從67,68年聯考試題談如何準備數學

王　秋　夫

數學一直是困擾同學們的一最重要之學科，由於許多同學花費了很多精力和時間去研習它，可是聯考之結果常常令其失望，因此放棄數學之舉幾乎普遍地存在於青年學子之心中。歸其原因在於聯考出題之不當，及學生無法適應各種形式上之改變，加以教材和教法之不當，常引學生誤入數學之歧途。67, 68 兩年之聯考試題，雖然在形式上制止了同學投機之心理，使數學教育漸趨正常化，然由於計分方式之改變組距過大，聯考之數學成績並未顯著的增高，乙丁組反而下降，究其原因就是放棄數學的人太多了，此誠爲今日數學教育發展之最大危機。爲了促使學生對數學恢復信心，聯考試題之深度放淺些，平均分數相對之提高，爲今後刻不容緩之問題。

常常聽同學及家長說：「大專聯考數學那樣難，不易得分，乾脆以後放棄數學。」筆者最近幾年來曾花相當多的時間去研究聯考命題之趨勢，發覺總有些脈絡可循，若能把歷屆考題仔細地算一次，好好地推敲其道理，要拿 60 分以上似乎並不是件困難的事。首先就 67, 68 兩年聯考數學試題之特色略作比較如下:

67年聯考之特色

⑴深淺交錯出題（此與歷年由淺入深不同。）

⑵複選中有單選的，單選中有多選的。（防止投機之妙方。）

⑶各種速解法無法應用。（補習班的名師無法亂蓋。）

⑷針對目前高中數學教育之缺點出題。（矯正某些自認爲大牌老師之猜題或不教某些教材之缺點。）

⑸每個問題都需要全盤了解才能做出，無法亂猜。（強調用最土的方法，才是最快的解法。）

⑹很多問題都是歷屆考題之結合。（因此精研考古題，就必可拿高標準以上分數，請看以後例證。）

⑺逼近的觀點出了不少題。（此爲實驗本一直強調之重點。）

⑻連坐計分法首次應用。（使同學無法投機，好壞無法區別。）

68年聯考之特色

⑴深淺適中，程度高者可能得滿分，且無怪異之題，是新教材改革以來，較合適之一次考題。

⑵很多題目都是歷屆考古題之推演。

⑶乙丁組之試題深度幾乎要超過甲丙組。

⑷試題分配不均，較偏重高二，高三上部分。

⑸乙丁組三角出題份量偏重，容易造成投機。

⑹計分方式雖合理，然組距太大，一般分數仍無法提高。

⑺題目較淺易，可促使以後同學對數學之研習興趣，相信明年大概不會有人再放棄數學。

其次就 67, 68 兩年聯考試題中有關考古題之例證題說明如下:

例 1: ⑴方程式 $x^4-2x^3-2x-1=0$ (A)沒有實根，(B)有二虛根，二無理根，(C)有二虛根，二有理根，

(D)有二虛根，一有理根一無理根，(E)有一虛根三實根（67 聯甲丙）

(2)方程式 $x^4-2x^2-8=0$ 有幾個實根 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4（67 聯乙丁）

註: 1. 57年曾考過 方程式 $x^3-3x^2-4x+11=0$ (A)沒有實根 (B)有一實根 (C)有二實根 (D)有三不等之實根 (E)以上皆非。

2. 57 年亦考過 設多項式 x^4-x^2-2 佈於有理數體，實數體及複數體上之質因式個數分別為 r,s,t，則 (A) $r=s=t$ (B) $r=s=t-1$ (C) $r=s-2=t-3$ (D) $r+2=s=t$ (E)以上皆非。

例 2: 解聯立方程式: $1/x+1/y+1/z=0$, $4/x+3/y+2/z=5$, $3/x+2/y+4/z=-4$ 可得 (A) $x=1$ (B) $x=2$ (C) $y=-1$ (D) $y=1$ (E) $x+y+z=7/6$（67 甲丙）。

註: 1. 56 年曾考過 設 $a=xy/(x+y)$, $b=xz/(x+z)$, $c=yz/(y+z)$，但 $abc\neq 0$，則 x 等於 (A) $abc/(ab+bc+ca)$ (B) $2abc/(ab+bc+ca)$ (C) $2abc/(ac+bc-ab)$ (D) $abc/(ab+ac-bc)$

例 3: 求點 $(6,3)$ 到圓 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 之最短距離為 d，最長距離為 D，則 (A) $d=2\sqrt{3}$ (B) $d=3\sqrt{2}$ (C) $D=5\sqrt{2}$ (D) $D=6\sqrt{2}$ (E) $D=2d$（67 聯）。

註: 1. 59 年考過 空間中一點 $(4,-4,4)$ 至球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+2y-2z)$ 之最短距離為何?

2. 65 年考過 二直線 $2x-y=11$ 及 $y-x=13$ 之交點為 Q，令 P 表圓 $x^2+y^2=10y$ 上離 Q 最近之點，求 P 之坐標。

例 4: 若 $\alpha x^3+\beta x^2-47x-15$ 能析出 $3x+1$ 與 $2x-3$ 之因式，試求出 α,β 及第三個因式 $\eta x+\delta$。（67 年甲乙丙丁）。

註: 1. 此題強調用最土的待定係數法最易算出。

2. 37 年臺大考過 設 x^4-3ax^2+bx+4 同時為 $x+1$ 與 $x-2$ 除盡，求 a, b 之值。

3. 52 年考過 設 $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ 得為 x^2-x+b 除盡，求 a, b 之值。

4. 65 年考過 設 $1/(x^4+1)=(ax+b)/(x^2+\sqrt{2}x+1)+(cx+d)/(x^2-\sqrt{2}x+1)$, $a, b, c, d\in R$，求 $a+b+c+d$ 之值。

例 5: 有一廣告氣球，直徑為 6 公尺，放在公司大樓上空，當行人仰望氣球中心之仰角 $\angle BAC$ 為 $30°$ 時，氣球之視角為 $\beta=2°$，試估計該氣球之高度 $BC=h$，（當 θ 很小時，$\sin\theta$ 得以 θ 為其近似值）求 h（67 聯）。

註: 1. 58 年考過 山頂有一塔，塔頂有一旗桿；旗桿之高為 h，在地面某一點測得山頂，塔頂，旗桿頂之仰角依次為 α, β, η，求山高 h?

例 6: 已知無窮等比級數之和等於 $9/2$，其第二項為 -2，求此級數 $t_1+t_2+t_3+\cdots(t_2=-2)$，(A) $t_1=8$ (B) $t_3=1$ (C) $t_4=-2/9$ (D) $t_5=1/12$ (E) $t_6=1/24$

令 $S_N=t_1+t_2+\cdots+t_N$ 為其第 N 項部分和，設 S_N 與該級數之總和 $9/2$ 相差（指其絕對值）小於 $1/10^4$，問 N 至少應為何數?（67聯）

註: 1. 65 年三專考過 已知一無窮等比級數之和為 6，首二項之和為 $4^1/_2$，求其公比的平方為何?

2. 63 聯夜考過 設 $1+5/4+(5/4)^2+\cdots+(5/4)^{n-1}>396$，求正整數 n 之最小值。

3. 65 年考過 從下面之式子選出正確的:

(A) $1/3+1/3^2+\cdots+1/3^n+\cdots<2/3$ (B) $2/3+2/3^2+2/3^n+\cdots<1$ (C) $3/5+3/5^2+\cdots+3/5^n+\cdots<1$ (D) $4/5+4/5^2+\cdots+4/5^n+\cdots<1$ (E) $7/10+7/10^2+\cdots+7/10^n+\cdots<8/10$。

例 7: 若 $x^2+px+q=0$ 之一根為另一根之平方，則 p, q 間必有一關係式如: $p^3-(lp-1)q^m+q^n=0$ 求 l, m, n（67 聯）。

註: 1. 57 年及 64 年夜考過 設實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 之一根為純虛數，求 a, b, c 之關係式為何?

例 8: 玩具工廠製造一批正三角形塑膠板，大小相同，而有 10 種不同之顏色，用四個不同之三角板可以

連成一個彩色正四面體，試問可以製成多少不同色樣之正四面體？（67 聯）

註: 1. 66年考過　以六種不同顏色的塗料，欲在正六面體上塗色，每面塗一色且各面不得同色，問可塗成幾類？

2. 此種題目之解法，只要知道

$$滾動排列數=\frac{直線排列數}{滾動數\times翻轉數}$$，即可迅速解出。

例 9: 定義：若經由平移，旋轉後，曲線 Γ_1 可以重疊在另一曲線 Γ_2 上，則稱 Γ_1 與 Γ_2 全等。考慮下列諸曲線：

(A)$xy=1$　(B)$x^2-y^2=1$　(C)$y^2-x^2=2$　(D)$\sqrt{3}(x^2-y^2)+2xy-4=0$　(E)$2x^2-3xy-2y^2=2$

其中有些（其個數≥ 2）是全等的，而其餘均不全等，請挑出全等的來。（67 聯）

註: 1. 63 年考過　設點$P(a,b)$之坐標爲 $a=\cos 22.5°$，$b=\sin 22.5°$ 則 (A)P在$4xy=\sqrt{2}$上　(B)P在 $2x^2-2y^2=\sqrt{2}$ 上　(C)P爲 $x^2+y^2=1$ 與 $4xy=\sqrt{2}$ 的一個交點　(D)$x^2+y^2=1$ 與 $4xy=\sqrt{2}$ 共有四個交點。

2. 63 年考過　求二次曲線 $5x^2+5y^2-6xy-4=0$ 之中心，二焦點及對稱軸各爲何？

例10: 求 $8(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$ 在 $[\pi/6, 5\pi/12]$ 區間上之極大極小值（67 聯）。

註: 1. 62 年考過　令$\cos 2\theta=t$，求 $4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)$ 以 t 表之如何？

2. 53 年考過　x爲實數時，$\sin^6 x+\cos^6 x$ 值何時最大？何時最小？並求其最大最小值爲何？

例11: 設 r_n 爲複數 $-2^{n/10}((1+\sqrt{3}i)/2)^n$ 的實數部分，試求有限數列 $r_1, r_2, \cdots r_{90}$ 中之最大項，設第 $10p+q$ 項爲最大，試估計此最大項 $r_{10p+q}\doteqdot M\times 10^N$，求 p,q,M,N（67 聯）。

註: 1. 49 年師大考過　n爲何種正整數時 $(1+\sqrt{3}i)^n$ 方爲實數？

2. 61 年考過　求 $((1+\sqrt{3}i)/2)^{20}$ 之值爲何？

例12: 線段 $\overline{AB}$ 長爲 12，在線段上任取一點P，則兩線段$\overline{AP},\overline{PB}$ 之長度積 $f(P)$之極大值M爲何？又P任意取，試計算 $f(P)>M/2$ 之機率到兩位有效數字 $p\cdot 10^{-1}+q\cdot 10^{-2}, p,q\in A$，求 p,q 各爲何？（68聯）

註: 1. 60 年考過　函數 $y=-x^2+2x+1$之極大值爲何？

2. 57 臺大夜考過　設 $x,y\in N$，若$x+y=1000$，則 $xy\geq 240000$ 之機率爲何？

例13: 求一圓使中心在 $(-2,1)$，並且和直線$3x-4y-5=0$相切，設這圓是 $x^2+y^2+lx+my+n=0$，求 l,m,n（68 聯）。

註: 1. 67 年三專考過　下列直線中與圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相切的是 (A)$3x+4y=1$　(B)$4x-3y=7$　(C)$13x+7y=60$　(D)$4x+3y=1$　(E)$4x+3y=7$。

2. 67 夜聯考過　試求出與兩直線 $x+5y-4=0$，$x+5y-12=0$ 相切，且圓心在直線 $x-2y-1=0$之上的圓爲 $x^2+y^2+mx+ny+l=0$，求 l,m,n。

例14: 站在湖中小島的山峰上看對岸的高峰仰角是 30°，看湖面這高峰之鏡影，俯角爲 45°，所站之山峰高度爲 250 公尺（從湖面算起）試問對岸高峰高度取二位有效數字，設之爲 $p\cdot 100+q\cdot 10$（公尺）$p,q\in A$ 求 p,q（68 聯）。

註: 1. 67 三專考過　在一大厦之某一層窗口，望一塔頂之仰角爲 30°，塔底之俯角爲 15°，設窗高（高與地面之距離爲 $100(2-\sqrt{3})$）公尺，求塔高及大厦與塔之距離。

例15: 多項式 $(x^2+3x+2)^3$ 被 (x^2+2x+3) 除之餘式爲何？（68 聯）

註: 1. 59年考過　以 x^2+x+1除 x^{12} 之餘式爲何？

例16: 令 $z=5/14+(12/14)i, S_n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$，求無窮級數之和 $S=1+z+z^2+\cdots$及 $\varepsilon_n=S-S_n$，則 (A)$|z|>1$　(B)$1/S$在高斯平面之第四象限　(C)$0.5<$（S之實部）<0.6　(D)$0.6<$（S之虛部）<0.7　(E)$0.8<|S|<0.9$ 若 $|\varepsilon_n|<1/15$，n最少爲多少？（68 聯）

註: 1. 65 年考過 設 $z=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$，則 $z^{65}+z^{66}+\cdots+z^{365}=$(A) 0 (B) 1 (C) z (D) z^2 (E) z^3

2. 67 年考過 如例 6。

例17: 多項式 $(5-m)x^2-6x+m+5$ 在 x 爲正實數時，永遠取正値，求 m 之範圍?（68 聯）

註: 1. 59 年考過 $\forall a,b,c,\in \boldsymbol{R}$, $a\neq 0$，令 $f(x)=ax^2+bx+c$，其判別式 $D=b^2-4ac$, $\forall x\in \boldsymbol{R}$, $f(x)>0$ 之充要條件爲何?

例18: 採用極坐標 $r=2d/(1-\cos\theta)$, $(d>0)$ 的一個焦弦 $\overline{PQ}$，設其長度爲 l，設錐線之頂點爲 R，而 $\triangle PQR$ 之面積爲 $S=kl^pd^q$ 求 p，q，k 之值（68 聯）。

註: 1. 53 年考過 設一拋物線之一焦弦與軸相交成 30° 角，則此焦弦長爲正焦弦長的幾倍？

例19: 橢圓 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 上兩點 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ 與 $(a\cos\beta, b\sin\beta)$ 之連線之斜率爲何?（68 年乙丁）

註: 1. 57 臺大夜考過 $\cos A-\cos B$ 可化爲 $\boxed{}$，若 $A+B+C=\pi$，則 $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C$ 可化爲 $\boxed{}$。

2. 55 年考過 設 L 之斜角爲 60°，(p,q)，(r,s) 爲 L 上相異二點，若 p，q，r 均爲有理數，則 s 爲何數?

例20: 試解三角方程式 $\cos 2x+\cos^4 x+\cos 6x=3$，在 $-\pi/2<x<3\pi/2$ 之範圍內有幾解?（68年乙丁）

註: 1. 67 夜聯考過 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 之解爲何?

2. 65 夜聯考過 $6\cos^2 x+5\sin x=7$。

3. 56 年考過 若 $x+1/x=2\cos\theta$，則 $2\cos 3\theta$ 以 x 表之爲何?

由上面這些例證，筆者似乎找到了一些可循之途徑，使同學可在最短的時間內，獲得最大之代價。其法如下:

(1)精研歷屆考題，每一個題目不要只認爲會做就算了，更需要將解決這個題目所觸及之公式及學理加以整理分析，再追踪是否有類似之考題曾經考過，及其可能之應用。

(2)常考而易拿分之部分要多加研習，不易拿分之部分，乾脆放棄。歷年來常考而易拿分之部分爲①二次方程式及其圖形之應用。②三角函數之平方關係，半角倍角之應用及和差化積公式之應用，測量問題。③二次曲線，圓及拋物線考得最多，其次爲等軸雙曲線和橢圓中有關漸近線及面積之問題，再次才爲坐標變換問題。④因式及餘式定理之應用。⑤複數之 n 次方根及棣莫夫定理之應用。⑥級數求和及基本性質。⑦方程式根與係數關係之應用。⑧極大極小值之求法。⑨機率。⑩特別注意逼近及轉化觀點的考題。⑪對數之性質應用。⑫函數關係及線性規劃之問題。循這些部分努力研習，相信定可在聯考中得高分。

(3)突變形式之考題，其所涉及之觀念，常早在前二三年之試題中已有眉目，故同學要準備考試，只要把近三年來之命題趨勢加以分析，必可收事半功倍之效。處理這類題目只要冷靜地了解題意，答案常可用最簡單之方法推出。

(4)不要鑽牛角尖，做一些繁雜而無用的日本大學考題。大專聯考在有限度的時間內，不可能出很深之考題。定理證明之過程不可忽略，因它是解題和命題之依據。

——本文作者現任職嘉義高中