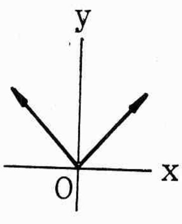
折線的解析表示

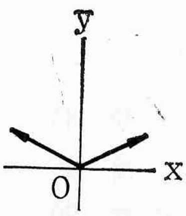
王進賢

我們知道平面上直線的解析表示是二元一次方程式；而折線是直線最簡單的變形，那麼，平面上折線的解析表示是怎樣的呢？本文的目的在討論它。但是，我們把範圍限制在可做爲函數圖形的折線（底下不再聲明），也就是那些能在平面上建立一直角坐標系統使每一與 y 軸平行的直線至多與該折線交一點的折線。

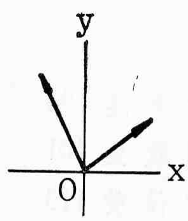
觀察折線的特徵，我們知道它和直線最大的區別當是在於有折點這件事（事實上，如果我們把直線當做沒有折點的折線，那麼直線是折線的特例）。我們就從一個折點的折線開始來討論。讓我們回憶一下，看過單一個折點的折線嗎？



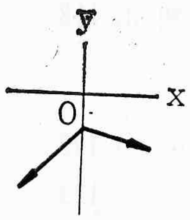
圖一(a)



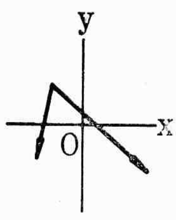
圖一(b)



圖一(c)



圖一(d)



圖一(e)

有，絕對值函數 $y=|x|$ 的圖形（圖一(a)）就是一個例子。圖一的另外幾個圖是單折點線的另外一些型式，我們能猜得出它們的表示式嗎？圖一(b)屬 $y=a|x|$ 型。圖一(c)屬 $y=a|x|+bx$ 型（這個比較難看得出，但是從前面兩圖可知 a 是斜率因素，那麼把 b 看做是斜率偏差的修正就不難理解了）。圖一(d)屬 $y=a|x|+bx+c$ 型。圖一(e)屬 $y=a|x-h|+bx+c$ 型。到此，我們可以說單折點線的一種解析表示是 $y=a|x-h|+bx+c$（我們說「一種」是因爲它們還可有其他種表示如圖一(c)透過轉軸觀點可得另一表法）。

我們能把上面的結果類推到 n 折點線嗎？只導了單折點線就要跳到 n 折點線似乎快了點，不過，前面說過，可把直線視爲零折點線，而其解析表示式是 $y=bx+c$；那麼，我們就較容易猜想 n 折點線的解析表示爲

$$y=a_1|x-h_1|+a_2|x-h_2|+\cdots+a_n|x-h_n|+bx+c$$

對嗎？下面的定理告訴我們這是對的。

定理: 在坐標平面上，給定一 n 折點線，若其 n 個折點的 x 坐標分別爲 $h_2, h_2, \cdots, h_n$ 其中 $h_1<h_2<\cdots<h_n$，則恰有一組數字 $a_1, a_2\cdots, a_n$, b, c 使得 n 折點線爲函數

(1) $$y=a_1|x-h_1|+a_2|x-h_2|+\cdots+a_n|x-h_n|+bx+c$$

的圖形。

證明:

設此 n 折點線的 $n+1$ 個平直部份（$n+1$ 處線段，兩處射線）的斜率（依前約定，現所討論的折線爲函數圖形，故每一部份均有斜率），依次爲 $m_1, m_2, \cdots, m_{n+1}$（如圖二所示）；則下述方程組爲(1)式表該折線的解析式時 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

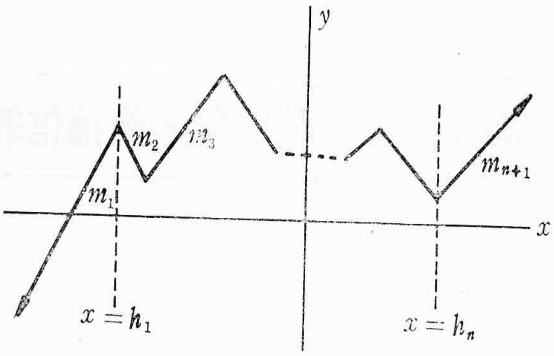


圖 二

b 所需滿足的充要條件（此乃就 $x\le h_1, h_1<x\le h_2, \cdots, h_{n-1}\le x<h_n, h_n\le x$ 分段拆開 (1)式絕對值符號，並考慮拆開後 x 的係數和恰爲折線各該部份的斜率而得）：

$$\left\{\begin{array}{l} -a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}-a_n+b=m_1 \\ a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}-a_n+b=m_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-a_n+b=m_n \\ a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n+b=m_{n+1} \end{array}\right.$$

視 $a_1, \cdots, a_n$, b 爲變元，因爲上述線性聯立方程組的 $n+1$ 階係數行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & +1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 第一列 \\ 不\ \ 變 \\ = \\ 餘每 \\ 列加 \\ 第一列 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$=(-1)\times\underbrace{(-2)\times(-2)\times\cdots\times(-2)}_{n+1\text{個}}\times 2=(-1)^n 2^n$ 不等於零，故方程組恰有一組解。

根據 n 折點線的 $n+1$ 個部份的斜率固定了之 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, b 之後，剩下 c 的確定這事可由代任一個折點的 (x, y) 坐標到(1)式中得 c 的一元一次式而得解。