等式 (Sobolev inequalities): 存在一個常數 $\hat{C}>0$ 使得對所有的 $h\in\Omega^q(X)$, 我們有

$$\sup\{|h(x)|\,;\,x\in X\}\le \hat{C}\,\|h\|_{2n}\,. \tag{27}$$

值得提醒讀者的是, 在(27)中, 範數 $2n$ 不是最好的常數。但在這邊, $2n$ 已足夠我們使用。

回到我們的情形。我們將要利用 (27) 來估計 $\sup\{|\beta(x)-v(x)|\,;\,x\in X\}$。由偏微分方程理論裡的哥丁不等式 (G$\mathring{a}$rding inequalities), 我們有

$$\|\beta-v\|_{2n}=\left\|(I-P^q_{\le e^{-Ct}})v\right\|_{2n}\le\widetilde{C}t^N\Big(\sum_{j=1}^n\left\|(\triangle_t^{(q)})^j(I-P^q_{\le e^{-Ct}})v\right\|+\left\|(I-P^q_{\le e^{-Ct}})v\right\|\Big), \tag{28}$$

其中 $\widetilde{C}>0$ 及 $N>0$ 均爲和 t, β 及 v 無關的常數。由 (28) 及引理 4.1 可知, 存在一個常數 $\varepsilon_1>0$ 及 $t_1>0$ 使得當 $t\ge t_1$ 時, 我們有

$$\|\beta-v\|_{2n}\le e^{-\varepsilon_1 t}+\left\|(I-P^q_{\le e^{-Ct}})v\right\|. \tag{29}$$

又由基本的譜理論 (spectral theory), 我們可知

$$\left\|(I-P^q_{\le e^{-Ct}})v\right\|\le e^{Ct}\left\|\triangle_t^{(q)}v\right\|\le e^{(C-C_1)t}, \tag{30}$$

其中 $C_1>0$ 是出現在引理 4.1 的常數。(從(30), 讀者可知我們爲何要選 $0<C<C_1$。) 從 (29) 及 (30) 可知, 存在一個常數 $\varepsilon_2>0$ 及 $t_2>0$ 使得當 $t\ge t_2$ 時, 我們有

$$\|\beta-v\|_{2n}\le e^{-\varepsilon_2 t}. \tag{31}$$

從 (31) 及 (27), 我們得到 (26) 並完成此定理的證明。 □

令 $\mathrm{Crit}\,(f,q)=\{p_1,\ldots,p_{m_q}\}$。由定理 4.2 可知, 對每個 $j=1,2,\ldots,m_q$, 存在一個 $\beta_j\in E^q_{\le e^{-Ct},t}(X)$ 使得

$$\beta_j=e^{-\frac{t}{2}|x|^2}\chi(x)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q+O(e^{-\varepsilon_0 t}), \tag{32}$$

其中$\chi\in C_0^\infty(U_{p_j})$ 使得 χ 在 p_j 點附近爲 1。從 (32), 我們不難看出當 t 夠大時, $\beta_1,\ldots,\beta_{m_q}$ 均爲線性獨立的函數。因此 $\dim E^q_{\le e^{-Ct},t}(X)\ge m_q$。我們已證明了如下的定理:

定理 4.3. 存在一個常數$C > 0$及$\widetilde{t}_0 > 0$使得當$t \geq \widetilde{t}_0$時, 我們都有

$$\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \geq m_q.$$

令

$$A = \operatorname{Span}\{\beta_1, \ldots, \beta_{m_q}\}. \tag{33}$$

給定一個$u \in \Omega^q(X)$。我們寫成 $u \perp A$ 如果 $(u \,|\, \beta_j\,) = 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, m_q$。爲了要證明 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X) \leq m_q$, 我們需要如下的定理:

定理 4.4. 我們可找到一個常數$\hat{C}_0 > 0$及$\hat{t}_0 > 0$使得當$t \geq \hat{t}_0$時, 對所有的$u \in \Omega^q(X)$, $u \perp A$, 我們有

$$(\triangle^{(q)}_t u \,|\, u\,) \geq \hat{C}_0 t \,\|u\|^2\,. \tag{34}$$

定理 4.4 的證明由基本幾何分析學上的 L^2 估計及古典調和振盪器的基本性質所組成。我們把證明的精神及概要點出來, 其細節請參看 [3]。

令 $U_0 = X - \bigcup_{p \in \operatorname{Crit}(f)} \overline{U}_p$, 其中 U_p 爲出現在引理 3.2 的臨界點 p 附近的開集。令

$$\mathcal{U} = \{U_0\} \bigcup \{U_p;\, p \in \operatorname{Crit}(f)\}.$$

$\mathcal{U}$ 爲 X 上的一個開覆蓋 (open covering)。考慮一組單位分割

$$\{\varphi_U \in C^\infty_0(U);\, U \in \mathcal{U}\}$$

有如下的性質:

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \varphi^2_U = 1 \tag{35}$$

及

$$\text{在 } \operatorname{supp}\chi \text{ 上}, \ \varphi_{U_p} = 1, \text{ 對所有的 } p \in \operatorname{Crit}(f), \tag{36}$$

其中 $\chi \in C^\infty_0(U_p)$ 爲出現在 (32) 的分割函數。不難證明滿足 (35) 及 (36) 的單位分割一定存在, 我們把細節交給有興趣的讀者。我們需要

引理 4.5. 我們可找到一個和 t 無關的常數 $C_1 > 0$ 使得對所有的 $t \geq 0$ 及所有的 $u \in \Omega^q(X)$, 我們有

$$(\,\triangle^{(q)}_t u \,|\, u\,) \geq \sum_{U \in \mathcal{U}} (\triangle^{(q)}_t (\varphi_U u) \,|\, \varphi_U u\,) - C_1 \,\|u\|^2\,. \tag{37}$$

透過分部積分 (integration by parts) 及一些基本的計算我們可得到 (37)。我們省略證明的細節, 有興趣的讀者可自行把細節補上或參考[3]。

註記 4.6. 若單位分割

$$\{\varphi_U \in C_0^\infty(U);\, U \in \mathcal{U}\}$$

滿足 $\sum_{U\in\mathcal{U}} \varphi_U = 1$ 而不是 $\sum_{U\in\mathcal{U}} \varphi_U^2 = 1$, 一般而言不會有 (37)。選擇單位分割

$$\{\varphi_U \in C_0^\infty(U);\, U \in \mathcal{U}\}$$

滿足 $\sum_{U\in\mathcal{U}} \varphi_U^2 = 1$ 的技巧常出現在幾何分析學上。

我們現在來估計 $(\triangle_t^{(q)}(\varphi_U u)\,|\,\varphi_U u\,)$。當 $U = U_0$ 時, 我們有以下的引理:

引理 4.7. 我們可找到一個常數 $C_2 > 0$ 及 $t_2 > 0$ 使得當 $t \geq t_2$ 時, 對所有的 $u \in \Omega_0^q(U_0)$, 我們有

$$(\triangle_t^{(q)} u\,|\,u\,) \geq C_2 t\,\|u\|^2\,. \tag{38}$$

特別的, 對所有的 $u \in \Omega^q(X)$, 我們有

$$(\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_0} u)\,|\,\varphi_{U_0} u\,) \geq C_2 t\,\|\varphi_{U_0} u\|^2\,, \quad \forall t \geq t_2. \tag{39}$$

證明: 由標準微分幾何上的的Bochner 形式的式子的推導, 我們可得到

$$\triangle_t^{(q)} = \triangle + t^2\,|df|^2 + O(t), \tag{40}$$

其中 $\triangle$ 爲標準的德拉姆算子 (de-Rham Laplaican), $O(t)$ 爲零階的算子。我們省略 (40) 的證明, 有興趣的讀者請參閱 [3]。注意在U_0, $|df|^2$ 恆大於一個正數, 且 $(\triangle u\,|\,u\,) \geq 0$。從這個觀察及 (40), 我們立刻得到對所有的 $u \in \Omega_0^q(U_0)$, 我們有

$$(\triangle_t^{(q)} u\,|\,u\,) \geq \hat{C}(t^2\,\|u\|^2 - t\,\|u\|^2), \tag{41}$$

其中$\hat{C} > 0$爲一個常數。從 (41), 我們立即得到 (38)。 □

要估計 $(\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_p} u)\,|\,\varphi_{U_p} u\,)$, $p \in \mathrm{Crit}\,(f)$, 我們需要古典調和振盪器的基本性質。

4.1. 古典調和振盪器

我們考慮歐式空間 $\mathbb{R}^n$。我們在 $\mathbb{R}^n$ 的切叢 (tangent bundle) $T\mathbb{R}^n$ 上選定一個黎曼度量 (Riemannian metric) 使得 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ 爲一組正么交基底 (orthonormal basis)。我們把這個黎曼度量記爲 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$。跟之前一樣, 我們固定一個 $q = 0, 1, 2, \ldots, n$。根據對偶性, 這個在 $T\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量引出 $\Lambda^q(T^*\mathbb{R}^n)$ 的一個度量。我們也把這個度量記爲 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$。讀者可驗證

$$\{dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q};\, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n\}$$

爲一組正么交基底。令

$$f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \cdots - \frac{1}{2}x_\ell^2 + \frac{1}{2}x_{\ell+1}^2 + \cdots + \frac{1}{2}x_n^2.$$

$T\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量引出 $\mathbb{R}^n$ 上的積分元素 dx 及 $\Omega^q(\mathbb{R}^n) := C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^q(T^*\mathbb{R}^n))$ 上的一組 L^2 內積 $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$。令

$$d_t^* : \Omega^{q+1}(X) \to \Omega^q(X)$$

爲 $d_t := e^{-tf} \circ d \circ e^{tf}$ 根據 $(\cdot\,|\,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ 而衍生出的伴 (adjoint)。我們考慮如下的二階偏微分方程

$$\triangle_{t,\mathbb{R}^n}^{(q)} := d_t d_t^* + d_t^* d_t : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \to \Omega^q(\mathbb{R}^n). \tag{42}$$

值得注意的是, 當 $p \in \mathrm{Crit}\,(f, \ell)$, 在 U_p 內, $\triangle_t^{(q)} = \triangle_{t,\mathbb{R}^n}^{(q)}$。給定一個 $u \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$, 我們寫成 $u \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \bigcap L_q^2(\mathbb{R}^n)$ 如果

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\, u\,|\,u\,\rangle dx < \infty.$$

我們把 $\|u\|_{\mathbb{R}^n}^2$ 記爲 $\int_{\mathbb{R}^n} \langle\, u\,|\,u\,\rangle dx$。令

$$\hat{\beta}(x) = e^{-\frac{t}{2}|x|^2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell \in \Omega^\ell(\mathbb{R}^n).$$

可容易驗證 $\hat{\beta}(x) \in \Omega^\ell(\mathbb{R}^n) \bigcap L_\ell^2(\mathbb{R}^n)$。

底下的兩個定理爲古典調和振盪器的基本性質:

定理 4.8. 假設 $\ell \neq q$。我們可找到一個常數 $C_3 > 0$ 及 $t_3 > 0$ 使得當 $t \geq t_3$ 時, 對所有的 $u \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \bigcap L_q^2(\mathbb{R}^n)$, 我們有

$$(\, \triangle_{t,\mathbb{R}^n}^{(q)} u\,|\,u\,)_{\mathbb{R}^n} \geq C_3 t\, \|u\|_{\mathbb{R}^n}^2\,. \tag{43}$$

定理 4.9. 假設 $\ell = q$。我們可找到一個常數 $C_4 > 0$ 及 $t_4 > 0$ 使得當 $t \geq t_4$ 時, 對所有的 $u \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \bigcap L_q^2(\mathbb{R}^n)$, 我們有

$$(\, \triangle_{t,\mathbb{R}^n}^{(q)} u\,|\,u\,)_{\mathbb{R}^n} \geq C_4 t \Big(\|u\|_{\mathbb{R}^n}^2 - t^{\frac{n}{2}} \left|(\,u\,|\,\hat{\beta}\,)_{\mathbb{R}^n}\right|^2 \Big). \tag{44}$$

定理 4.8 及定理 4.9 可從基本的譜理論及泛函分析導出, 其證明可參看[3]。因古典調和振盪器的理論在現今的幾何分析扮演著重要角色, 我們打算另寫一篇文章介紹給數學傳播的讀者。

有了定理 4.8 及定理 4.9 之後, 我們可證明

引理 4.10. 固定 $p \in \mathrm{Crit}\,(f)$ 但 $p \notin \mathrm{Crit}\,(f, q)$。我們可找到一個常數 $C_5 > 0$ 及 $t_5 > 0$ 使得當 $t \geq t_5$ 時, 對所有的 $u \in \Omega^q(X)$, 我們有

$$(\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_p} u)\,|\,\varphi_{U_p} u\,) \geq C_5 t \left\|\varphi_{U_p} u\right\|^2. \tag{45}$$

證明: 我們把 $\varphi_{U_p}u$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的函數, 且顯然的 $\varphi_{U_p}u\in\Omega^q(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2_q(\mathbb{R}^n)$。注意, 在$U_p$內, $\triangle^{(q)}_t=\triangle^{(q)}_{t,\mathbb{R}^n}$, 且$(\,\cdot\,|\,\cdot\,)=(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{\mathbb{R}^n}$。從這個觀察及定理 4.8, 我們可找到一個常數 $C_5>0$ 及 $t_5>0$ 使得當 $t\geq t_5$ 時, 我們有

$$\begin{aligned}(\triangle^{(q)}_t(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,)&=(\triangle^{(q)}_{t,\mathbb{R}^n}(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,)_{\mathbb{R}^n}\\&\geq C_5t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2_{\mathbb{R}^n}=C_5t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2.\end{aligned}$$

我們已證明了此引理。 □

引理 4.11. 固定 $p\in\mathrm{Crit}\,(f,q)$。我們可找到一個常數 $C_6>0$, $t_6>0$ 及 $\hat{\varepsilon}_0>0$ 使得當 $t\geq t_6$時, 對所有的 $u\in\Omega^q(X)$, $u\perp A$ (我們提醒讀者, A 由 (33) 所給定。), 我們有

$$(\triangle^{(q)}_t(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,)\geq C_6\Big(t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2-e^{-\hat{\varepsilon}_0t}\left\|u\right\|^2\Big).\tag{46}$$

證明: 和上一個引理的證明一樣, 我們把 $\varphi_{U_p}u$ 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的函數, 且顯然的 $\varphi_{U_p}u\in\Omega^q(\mathbb{R}^n)$ $\bigcap L^2_q(\mathbb{R}^n)$。我們要應用定理4.9來證明此引理。從 (44) 的右式可知, 我們要先估計 $\Big|(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\hat{\beta}\,)_{\mathbb{R}^n}\Big|$。我們有

$$\begin{aligned}(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\hat{\beta}\,)_{\mathbb{R}^n}&=(\,\varphi_{U_p}u\,|\,e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}\\&=(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\chi(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}\\&\quad+(\,\varphi_{U_p}u\,|\,(1-\chi(x))e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n},\end{aligned}\tag{47}$$

其中 $\chi\in C^\infty_0(U_p)$ 爲出現在 (32) 的分割函數。因爲 χ 在原點附近爲 1, 所以 $(1-\chi(x))e^{-\frac{t}{2}|x|^2}$ 會呈現指數形式的遞減。由這個觀察不難得知, 存在一個 $\varepsilon_1>0$ 使得

$$\Big|(\,\varphi_{U_p}u\,|\,(1-\chi(x))e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}\Big|\leq e^{-\varepsilon_1t}\left\|\varphi_{U_p}u\right\|.\tag{48}$$

我們現在來估計 $(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\chi(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}$。從 (36), 我們有

$$\begin{aligned}&(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\chi(x)e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}\\&=(\,u\,|\,\chi e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)_{\mathbb{R}^n}\\&=(\,u\,|\,\chi e^{-\frac{t}{2}|x|^2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_q\,)\\&=(\,u\,|\,\beta+O(e^{-\varepsilon_0t})\,)\ \ (\text{我們這邊用到了(26)})\\&=(\,u\,|\,O(e^{-\varepsilon_0t})\,)\ \ (\text{我們這邊用到了 }u\perp A),\end{aligned}\tag{49}$$

其中 $\varepsilon_0>0$ 爲一個常數。從 (47), (48) 及 (49), 我們得到存在一個 $\varepsilon_2>0$ 及 $\widetilde{C}>0$ 使得

$$\Big|(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\hat{\beta}\,)_{\mathbb{R}^n}\Big|\leq\widetilde{C}e^{-\varepsilon_2t}\Big(\left\|u\right\|+\left\|\varphi_{U_p}u\right\|\Big).\tag{50}$$

從定理 4.9 及 (50), 我們可找到一個常數 $\hat{C}_6 > 0$, $\hat{t}_6 > 0$ 及 $\varepsilon_3 > 0$ 使得當 $t \geq \hat{t}_6$ 時, 我們有

$$\begin{aligned}
(\,\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,) &= (\triangle_{t,\mathbb{R}^n}^{(q)}(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,)_{\mathbb{R}^n} \\
&\geq C_4 t\Big(\,\left\|\varphi_{U_p}u\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 - t^{\frac{n}{2}}\left|(\,\varphi_{U_p}u\,|\,\hat{\beta}\,)_{\mathbb{R}^n}\right|^2\Big) \\
&\geq \hat{C}_6\Big(t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2 - e^{-\varepsilon_3 t}\left\|u\right\|^2\Big), \qquad (51)
\end{aligned}$$

其中 $C_4 > 0$ 爲出現在定理 4.9裡的常數。從(51), 我們完成此引理的證明。 □

我們現在可以證明定理 4.4。

定理 4.4 **的證明**: 令 $\hat{t}_0 = \max\{t_2, t_5, t_6\}$, 其中 $t_2 > 0$, $t_5 > 0$, $t_6 > 0$ 爲出現在引理 4.7, 引理 4.10, 引理 4.11 的常數。給定一個 $u \in \Omega^q(X)$, $u \perp A$。從(37), (39), (45)及(46), 我們有

$$\begin{aligned}
(\,\triangle_t^{(q)}u\,|\,u\,) &\geq \sum_{U\in\mathcal{U}}(\,\triangle_t^{(q)}(\varphi_U u)\,|\,\varphi_U u\,) - C_1\left\|u\right\|^2 \\
&= (\,\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_0}u)\,|\,\varphi_{U_0}u\,) + \sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f),p\notin\mathrm{Crit}\,(f,q)}(\,\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,) \\
&\quad + \sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f,q)}(\,\triangle_t^{(q)}(\varphi_{U_p}u)\,|\,\varphi_{U_p}u\,) - C_1\left\|u\right\|^2 \\
&\geq C_2 t\left\|\varphi_{U_0}u\right\|^2 + C_5\sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f),p\notin\mathrm{Crit}\,(f,q)} t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2 \\
&\quad + C_6\sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f,q)}(t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2 - e^{-\hat{\varepsilon}_0 t}\left\|u\right\|^2) - C_1\left\|u\right\|^2, \qquad (52)
\end{aligned}$$

其中 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ 及 $\hat{\varepsilon} > 0$ 爲出現在 (37), (39), (45) 及 (46) 的常數。透過簡單的計算可知, 存在一個 $\widetilde{C} > 1$ 使得

$$\begin{aligned}
& C_2 t\left\|\varphi_{U_0}u\right\|^2 + C_5\sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f),p\notin\mathrm{Crit}\,(f,q)} t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2 \\
&\quad + C_6\sum_{p\in\mathrm{Crit}\,(f,q)}(t\left\|\varphi_{U_p}u\right\|^2 - e^{-\hat{\varepsilon}_0 t}\left\|u\right\|^2) - C_1\left\|u\right\|^2 \\
&\geq \frac{t}{\widetilde{C}}\left\|u\right\|^2 - \widetilde{C}(1 + e^{-\hat{\varepsilon}_0 t})\left\|u\right\|^2. \qquad (53)
\end{aligned}$$

從 (53) 及 (52), 我們完成定理 4.4 的證明。 □

我們現在可以證明定理 3.6。

定理 3.6 的證明: 顯然的, 我們可找到一個 $t_1>0$ 使得對所有 $t\geq t_1$, 我們有 $\hat{C}_0 t>e^{-Ct}$, 其中 $C>0$ 及 $\hat{C}_0>0$ 爲出現在定理 4.3 及定理 4.4 的常數。令 $t_0=\max\{\widetilde{t_0},\hat{t}_0,t_1\}$, 其中 $\widetilde{t_0}$ 及 $\hat{t}_0$ 爲出現在定理 4.3 及定理 4.4 的常數。根據定理 4.3, 我們知道對所有的 $t\geq t_0$, 我們有

$$\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)\geq m_q.$$

我們現在要證明對所有的 $t\geq t_0$, 我們有 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)\leq m_q$. 假設$\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)>m_q$, 對某個$t\geq t_0$. 根據基本的線性代數, 我們知道存在一個非零的函數$u\in E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)$,$u\perp A$. 由定理4.4, 我們有

$$(\triangle^{(q)}_t u\,|\,u)\geq \hat{C}_0 t\left\|u\right\|^2. \tag{54}$$

因爲 u 在這個空間 $E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)$, 由簡單的運算可知

$$(\triangle^{(q)}_t u\,|\,u)\leq e^{-Ct}\left\|u\right\|^2. \tag{55}$$

由 (54) 及 (55), 我們得到 $\hat{C}_0 t\leq e^{-Ct}$. 因爲 $\hat{C}_0 t>e^{-Ct}$, 我們得到矛盾, 因此 $\dim E^q_{\leq e^{-Ct},t}(X)\leq m_q$. 我們已完成定理 3.6 的證明。 □

從定理 3.6 及定理 3.5, 我們立即得到定理 2.2 從而得到古典摩斯不等式。

參考文獻

1. J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. Math. Studies, **51**, Princeton University Press, 1963.
2. E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.*, **17**, 661-692, 1982.
3. 何福軒, 學士論文, 準備中.

—本文作者爲中央研究院數學研究所副研究員—

2016 全國技專院校「文以載數創作獎」作品選集

互補 文 / 鄭婷予

你是我的補角, 能夠恰巧地填補我的銳角;
我是你的補角, 能夠恰巧地填補你的鈍角。
因爲互補, 我們平穩在一起。

—本文作者就讀文藻外語大學法國語文系—