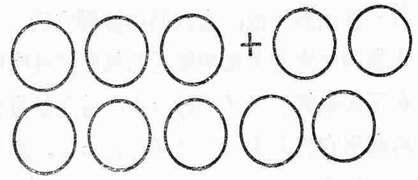
由 (−1)(−1)=1 談數學形式化的重要性和理由

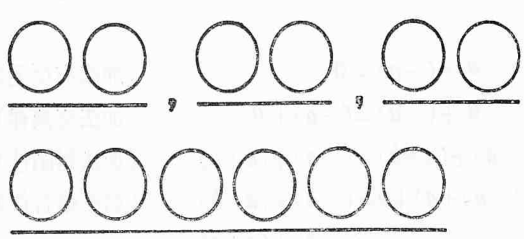
林　阿　松

爲什麼 $(-1)(-1)=1$？ 讀者剛接觸到它的時候，或許曾困惑過，因爲對一般的加法、乘法，我們至少還能具體地說明它，使我們相信它確得是對的。比方說：

2 + 3 = 5

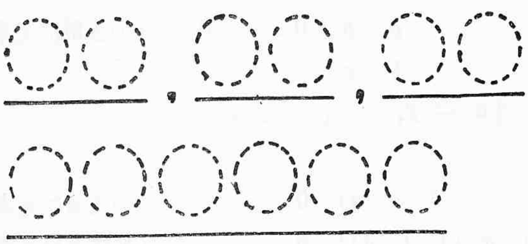


2 X 3 = 6



甚至對 $(-2)\times 3=-6$ 我們也可以用

(-2) X 3 = -6



來說明。圖中虛線表示是缺少的個數。

但是我們不能用類似的例子來表示$(-1)(-1)=1$，而我們知道這個式子在數學中，我們曾不斷地利用它。難道它是一個不可解釋的東西嗎？不！絕對不是！$(-1)(-1)=1$可說是我們首先遇到的抽象數學問題。雖然我們不能以具體的方法證明，但在形式化的數學上，我們能圓滿地說明它是對的。也由此可知形式化數學的重要性。

談到抽象數學，$(-1)(-1)$ 只不過是一個例子而已，至於其他有關的問題如數系的發展過程等，限於篇幅我們暫不討論它。現在就針對$(-1)(-1)=1$這個抽象問題，引進一些我們所熟習的算術性質，我們分別將它列擧出來，在最後說明 $(-1)(-1)=1$時，我們會發現這些性質之所以被強調不是沒有理由的。我們列擧如下：

算術性質

加　法：

A_0　對a、b是整數，$a+b$仍是整數。（加法封閉性）

A_1　對a、b、c是整數，$(a+b)+c=a+(b+c)$（加法結合律）

A_2　對a、b是整數，$a+b=b+a$（加法交換律）

A_3　存在0元素，使得$a+0=a$，$\forall a\in\mathbf{Z}$.（加法單位元素）

A_4　對a是整數，唯一存在 $(-a)$ 使得

$$a+(-a)=0$$

稱 $(-a)$ 是a的反元素數。

乘　法：

M_0　對a、b是整數，$a\cdot b$ 仍是整數。（乘法封閉性）

M_1　對a、b、c是整數$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。（乘法結合律）

M_2　對a、b是整數，$a\cdot b=b\cdot a$（乘法交換律）

M_3　唯一存在整數$1\neq 0$，使得

$$a\cdot 1=a,\ \forall a\in Z$$

稱爲乘法單位元素。

D　a、b、c是整數，則

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)=a\cdot b+a\cdot c$$

(乘法對加法的分配律)

基本上，這些算術性質的形式化，對一般式子的演算不會令人感到興趣，但爲什麼要研究他呢？讀者在中學時一定對它感到困惑，奇怪爲什麼每個證明過程必須一再強調那些很清楚的性質。我們可分兩方面來說明它。

第一，它們說明了證明的每個步驟，都是有依據而且合理的，卽使有些地方它令人看起來似乎有不怎麼高明的感覺，但也足以使我們相信它的正確性。所以將一些看起來很自然的算術性質，予以形式化後而得到算術系統，它們表現了具有相關性、不變性、邏輯性等性質的推論。

第二，這些算術性質能澄淸某些疑惑和誤解。早在國民中學甚至上了高中，我們對某些基本觀念，仍感到模糊而難懂，而且我們腦袋裏卻一直保存著它們，把它們當成很深奧或是不言可知的數學問題，比方$(-1)(-1)=1$。實際上它們不是那麼明顯可知也不很深奧。努力探討它時，我們會發現它和數學上通常的意義也沒有多大的關係。它們只不過是由形式化所得的某種結構的結果，而具體表現於加法與乘法上，根本沒有任何深度或潛在的意義。所以對 $(-1)(-1)=1$ 我們雖不能以一般舉例來表示，但經形式化後，我們可證明它。

我們再回來考慮這$(-1)(-1)=1$這個結果，雙重否定卽爲肯定，至少在字意上是沒有錯的。但這和數學上負一乘負一又有什麼關係呢？我們引進一段十八世紀的名人Stendhal的故事，來看看他對這個問題的認眞態度，他曾希望成爲數學家，但不幸上了 Grenoble 學校使他改行了。從他的記載談到老師、同學用各種方法來說服它，使他相信$(-1)(-1)=1$是對的，毫無疑問，他不可能接受他們的解釋，我們從他的 Henry Brulard 這本有趣的自傳節錄這一段：

「我認爲數學裏沒有虛僞，由於我青年期的單純，我也以爲在我所知所有應用數學的科學中，都是沒有虛僞的。當我査覺出沒有人能告訴我爲何負負得正時，我的心理是何等的感受啊！

他們的表現比承認不會解釋還糟，（但我相信，這個問題一定有一個很好的解釋，因爲這是眞理的一部分）他們說一些對他們自己都不淸楚的道理，而他們居然試圖以此說服我。

當我問急了我的老師 M. Chabert，他不知所措，只得一再重複告訴我負負就是正，到頭來他的結論是這樣說的『這是慣例，每個人都承認這個解釋，大數學家Euler 和 Langrange 他們總該和你一樣聰明吧！連他們也承認$(-1)(-1)=1$。』

我記得很淸楚，當我向一個聰明的同學談及負負得正的困難時，他卻當面譏笑我，他們都像某一些同學，經常靠記憶解答數學，我經常看他們在黑板上或在作業證明時，以『因此，很明顯的可得…等等。』來做結尾。

『對你們沒有不明顯的東西。』我經常這麼想，但我不一樣，我考慮的是明顯的眞理，而這些眞理是無可置疑的。數學處理的是事物的一小部分（在他們的量）但數學有一特點，它只能談及確定的事物和眞理。

在我十七歲那年，我常想像高水準的數學家們（我從未遇過）能處理事物的每一方面或幾乎每一方面。我也曾幻想將來對所有的事物，能有確定，無可置疑的，並且能表達很淸楚的知識。

過了一段很長的時間，我才相信我對負負得正的意見，根本聽不進老師們的頭腦，他們除了臉上的微笑外，絕不會對它有所答覆，那些聰明的同學們，在我問他們，提到這個問題時，也只會譏笑我。」

讀了 Stendhal 這段話，我們感到興趣的是，那些抽象奇怪的事情曾一度困惑了他，當我們再接觸它時，也同樣感到被困惑，人類的反應是多麼地廣泛而無時間性啊！

我們現在正式來解$(-1)(-1)=1$，首先給幾個引理和定理，然後再利用它們來證明$(-1)(-1)=1$，讀者讀此，將不會因爲一些形式化的重複感到厭煩，相反的這些形式化說明處理事情的重要性。

引理： 設a、b、$c\in Z$ 且$b+a=c+a$，則$b=c$。

證明：

$$a+(-a)=0 \qquad \text{(加法有反元素)}$$
$$a+(-a)=(-a)+a \qquad \text{(加法交換律)}$$
$$(-a)+(a+b)=(-a)+(a+c) \qquad \text{(加法封閉性)}$$
$$((-a)+a)+b=(-a)+(a+b) \qquad \text{(加法結合律)}$$
$$=(-a)+(a+c)$$
$$=((-a)+a)+c$$
$$\therefore\quad 0+b=0+c \qquad \text{(加法反元素)}$$
$$b+0=0+b=0+c \qquad \text{(加法交換律)}$$
$$b=b+0=c+0 \qquad \text{(加法單位元素)}$$
$$b=c$$

定理： 設$a\in Z$，則$-(-a)=a$。

證明：

$$a+(-a)=0 \qquad \text{(加法有反元素)}$$
$$(-a)+[-(-a)]=0 \qquad \text{(加法有反元素)}$$
$$(-a)+a=0 \qquad \text{(加法交換律)}$$
$$(-a)+[-(-a)]=(-a)+a \qquad \text{(遞移性)}$$
$$\therefore\quad -(-a)=a \qquad \text{(由引理)}$$

定理： 在 Z 中，$a\cdot 0=0\cdot a=0,\ \forall a\in Z$

證明:

$0=0+0$	(0是加法單位元素)
$a\cdot 0=a(0+0)$	(乘法封閉性)
$a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$	(乘法對加法適合分配律)
$a\cdot 0+0=a\cdot 0$	(0是加法單位元素)
$a\cdot 0+0=a\cdot 0+a\cdot 0$	
$0=a\cdot 0$	(由引理)
$0=0\cdot a$	(乘法交換律)

定理: 在 $\mathbf{Z}$ 中,

1. $a(-1)=-a,\ \forall a\in\mathbf{Z}$
2. $(-1)(-1)=1$

證明:

$1+(-1)=0$	(−1是1的反元素)
$a(1+(-1))=a\cdot 0$	(乘法封閉性)
$a\cdot 1+a(-1)=0$	(分配律)
$a+a(-1)=0$	(1是乘法單位元素)
$a+(-a)=0$	(加法反元素)
$a+a(-1)=a+(-a)$	(遞移性)
$a(-1)=-a$	(由引理)

令 $a=-1$，則

$(-1)(-1)=-(-1)$

$\therefore\ (-1)(-1)=1$ (由定理)

——本文作者現就讀中大數學系