期 望 值 的 申 述

賴 敦 生

壹、前　言

鑒於「期望值」在各種學科中深具運用的功能，本文謹將涉及期望值演算的有關事實，抽取其中易解的事例加以詳述，並歸納它本身所具推演的各種用法，還強調其如何的被應用科學所發揮，進而透析它所隱含的意義。

本文的願望是想用活生生的人文現象或自然景觀述說數學上刻板的定義，使數學不脫離實體生活，俾能達到學以致用的目標，將繁雜的問題簡化而期能爲大衆輕易的接受，對於科學教育的提倡略盡國民應有的責任。

貳、基本概念

我們先對期望值之定義加以介說，以便對往後的問題輕易了解。

令x表一隨機變數，$p\{x=b_j\}=p_j$ 而 $j=1, 2, \cdots, k$且有:

$$\sum_{j=1}^{k} p_k=p_1+p_2+\cdots+p_k=1$$

之特性，其中 p_j 表隨機變數爲 b_j 時相應的機率函數，以此我們定出隨機變數x的期望值，記作：

$$E(x)=\sum_{j=1}^{k} b_j p_j=b_1p_1+b_2p_2+\cdots+b_kp_k$$

這個期望值 $E(x)$ 又可稱爲：x分配的第一次動差，x之中位數，x的數學期望值，x的期望值，x的動差中位等等。**甚至亦可稱爲力臂的平均值。**

是否每種隨機變數x均有它的期望值？

這並非期望值爲0或無限大，而是不予定義。我們可以在掘金問題（Digging for gold）中發現，如假設我們掘金礦，我們發現價值 2^i 元的金子之機率爲 $1/2^i$，$i=1, 2, \cdots$，令 x 表示我們實際挖出的金子的價值，則統計我們無限的挖掘所得的平均值應爲:

$$\sum_{x=1}^{\infty} xf(x)=\sum_{x=1}^{\infty} 2^x \cdot \frac{1}{2^x}=2^1\cdot\frac{1}{2^1}+2^2\cdot\frac{1}{2^2}+2^3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots=1+1+1+\cdots$$

這是無限的平均價值，當然是不可能的事，處理這種問題我們只有用「不予定義」期望值來釋除我們的疑惑。

叁、究竟期望值具有那些應用的功能？

本文謹將涉及期望值演算之有關事例，取其簡而易解之代表問題加以詳述，主要的用意還是要歸納期望值所能推演的方法，強調其本身定義如何的被應用科學所發揮，進而透析其定義所隱含的意義。下列就是分斷的述說:

甲、尋求平均數（不可冒然參與賭博）

期望值就是平均數，在從事一件工作後平均每次所得的報酬也。如我們投擲一骰子，若出現點數爲 x，則可得 x 元的報酬，而投擲一次有時可得 1 元，2 元，3 元，……，6 元不等（依點數而定），我們可用計算尋求這些報酬的平均值，由於出現各點數平均出現的機率爲 $1/6=f(x)$，因此用

$$E(x)=\sum_{x=1}^{6} xf(x)=1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)+4\cdot f(4)+5\cdot f(5)+6\cdot f(6)$$

$$=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3.5$$

此即爲在多次投擲後每次平均所得報酬。如果投擲 1000 次就可得大約 3500 元的報酬，當然這是指正常的投擲應在 3500 元左右的報酬，倘使投擲不公正，當然不會這麼準確，因此若某君每擲一次先繳出四元，則賭 1000 次下來他要付 4000 元，但他能得 3500 元左右的報酬，此君仍然賠錢，所以朋友！要賭博以前先要動點腦筋，算算報酬的平均值，再看自己的投注是否划得來，不過一般被邀的賭者一定是輸定了，因爲主持人已經算好期望值，穩操勝算，才會誘你入賭的。

乙、如何分配比賽獎金才算公平？

在一次比賽中如果出賽者因先後次序會影響勝負，則對報酬要適當的調整，以符合公平原則。

如袋中有 3 白球 2 黑球，今由袋中任取一球，若爲白球，可得報酬 a 元，取出不放回，則甲先取，乙後取的情況下，甲獲勝的期望值爲 $3a/5$ 元，而乙爲 $2a/4$ 元，爲使比賽公平，必須規定先取球者的報酬與後取球者的報酬不等，即

$$\frac{3}{5}a=\frac{2}{4}b \text{（期望值相等）而 } b=\frac{6}{5}a$$

這就是說後取者的報酬應提高爲前取者之報酬 $6/5$ 的倍才合理。亦就是期望值相等之情況下比賽才算公平！

但若比賽係技能的對抗，本身處境有不同，比賽中想提前結束，又要分配獎金，則就應依機率來分配。

如甲、乙兩人打乒乓球賭 16 元，規定先勝 6 次者得此 16 元，假設甲、乙獲勝之機率（每打一場）均爲 $1/2$，今於甲已 4 勝而乙獲 3 勝則此後甲欲獲勝之機率爲

$$p\text{（甲）}=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{連勝二場}}+2\cdot\underbrace{\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]}_{\left(\substack{\text{前二場勝}\\\text{敗各一}}\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{（甲再勝）}}+3\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]}_{\left(\substack{\text{前三場中}\\\text{勝一敗二}}\right)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{（再勝）}}=\frac{11}{16}$$

乙獲勝之機率

$$p\text{(乙)}=1-p\text{（甲）}=1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$$

倘此時比賽不再繼續，則甲應分配獎金 16 元×11/16=11 元，而乙獲得 5 元。——這個期望值就是報酬平分額。

丙、機率和期望值的比較

有時機率，期望值在一個問題中不易分辨，尤其個中意義甚難直覺領悟，下面一個例將助長其間的分別：

10個產品中有 2 個不良品，則任取一個爲不良品之機率爲$\frac{1}{5}$，任取 1 個其爲不良品之期望值爲 $1/5$ 個，即連續取 100 次就大約有$100\times 1/5=20$ 個左右爲不良品。

丁、電動玩具可以玩嗎？（兼談獨立事件的期望值）

日常生活休閒活動，青少年最喜愛涉足電動遊樂場，當然是花錢玩樂，可是其間可以將我們的期望值學以致用。

今有一個電動玩具，有二個電鈕，每按一次會出現神仙、老虎、狗三種不同圖片中之一種，設每種圖片之機率如下：

出現圖片	神仙	老虎	狗
機率	0.1	0.4	0.5

每賭一次（同時按二電鈕）須先付 5 元，且設出現結果**不互影響**（獨立事件），若二張圖片為神仙、老虎、狗同時出現，則依序給50 元，10 元，5 元，其他情形一概不付，即賭一次若出現虎、狗各一則損失預付金 5 元，今賭一次統計平均期望值：

第二鈕圖片 \ 第一鈕圖片	神仙	老虎	狗
神仙	0.01 45元	0.04 －5元	0.05 －5元
老虎	0.04 －5元	0.16 5元	0.20 －5元
狗	0.05 －5元	0.20 －5元	0.25 0元

$$\begin{aligned}E(x)&=45\times0.01+(-5)\times0.04+(-5)\times0.05+(-5)\times0.04\\&\quad+5\times0.16+(-5)\times0.20+(-5)\times(0.05)+(-5)\times0.20\\&\quad+0\times0.25\\&=-1.65(\text{元})\end{aligned}$$

那就是輸 1.65 元，賭 10 次要輸 16 元5角，就這樣我們對電動玩具有點認識，能冒然參戰嗎？

戊、產量如何控制方可得最大利潤？

我們從一餐廳每天製作飯盒說起，設此食堂以 25 元出售一個飯盒（成本為 15 元），而每日所剩飯盒將之遺棄，該店並統計 50 天內之銷售資料如下：

一日售出盒數	220～240	240～260	260～280	280～300	計
(50日內所佔)日數	6	18	20	6	50

1°　平均每天出售飯盒計有：

$$E(x)=\underset{\substack{\downarrow\\ 220\sim240\text{ 之中數}}}{230}\times\frac{6}{50}+250\times\frac{18}{50}+270\times\frac{20}{50}+290\times\frac{6}{50}=260.4$$

2° 製造飯盒 270 盒的那一天可得的利潤爲:

$$\frac{6}{50}(230\times25-270\times15)+\frac{18}{50}(250\times25-270\times15)+\frac{20}{50}(270\times25-270\times15)$$
$$+\frac{6}{50}(290\times25-270\times15)=2400(\text{元})$$

3°. 欲使利益之期望值最大，則必須製作多少個（每日）飯盒?

同 2° 計算每日製作盒數與期望值（利潤）如下:

每日製作盒數	230	250	270	290
平均利潤	2300	2440	2400	2160

故每日製作 250 盒，其利潤期望值最大。

己、學期平均成績的算法就是求學得分的期望值

某生在高三第一學期的成績單如下:

科目	三民主義	國文	英文	數學	化學	物理
每週上課時數	2 小時	4 小時	3 小時	5 小時	3 小時	3 小時
學期成績	72分	78分	84分	78分	80分	92分

1°. 今在該生每週上課時間表內任選一堂課則此堂課恰好在上數學課之機率爲:

$$\frac{\text{每週上數學課時數}}{\text{每週授課總時數}}=\frac{5}{2+4+3+5+3+3}=\frac{1}{4}$$

2°. 上國文課，英文課，化學課，物理課，三民主義課之機率依序爲: 4/20, 3/20, 3/20, 3/20, 2/20,

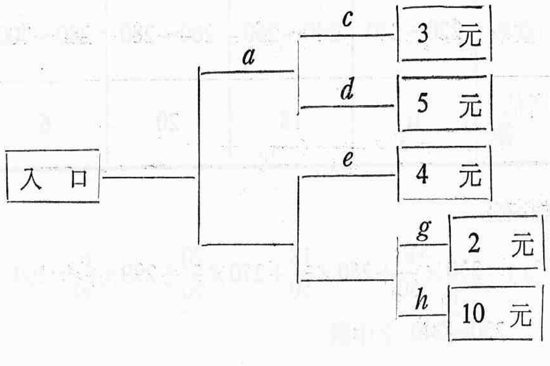
3° 該生一學期來平均得分爲:

$$E(x)=\frac{2}{20}\times72+78\times\frac{4}{20}+84\times\frac{3}{20}+78\times\frac{5}{20}+80\times\frac{3}{20}+92\times\frac{3}{20}=80.7$$

x 表各科得分，那就是隨機變數，活生生的例子。從此不難了解數學亦是生活的內涵。

庚、園遊會的門票如何標價？

合理的門票價格可以使遊客玩得開心，主持人亦不損失，樂於辦理，主客皆大歡喜，頭痛的是如何訂定合理的價格? 下列的例子可以提供參考，圖中所示迷陣式抽獎遊戲，右方出口處各有獎金如圖示，今一



顧客由左方進入由右方出口設其得獎的期望值爲 s 元，（此卽顧客走出來得到的獎金平均數）則顧客走入 a 道之機會爲 $1/2$，再走 c 道之機率爲 $1/2\cdot1/2=1/4$，而走進 d 道，e 道之機率又各爲 $1/4$，至於 g，h 道之機率分爲 $1/2^3=1/8$，所以顧客走出一處的平均得獎額爲:

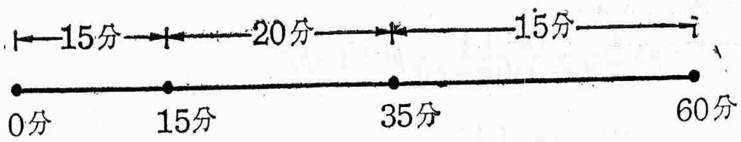
$$E(x)=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot3}_{(a,c)}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot5}_{(a,d)}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot4}_{(b,e)}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2}_{(b,f,g)}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot10}_{(b,f,h)}=4.5\ (元)$$

這是我們已知的事實，我們要訂門票至少每人每張門票要爲 4.5 元以上方不蝕本。

當然這是粗淺的例子，園遊會中顧客所進出的道路要嚴防投機的行爲，做到公正的走法才能達到我們所預估的數字。

辛、候車時間的平均數

這是每日必定遭遇的事情，我們亦來了解一下。設有某路公車於每小時的 0 分，15分，35分，分別開出一輛，今某人事先不知開車時間，則某人來到這公共汽車站等候車，平均所花時間（期望值）之求法爲：先將每一小時分爲三區間，每一區間之候車時間依次爲 15/2 分，20/2 分，15/2 分:



又每區間車子到站之機率分別爲 15/60, 20/60, 25/60，故得某人到站後平均候車時間爲

$$\frac{15}{2}\times\frac{15}{60}+\frac{20}{2}\times\frac{20}{60}+\frac{15}{2}\times\frac{25}{60}=10(分)25(秒)。$$

我們有能力算出平均候車時間，這將給我們在候車時有一般的心理準備，處理事情會比較和諧。可是一般我們的生活不會這樣去估計，不過可以將此例代用到其他事件上，不限定候車問題，所以期望值之功用仍很大。

本文的願望是避免用冗長的公式演算來證實生活上的有趣現象，但爲着期望值在運用上有突破性的功能，不得已在此些微的提一下佈阿松的機率分配，藉此劃開應用的境界，那是非常有趣的。

1° 泰勒氏（Taylor's）級數:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots$$

2° 馬克勞林級數（Maclaulin series）

於 1° 中令 $a=0$ 得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{3!}x^n+\cdots$$

如:

$$f(x)=e^x,\ \because f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

3°. 則

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

所以一個函數 $f(x)$ 是這樣的定義:

$$f(x)=\frac{m^x e^{-m}}{x!},\ x=0,1,2,\cdots\ 其中\ m>0$$
$$=0\qquad x=其他$$

因

$$\sum_x f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x e^{-m}}{x!}=e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!}=e^{-m}\cdot e^m=1$$

（*這顯示機率總和爲 1）

而稱如此的機率分配 $f(x)$ 爲離散型隨機變數X之佈阿松分佈 (poisson distribution)，在二項分佈試驗中 $c(n,r)p^r q^{n-r}$ 若重複次數n是非常的大，而機率p非常小，當 $np=\lambda$時其機率密度函數

$$f_x(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0.1,2,\cdots,$$

此處 $e=2.71828$ 卽

$$\lim_{n\to\infty} c(n,x)\ p^x(1-p)^{n-x}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

而其期望值 $E(x)=\lambda$

證明:

$$E(x)=\sum_{x=0}^{n} xc(n,x)p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$=np\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!}p^y(1-p)^{n-1-y}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$=np=\lambda_{\#} \quad \text{其中 } y=x-1$$

這只是從簡易的一方去理解佈阿松機率分配，實際說法不是這樣簡單，我們強調引用，所以暫且不再細說。

壬、從期望值中求機率

看來這並沒有什麼意義，只是就定義所涉的變元倒裝。但在此處要特別強調普通的一句話，竟藏有很深的數學意義，如:

(i)某打字員平均每頁打出兩個錯字，則他在某一頁打出一個錯字之機率若干?

這是佈阿松分配最典型之例，某人打字字數甚多，卽重複次數非常的大，而打錯一字之機率又很小，使用二項分佈用不上，所以用佈阿松分佈來求解。今由題意:

「平均每頁打出二個錯字」意卽$np=2=\lambda$…期望值

*(n表重複次數，p表打錯機率，n非常的大，p非常的小)

$\because\ f(x)=\dfrac{2^x e^{-2}}{x!}$ $\therefore$ 打錯一字之機率爲$x=1$時。

$f(1)=\dfrac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0.27$……這就是很細緻中求得機率，非常方便，而又可靠。

(ii)某校 140 個班級中，一學年內共有 56 個學生於學年中途辦理休學，則在同一班中共有 2 個學生於同一學年內辦理休學之機率爲何?

因爲要求的是指定在同一班中辦理休學之機率，所以得先求得每班平均有多少人休學，那是:

$$56\times\frac{1}{140}=0.4\ (人)$$

休學，再由佈阿松機率分配

$$f_x(2)=\frac{(0.4)^2e^{-0.4}}{2!}=0.0536$$

這也就是由「平均數」中求得機率。

癸、保險公司之利潤計算

某保險公司的壽險是出售給 25 歲的年青人一年 1000 元，而只需繳保險費一年 10 元，相當於買一張入場劵 10 元，參加摸彩，中獎得 1000 元的道理一樣，現在我們可以至警察機關調查 25 歲至 26 歲的死亡人數及全部青年 (25−26) 之人數這樣可求得 25 歲活至 26 歲的機率，設此機率爲 t，則保險公司的利潤爲

$$10\text{元}\times t-990\text{元}\times(1-t)$$

給付淨額　死亡機率

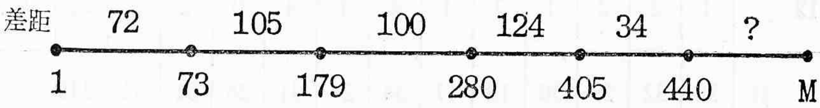
其中的 t 是相當的大，當然被保險人亦就是客戶要很多，保險公司才有利潤可言。

子、由中位數預估總數或透過平均差距求總數

在一組連續正整數中從 1 起連續至某一正整數M，今隨機的抽出任意五個數，假設所取爲 440, 73, 179, 280, 405, 依大小順序排列爲:

(ⅰ)這五個數的中位數就是 280，樣子就像平均數，它等於 $280=(1+M)/2$ (其中M就是正連續整數的總數)，則得 $M=559$，這就是預估的總數。

(ⅱ)還有用差距法預估總數如:



平均差距$=(72+105+100+124+34)/5=87$ (相鄰二數之差的平均) 而

$$M=440+\text{平均差距}=440+87=527$$

亦就是我們預估的總數。

上述二個預估總數方法雖有不同，但我們至少有總數的概念。這種應用據聞在二次大戰期間，盟軍的軍事學家曾用此法預估德軍在某一個戰區的坦克數量 (如上列的數據代表坦克車的編號)，因而決定因應措施，頗有效益。此是平均值，期望值，平均數的使用價值之一。

丑、由統計的數據推定結論

「期望過完生日」的人在生日後才去世的平均人數較多

從一份「四百美國名人錄」一書中 (*Four Hundred Notable Americans*) 節錄348位名人出生和死亡月份之統計資料如下:

死亡月份＼出生月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	小計	%
1	1	①	2	1	2	2	4	3	1	4	2	4	27	7.76
2	2	3	①	3	1	0	2	1	2	2	6	4	27	7.76
3	5	6	5	③	1	0	5	1	2	5	3	1	37	10.63
4	7	6	3	2	①	3	3	1	3	2	4	4	39	11.20
5	4	4	2	2	1	②	4	1	3	2	1	5	31	8.90
6	4	0	4	5	1	1	①	2	1	2	4	0	25	7.18
7	4	0	3	4	3	3	4	①	6	4	2	5	39	11.20
8	4	4	4	4	2	2	3	3	①	1	2	0	30	8.62
9	2	2	1	0	2	0	2	4	2	⓪	5	2	22	6.32
10	4	2	2	3	2	2	2	3	3	1	④	5	33	9.48
11	0	2	0	2	1	1	0	3	3	3	1	⓪	16	4.59
12	1	2	2	1	2	1	4	1	4	0	2	2	22	6.32
小　　計	38	32	29	30	19	17	34	24	31	26	36	32	348	

統計表的說明：

1° 348 位名人中於 1 月份出生的有 38 位，2 月份出生的有 32 位，餘類推。

2° 1 月份死亡的有 27 位，佔總數的 7.76％，三月份死亡的有 37 位，佔總數的 10.63％，…等。

3° 38 位一月生的名人平均將有 6.32％ 死於十二月。32 位二月出生的名人平均將有 7.76％ 死於一月。

4° 如果死亡與生日無關，則名人於生日的前一個月份死亡的平均人數是

$$\begin{aligned}&38\times6.32\%+32\times7.76\%+29\times7.76\%+30\times10.63\%\\&+19\times11.20\%+17\times8.90\%+34\times7.18\%+24\times11.20\%\\&+31\times8.62\%+26\times6.32\%+36\times9.48\%+32\times4.59\%\\&=28.3\ (\text{人})\end{aligned}$$

5° 表中實際於出生前一個月死亡的名人僅有（打圈的數字和）

$$1+1+3+1+2+1+1+1+0+4+0=16\ (\text{人})$$

6° 假設名人出生前後任一個月份死亡的機率均為 1/12， 則 348 位名人於生日前一個月份的死亡機率為 1/12， 死亡的人數平均為 348/12=29.0（人）

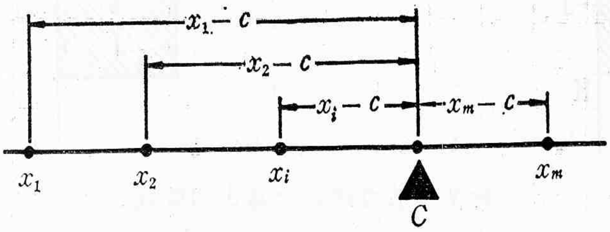
7° 第 4°，6° 款的統計人數很接近，何以第 4°,6° 款和第 5° 款會相差 12 人？那就是迫切的期待「做壽」強烈的生之意識可以延緩死亡的日期，使之稍微的後移。這就是由統計的數據推定的結論。

寅、用於物理學——力矩、質心——平均力臂

$x-c$ 的期望值，通常稱之為 x 在 c 點的力矩，這個名詞是由演算

$$E(x-c)=(x_1-c)f(x_1)+(x_2-c)f(x_2)+\cdots+(x_m-c)f(x_m)\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$ 而得。

式中 c 是一槓桿支點。 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ 處各置放



重量為 $f(x_i)$ 的物品， $i=1,2,\cdots\cdots,m$.

此時 $E(x-c)$ 表各物品的總重量距 c 點的平均距離，亦即距 c 點 $x-c$ 距離處放下物品的總重量與上列的物品置法是一樣的。

物理學上稱上式Ⓐ為那些物品（強調質量）對 c 點的**力矩**。當 $E(x-c)=0$ 表示 c 點恰為質量中心，此時 c 點雙方平衡不會轉動，亦就是力矩和為 0 。$E(x)=C$

重心的求法 這是利用上述力矩的原理，用來推測重心的平均距。

設位於坐標平面 n 個質點 $p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2), p_3(x_3,y_3), \cdots, p_n(x_n,y_n)$ 其質量分別為 $m_1, m_2, \cdots, m_n$, 其對 x 軸之力矩 M_y 和對 y 軸之力矩 M_x 分為

$$M_x=m_1y_1+m_2y_2+\cdots\cdots+m_ny_n=\sum_{i=1}^{n}m_iy_i \text{（以 0 點為支點）}$$

$$M_y=m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n=\sum_{i=1}^{n}m_ix_i \text{（以 0 點為支點）}$$

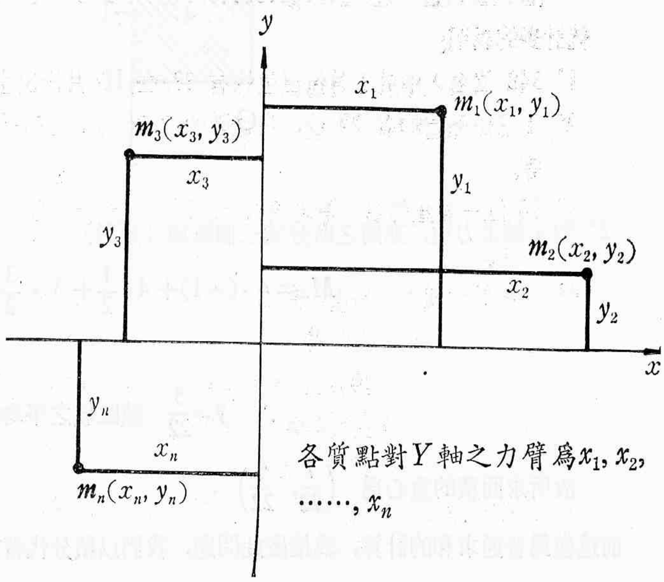
且若 n 個質點之質量均集中在點 $(\bar{x},\bar{y})$ 處，則對 y 軸，x 軸之力矩分為

$$(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n)\bar{x}=M_y$$
$$(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n)\bar{y}=M_x$$

$$\therefore \text{點}(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{M_y}{m_1+m_2+\cdots+m_n}, \frac{M_x}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)$$

（特稱此點為諸質點之質心），特別重要的是各質點距 y 軸、x 軸之平均距離分為 $\bar{x}, \bar{y}$（平均力臂）

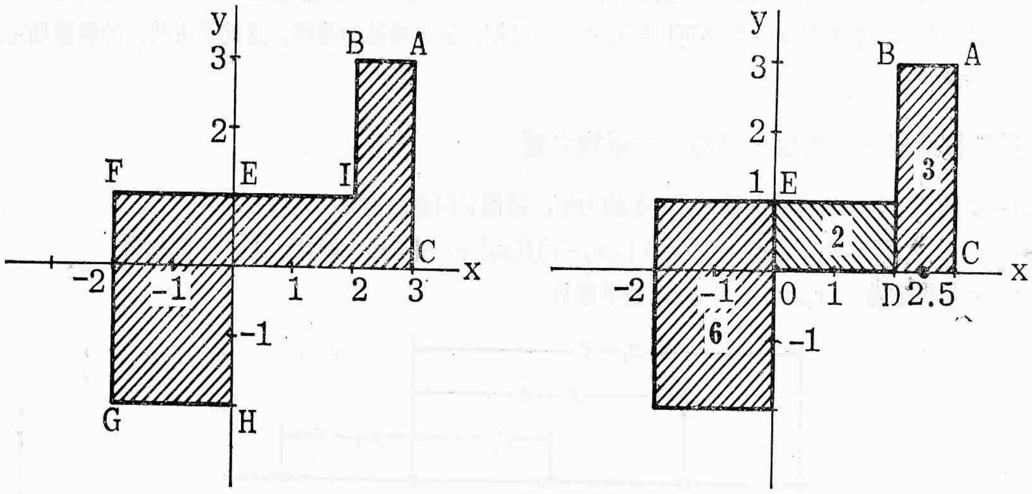
註： 此處先計算各質點的平均質心，以後再推廣為重心。



EX: 比如說下圖斜紋區域面積的重

心如何求呢?

註: 此處假設面之重心與質量中心重合，因可視此區域爲一密度均匀的薄片。

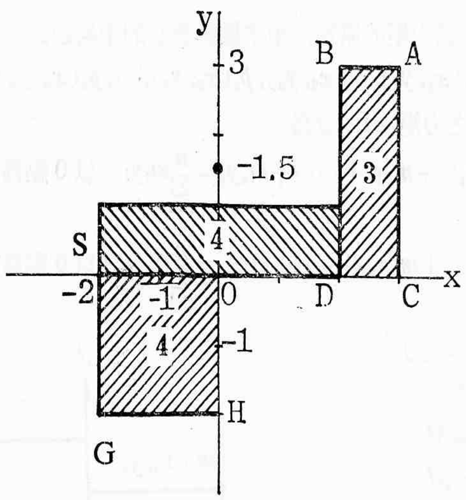


對 y 軸求力矩區分爲3個區域

1° 對 y 軸求力矩，先將之分爲三個矩形區域如圖。而

$$M_y=6\cdot(-1)+2\cdot(1)+3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=(6+2+3)\cdot\bar{x}$$

$\therefore\ \bar{x}=\frac{7}{22}$ 爲該區域之平均 x 坐標（力臂）



2° 對 x 軸求力矩，亦將之區分爲三個區域（矩形）

$$M_x=4\cdot(-1)+4\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{3}{2}=11\cdot\bar{y}$$

4: □OHGS之面積
(−1): 平均縱標
3: □ABDC之面積
3/2: 平均縱標

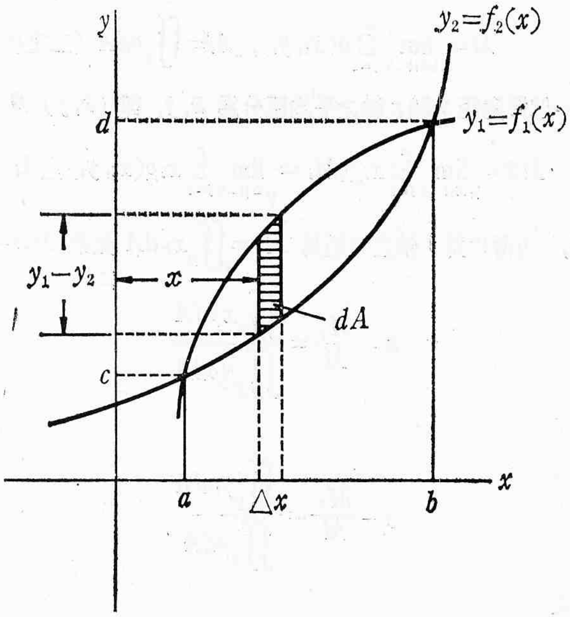
$\therefore\ \bar{y}=\frac{5}{22}$ 該區域之平均縱標

故所求面積的重心爲 $\left(\frac{7}{22},\ \frac{5}{22}\right)$

前述僅爲普通求和的計算，爲推廣此問題，我們以積分代替求和公式。

1. 利用積分求平均距離

如下圖爲由二曲線 $y_1=f_1(x), y_2=f_2(x)$ 各在區間 $[a,b]$ 內所圍成之區域，設其單位面積之質量爲 k，則 kdA 表示單元面積 (element of area) 之質量，又設 x 爲對 y 軸之力臂，故其對 y 軸之力矩爲 $(kdA)x$。但 $dA=(y_1-y_2)dx$ 故力矩可寫成 $xk(y_1-y_2)dx$。而



$$\int_a^b xk(y_1-y_2)dx=k\int_a^b x(y_1-y_2)dx=M_y$$

爲對 y 軸之力矩和。倘使設所有單元面積之質量距離 y 軸之平均距離爲 $\bar{x}$ 單位則總力矩就是

$$kA\ \bar{x}=\int_a^b x(y_1-y_2)dx, \text{但} A=\int_a^b(y_1-y_2)dx$$

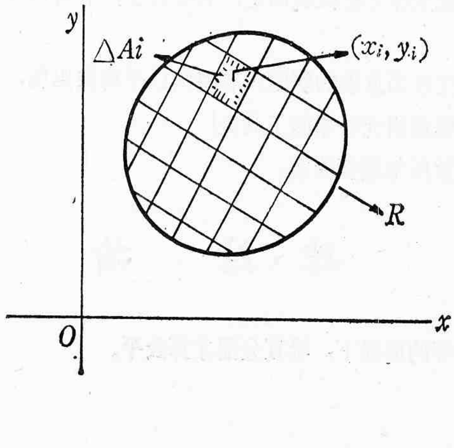
$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{\int_a^b x(y_1-y_2)dx}{\int_a^b(y_1-y_2)dx}$$

同理此區域之質量對 x 軸之平均距

$$\bar{y}=\frac{\int_c^d y(x_2-x_1)dy}{\int_c^d(x_2-x_1)dy}$$

我們因稱點 $c\ (\bar{x},\bar{y})$ 爲此區域的質心（均勻薄片又稱爲重心）那仍是**平均數**，是全區域各質點距 y 軸，x 軸的平均距離。

2. 應用二重積分求質心



設 xy 平面上有一薄片，其密度隨着點 (x,y) 不同之位置而定以 $\rho(x,y)$ 表之。

今將區域R分爲n個小薄片，其面積分別以 $\triangle A_1,\triangle A_2,\cdots,\triangle A_i,\cdots,\triangle A_n$ 表示。令每個小薄片中之任一點 (x_i,y_i) 屬於 $\triangle A_i$，則 $\triangle A_i$ 之質量之近似值爲:

$$\triangle M_i=\rho(x_i,y_i)\triangle A_i$$

而此區域R之總質量就是:

$$M=\lim_{\|\triangle\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)\triangle A_i=\iint_R \rho dA \text{ (二重積分表示)}$$

我們假定薄片R之**每一個質點距y軸x軸之平均距分爲** $\bar{x},\bar{y}$，**即** $(\bar{x},\bar{y})$ **爲R之質心，則:**

$$M\bar{x}=\lim_{\|\triangle\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i\triangle M_i=\lim_{\|\triangle\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i\rho(x_i,y_i)\triangle A_i$$

$\therefore$ $M\bar{x}=\iint_R x\rho dA$，而薄片對$y$軸之力矩爲 $M_y=\iint_R x\rho dA$ 是故 $M\bar{x}=M_y$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_R x\rho dA}{\iint_R y\rho dA}$$

同理：

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_R y\rho dA}{\iint_R \rho dA}$$

而所求薄片的質心就是

$$\left(\frac{\iint_R x\rho dA}{\iint_R \rho dA},\ \frac{\iint_R y\rho dA}{\iint_R \rho dA}\right)$$

3. 引用三重積分求物體之重心（設爲均勻密度之物體）

設有一物體在三維空間中佔有區域V，具有其連續密度 $\rho(x,y,z)$，則此連續體之質量爲

$$M=\iiint_V \rho dv$$

又設 M_{yz},M_{zx},M_{xy} 分別表此連續體對於 yz 平面，zx 平面，xy 平面的力矩，則 $M_{yz}=\iiint_V x\rho dv$, $M_{zx}=\iiint_V y\rho dv$, $M_{xy}=\iiint_V z\rho dv$ 再設 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 爲此連續體的質量中心（重心）（平均坐標距）則

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iiint_V x\rho dv}{\iiint_V \rho dv},\quad \bar{y}=\frac{M_{zx}}{M}=\frac{\iiint_V y\rho dv}{\iiint_V \rho dv},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iiint_V z\rho dv}{\iiint_V \rho dv}$$

註: 1°. $\rho=1$時則 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 代表幾何圖形的重心或形心，

2°. 平均距（力臂）視坐標系的位置而定，有時爲正，有時爲負或0，而力矩可爲正值，負值或零。

由是我們了解期望值的解說，往往因意義的演變，有時又以平均數出現，甚至延伸至平均坐標，力臂，用途可謂甚多。數學——難怪被稱爲研究科學的工具矣!

限於篇幅，不再多列，謹就所知選樣陳述。

肆、結　　論

1° 在參考個體期望值相等的前提下，獎賞分配才算公平。

2° 畢竟不能冒然參與賭博。使人人均能了解賭博之期望值的意義，那麼人類社會將不會再發生因賭而釀成的悲劇。

3° 生產成本，投資與報酬額，利潤之多寡亦可由期望值的演算中求得。

4° 僅由零星的幾件樣本，透過平均數的演算，還能預估總數，對於軍事情報亦已經有它的價值。

5° 統計數據可以推定結論，可以解釋人文現象。

6° 一物體重心之位置坐標也可說是力臂（距支點之平均值）的平均值。

伍、參考資料

1° *Advanced Engineering Mathematics*, Erwin Kreyszig.

2° *Probability and Statistics* Blum, Rosenblatt.

3° **理論力學**，徐氏基金會

Introduction to Mathematical Statistics, Hogg, craig.

5° *Calculus With Analytic Geometry*, Abraham Spitzbart.

6° **統計能爲你做些什麼**。科技發展小組.

7° **機率論**。黃提源.

8° *Elementary Probability Theory With stochastic process* Kai Lai Chung.

——本文作者現任教於台北建國中學