※教與學※

課　堂　上

葉東進

高中數學要怎麼教，目前是個熱門的話題，有所謂行爲目標教學法、點渡教學法，多廻路教學法等等立說。理論大家都懂，人人會說，但在課堂上，面對教材的當兒，又是如何實際教來？這才是眞眞確確該面對的問題，值得研究、討論。

想「數學傳播」發刊當初，旨一便要在各位老師面前置上麥克風，無非希望老師們能提供教學的心得，提出可討論的素材，甚至可爭議的教學方法，但觀諸十二期來的「數播」，此類文章是很少不用說，便是連反響的討論都出奇的淸淡。記得上教學法時，首次接觸到「教學是一種藝術」這個觀念，當時無法瞭解其義，數年後，自己實際參與了教學才深深體會其中的深刻涵義。既然是一種藝術，便當因人而有不同的表現，卽是說教學雖然是遵行了某些基本原則，但更重要的乃是因教者的個性而表現出不同的創意。奈何現今課堂上的許多工作大多偏於形式的堆砌，而有模式硬化的趨勢。教書如果不再是一種富於創意的藝術而淪爲可大量生產（諸如唱片、錄音帶等）的商業品，則受害的又豈止是學生而已。今天的形式化教學，其背景，其遠因近因，有心人自是一目了然，不用我來贅言。但我仍然要大聲疑問：教學的個性哪裏去了？

止於疑問，於事何濟？爲什麼不現出課堂上的個性？

因此，願藉「數播」一角，撒播幾粒種子，切盼大家的熱心參與。鼓掌也好，譏評也好，不要止於鼓掌，不要止於譏評，大家同耕作，大家齊收穫。

一、高一生

面對剛跨入高中的新生，如何做啓發他們數學智慧的第一步？

告訴他們一個正確的觀念：不是抄筆記，而是作筆記！如果大家只是儘抄着黑板上所寫的東西，那麼應在影印如此發達的今天，一人抄其他人拿去拷貝便可。有些人三年畢業考上大學後，認爲三年的數學只是一場惡夢，於是把課本、參考書、筆記付之一炬。想想，爲何辛苦三年的筆記，竟不足一惜的放火一燒，可憐焦紙！仔細探究，畢竟那樣子抄來的東西，沒有自己的思想，缺乏踏實的耕耘，你抄的跟他抄的，大家統統一樣，就是沒有自己的個性！筆記應該是自己的筆記，應該是自己刻骨銘心的經營的成果，應當是自己的心路歷程，應當展現出自己心血的痕跡。因此作筆記的正確方法該是：上課仔細聽講，至要點處，將之大要記於筆記簿上；回家後就簿上所記大要，重新思考，理出來龍去脈後，重新整理寫在另一簿上。此時簿上所寫的便是經過自己苦心經營的東西。過段較長時間，再拿出看看，溫故知新，那種思考上日新月異的進步，激引出的成就感，要說這樣子還不能讓一個人對它發生興趣，甚至浸淫其中，那實在令人不信。我甚至鼓勵學生帶錄音機，錄下課堂上所講的，對於那些反應比較不敏的，這是一個有效的方法，經由第二次的聽講，甚至第三次、第四次……，再配合筆記上的大要，若說還不能由此而自己敍述些多多少少的感覺，理出些多多少少的東西，委實令人難於置信。

每一種高一上的數學課本，多多少少總會提到中學數學教育的目的，高中數學的主要內容，數學精神及數學方法。我以爲方法是伴隨在內容中，精神則是貫穿於各個內容內。因此當一開始，便再三說明精神如何，方法如何等等是沒有必要的，應該在以後的各個不同教材出現時反覆提出。譬如「以簡御繁」這個

數學的基本精神不止是蘊涵在一個大題材中，一個單元中，甚至連一道小小的問題都有它的影子。精神是方法的基礎，它引導我們看淸問題的方向，有了方向，便有方法。因此在往後的數學中，不論是解一道問題或提出一個新的題材，都應該隨時隨地向學生指出「以簡御繁」的精神在題材、問題的處理中所扮的角色與所展示的力量，經過長久時日，潛移默化，數學精神便能夠生根於學生的腦海中。

有別於日常語言的數學語言乃數學抽象化所必需。向空中丢一石頭，探討該石頭的最高距離；用一定長的繩索圍一矩形土地，探求其最大面積；做三次的市場調查，取得售價與銷售量的關係，因而尋求銷售的最高量；這三件看來是截然不同的事件，從數學的觀點來看，其實是一樣的二次方程的求極值問題。數學的抽象在此，它的本質在此，它的能夠廣泛應用的理由亦在此，這是必須向學生特別指出的。有的人三年的數學生涯中，受困於數學的形式而迷惑不淸，成天在公式堆裏覓食而難飽，便是在開始時乏人指點而致迷失方向。

高一的題材內有簡易邏輯一項，我不同意向高一學生介紹眞值表。第一個理由是它不自然，第二個理由是它沒有必要介紹。要教給學生的是只要他們能夠知道什麼樣的推理算是正確，什麼樣的推理是不正確。由於數學的探究因果關係，什麼因，產生什麼果？果來自於何因？因此條件的是否充分、必要乃是一個重要課題。提醒學生從一些已知的因果關係去聯想是否還有其他可能的關係，是讓他們學習探索並獲取廣量知識的一個可行方法，譬如當知道 $p \Longrightarrow q$ 時，還要聯想：$\sim p \Longrightarrow \sim q$ 嗎？爲什麼？$\sim p \Longrightarrow q$ 不行嗎？爲什麼？不斷的問自己：爲什麼？不斷的給「爲什麼」找出答案。

不要讓學生玩邏輯符號，也不必玩弄邏輯符號給學生看。

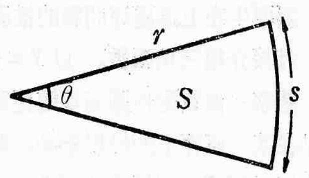
對高中數學來說，集合應該只是一個方便敍述的工具而非目的，不要嚇唬學生說要介紹集合「論」，高中生要用到集合論那眞是欺人之語。既然只是工具，教導學生如何正確地使用它的基本語言便可。沒有必要玩集合符號的魔術，讓學生淸楚的知道集合在高中數學所扮的角色及所運用的範圍是件必要而有用的事。

二、高 二 生

首先是弧長與扇形面積的計算：

小學、國中階段已學得下列的情形：

	θ（圓心角）	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
r（已知半徑）	s（弧　長）	0	$\frac{\pi}{2}r$	πr	$2\pi r$
	S（扇形面積）	0	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	πr^2



s 與 S 顯然都是 θ 的函數，由上列數據，我們有信心推測 s 與 S 都是 θ 的線性函數（注意！只是推測。）

因而，令 $s=\triangle\cdot\theta$，$S=\square\cdot\theta$，其中△與□都是待定的常數

由上列數據計算出 $\triangle=r$，$\square=\frac{1}{2}r^2$，而有

$$s=r\cdot\theta \text{ 及 } S=\frac{1}{2}r^2\cdot\theta$$

其次是解三角形的問題：

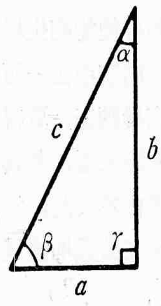
國中階段他們已學得如何解直角三角形的問題

(i)已知 a，b（兩邊一夾角），求 c，α 及 β

(ii)已知 a，α（兩角一對邊），求 b，c 及 β

(iii)已知b，α（兩角一夾邊），求a，c及β

(iv)已知a，c（兩邊一對角），求b，α及β



$\gamma=90°$

上列不同的問題已知情況雖異，但整理後知問題的共同性是:

(i)已知三角形的三元素（含一直角），求出其他三元素

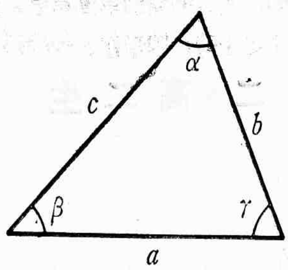
(ii)利用商高定理（$c^2=a^2+b^2$）求邊長

(iii)利用正弦的定義 $\sin\alpha=a/c$ 及$\sin\beta=b/c\Longrightarrow a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma(=1)$ 求邊長或角。

解三角形的問題其實是解直角三角形問題的推廣，因而聯想:

上述所列問題的三個共同性是否仍出現在解一般三角形的問題上，或是有必要予以某種形式的推廣?

餘弦定律（$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$）及正弦定律（$a/\sin\alpha=b/\sin\beta=c/\sin\gamma$）便是在此背景下應運而生。



讓學生在上述處理問題的推廣中，體會出「以簡御繁」的數學精神，確是一個恰當時機。

最後介紹三角函數。以$y=\sin x$為例，觀察一個質點作圓周等速運動時，該質點在某一直徑上的投影變動，藉這個變動的探討而研究週期性的函數，這是激發學生動機的一個很好的入手法。（參看「數播」第二卷第二期， p. 54 預習三角函數一文）

由易入繁，在此先介紹函數圖形的相似變換:

令函數$y=f(x)$在座標平面上的圖形爲Γ，則有:

(i)將Γ沿正x軸方向平移$\alpha(\alpha>0)$單位即得$y=f(x-\alpha)$的圖形（圖一）（當$\alpha<0$時，則沿正x

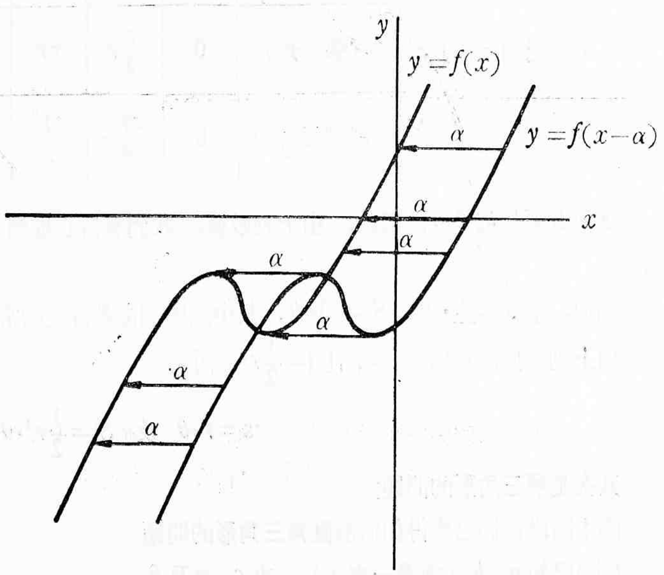


圖 一

軸反方向平移）

（ⅱ）將Γ沿正y軸方向平移 $\beta(\beta>0)$ 單位卽得$y-\beta=f(x)$的圖形。（圖二）（當$\beta<0$時，卽沿正y軸反方向平移）

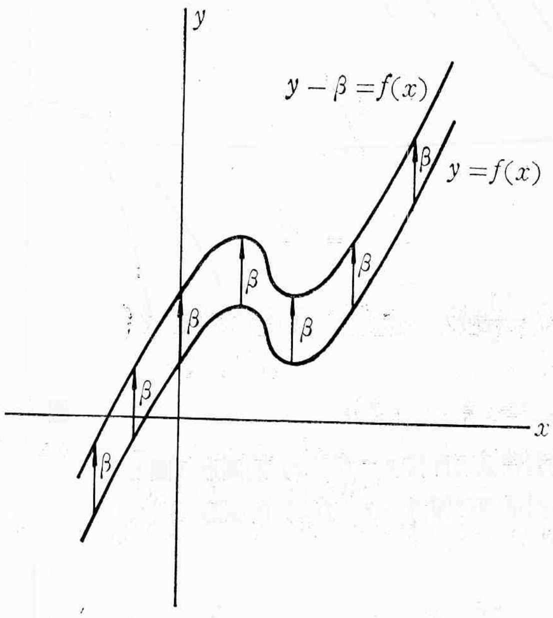


圖 二

（ⅲ）以y軸爲定軸，將Γ作一變動，使x的變動單位爲原x變動單位的 $1/\lambda$ 倍卽得 $y=f(\lambda x)$ 的圖形（圖三，圖四）（當$0<\lambda<1$時，圖形往x軸的兩個反向膨脹；當$\lambda>1$時，圖形往x軸上的O點相向收縮）

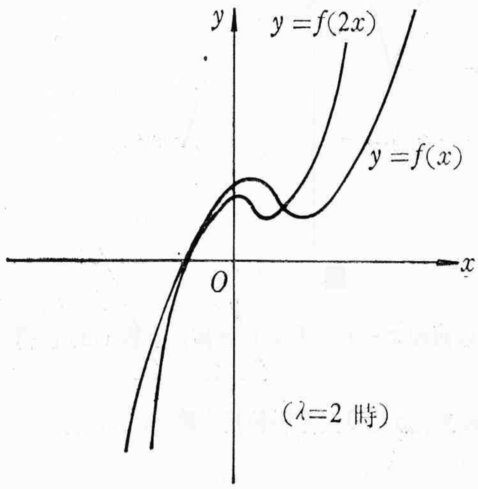


圖 三

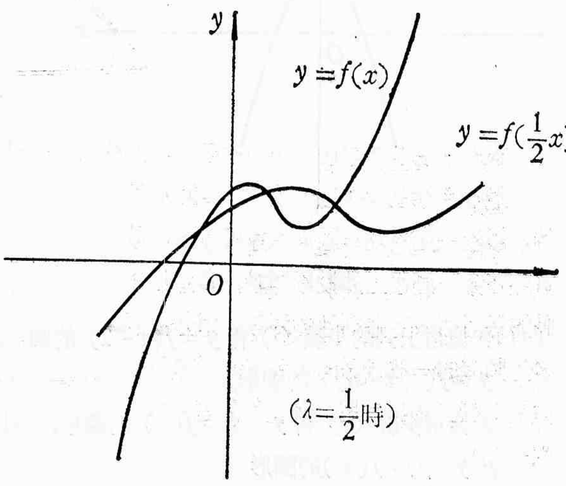


圖 四

（ⅳ）以x軸爲定軸，將Γ作一變動，使y的變動單位爲原y變動單位的 $1/\mu$ 倍卽得 $\mu y=f(x)$ 的圖形（圖五，圖六）〔μ值的討論，仿（ⅲ）〕

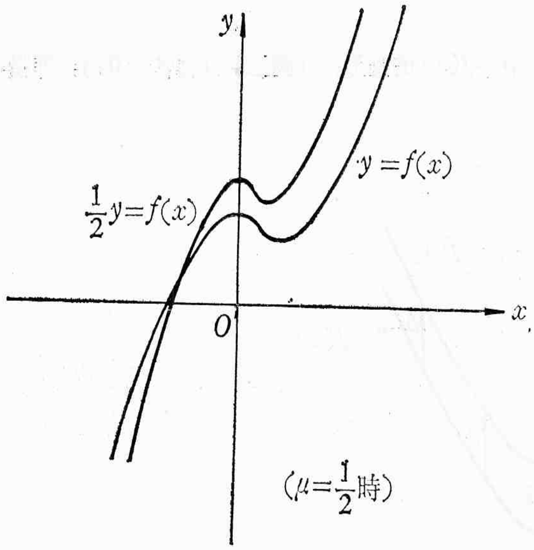


圖 五

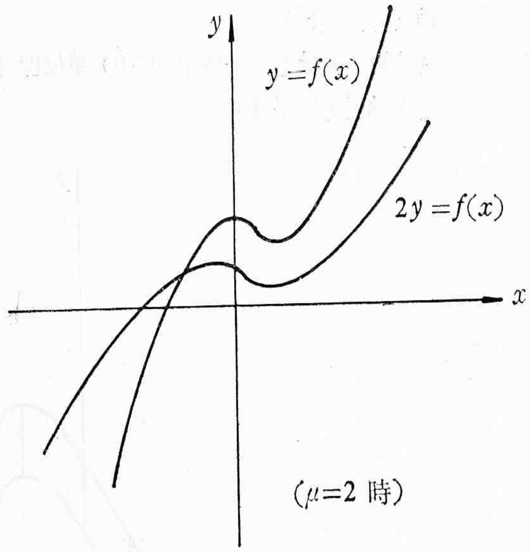


圖 六

(v)將Γ作關於 y 軸的對稱圖形即得 $y=f(-x)$ 的圖形(圖七)

將Γ作關於 x 軸的對稱圖形即得 $-y=f(x)$ 的圖形(圖八)

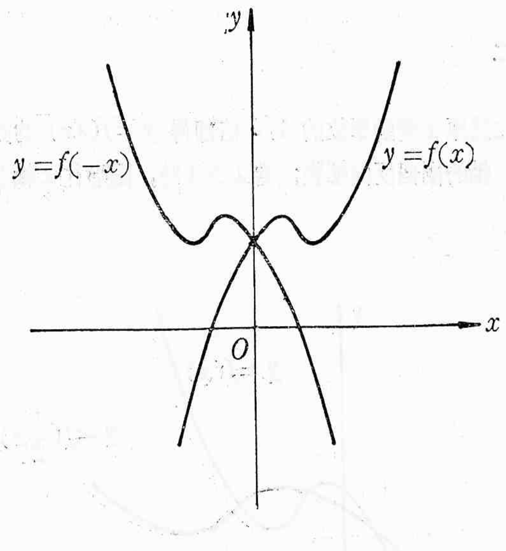


圖 七

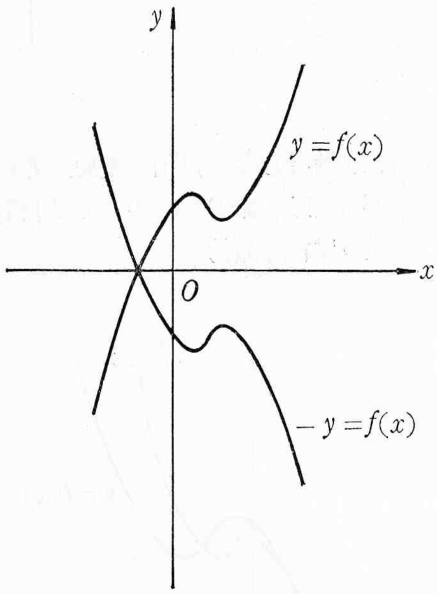


圖 八

(vi)先施用上列的步驟 (i) 得 $y=f(x-2)$ 的圖形,再以直線 $x-\alpha=0$ 為定軸施用步驟 (iii) 即得 $y=f(\lambda(x-\alpha))$ 的圖形。

先施用步驟 (ii) 得 $y-\beta=f(x)$ 的圖形,再以直線 $y-\beta=0$ 為定軸施用步驟 (iv) 即得 $\mu(y-\beta)=f(x)$的圖形

今以函數

$$y=\frac{2}{3}\sin(-2x+3)-1$$

的圖形為例,可由 $y=\sin x$ 的圖形經由下列程序的變換步驟而得:

$$y=\sin x\xrightarrow{\text{(i)}}y=\sin(x-3/2)\xrightarrow{\text{(iii)(以 }x-3/2=0\text{ 為定軸)}}y=\sin 2\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sin(2x-3)$$

$$\xrightarrow{\text{(v)}} y=\sin(-2x+3)\xrightarrow{\text{(ii)}} y+1=\sin(-2x+3)$$

$$\xrightarrow{\text{(iv)(以}\, y+1=0\,\text{爲定軸)}} \frac{3}{2}(y+1)=\sin(-2x+3)\equiv y=\frac{2}{3}\sin(-2x+3)-1$$

「以簡御繁」的精神在上述的處理過程中不是又展露無遺嗎?!

三、高 三 生

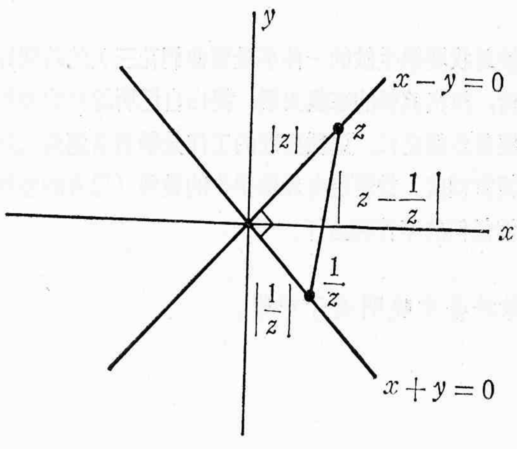
從複數發生的背景（解實係數二次方程）看來，複數純是代數裏的東西，但引入了高斯平面（複數平面）後，複數、複數的絕對值及複數的一些基本運算（諸如加、減、乘、除、共軛複數等）竟是這般的富於直觀內涵:

複數⟷平面上的點
複數的絕對值⟷平面上兩點間的距離
複數的加、減⟷平面上向量的加減
複數的乘、除⟷平面上以O爲中心的向量的旋轉與漲縮的合成
共軛複數⟷以x軸爲對稱軸的點對稱

由於這樣豐富的幾何意義，使我們在處理複數問題時有了直觀上的思考根據。

【例】 設$z=\alpha+\beta i$，其中 $|\alpha|=|\beta|$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$，試求 $|z-1/z|^2$ 的值 (A) $5/2$ (B) $5/\sqrt{2}$ (C) $(\alpha^2+\beta^2)/(2\alpha\beta)+2\alpha\beta$ (D) $(\alpha+\beta)/(\alpha\beta)+1$ (E) $(4\alpha^4+1)/(2\alpha^2)$

說明: $z=\alpha+\beta i$，$|\alpha|=|\beta|$，α，$\beta\in\boldsymbol{R}$這個條件的幾何意義是: z是直線$x-y=0$或$x+y=0$上的任意點，因此如果z是在直線上$x-y=0$上，則 $1/z$ 便在直線 $x+y=0$上，至若 z在直線$x+y=0$上，$1/z$ 便在直線$x-y=0$上（理由是: $1/z=\bar{z}\cdot\triangle$，$\triangle$是一個常數，即$1/z$可由$z$取$x$軸的對稱點後，再向原點$O$作漲縮。）由下面圖形:



看出

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|^2=|z|^2+\left|\frac{1}{z}\right|^2 \qquad \text{(商高定理)}$$

即

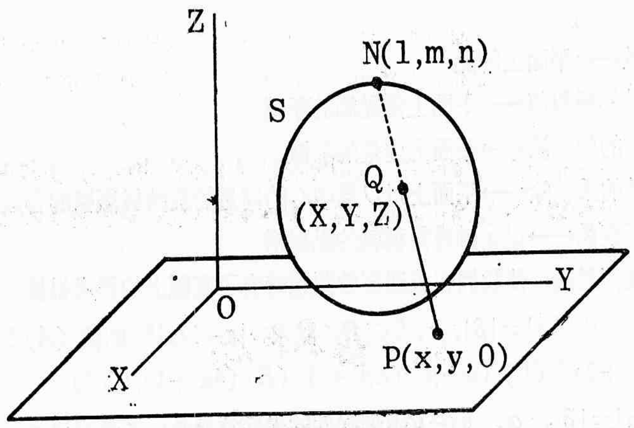
$$\left|z-\frac{1}{z}\right|^2=2\alpha^2+\frac{1}{2\alpha^2}$$
$$=\frac{4\alpha^4+1}{2\alpha^2}$$

用球面上的點來表示複數，是里曼所提出的另一個複數的幾何意義。着重的應是它的幾何對應用關係而非書本上所列的代數變換式：

$$\begin{cases} x=\dfrac{X}{1-Z} \\ y=\dfrac{Y}{1-Z} \end{cases}$$

其中複數 $x+yi$ 以球面上的點 (X,Y,Z) 表示。畢竟，獲得這樣的變換式乃基於假設球面是 $X^2+Y^2+Z^2-Z=0$。

假如用另外個球面來與複數對應，所得的變換式便有不同，因此要學生記住上面那個變換式實在是個無理的要求。正本清源，還是要從對應的幾何關係去尋求代數的表示：



假定有球面 S，其北極爲 $N(l,m,n)$，則複數 $x+yi$ 與球面上的點對應乃指：經由連接線段 NP（見圖）而得 NP 與球面 S 的交於點 Q，則 Q 卽爲 P 之對應點。其代數表示可由 N, Q, P 三點共線而得：

$$\frac{X-l}{x-l}=\frac{Y-m}{y-m}=\frac{Z-n}{-n}$$

敎完複數這個題材後，接着我要學生做的一件事是要他們花三天的時間好好將自己學到的有關複數的斷斷續續知識整理出一番頭緒，找出前後的來龍去脈，提出自己所認爲的要點，並敍述一些自己的感想，算是對自己一個月來的苦心經營作個交代。這種整理的工作是學習者邁向成熟的必要磨鍊。敎師可由他們整理的記錄看出學生吸收的眞實程度。當發現有幾個學生的整理（思考的整理）竟是這麼的富於條理兼創意，那時的滿足感是足以抵消任何的辛苦與血汗。

——本文作者現任敎於臺中曉明女子中學。