

# 六十八年大學聯考數學試題

## 解答、評註與分析

王湘君

### 一、前言

每年大學聯考結束後，考生、家長，教師以及報章雜誌，對於試題的難易，優劣，份量以及考生可能的得分，都大事地討論和批評。而今年有個可喜的現象，就是褒多於貶。大多數的人都認為今年的試題比往年出得好，是一次成功的命題！

個人不揣淺陋，也想提出一些意見和評論，向數學先進們請教，並與關心數學教育的老師及同學們共同討論，期使大學聯考及數學教育，往更理想的大道邁進。茲就個人對試題的了解，先作解答，再作評註。（為了讓讀者先生明白評註所云，不得不浪費一些篇幅作解答。）

### 二、丙甲組試題解答及評註

試題前面印有考生注意事項及計算時可能用到的對數表，現予略去。

【甲】線段  $AB$  長 = 12，在線段上任取一點  $P$ ，則兩線段  $AP$ ， $PB$  長度的積  $f(P)$  之極大值  $M$  為何？

1. (A)  $M=18$  (B)  $M=16$  (C)  $M=24$  (D)  $M=36$  (E)  $M=48$

(單選，2分，錯了倒扣 $\frac{1}{2}$ 分)。

(接上題)  $P$  任意取，試計算  $f(P) > M/2$  之機

率，到兩位有效數字  $p \cdot 10^{-1} + q \cdot 10^{-2}$ ,  $p, q \in A$

2. (A)  $p \in \{1, 3, 5, 7\}$  (B)  $p \in \{2, 3, 6, 7\}$  (C)  $p \in \{4, 5, 6, 7\}$

(D)  $p \in \{8, 9\}$  (E)  $p \in \{0, 8\}$

3. (A)  $q \in \{1, 3, 5, 7\}$  (B)  $q \in \{2, 3, 6, 7\}$

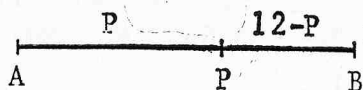
(C)  $q \in \{4, 5, 6, 7\}$  (D)  $q \in \{8, 9\}$  (E)  $q \in \{0, 8\}$

(以上兩小題，複選，合 10 分，錯了倒扣 10/960 分)。

答：(D), (A, B, C), (A)

解

1.



$$\begin{aligned} f(P) &= P(12-P) \\ &= -P^2 + 12P \\ &= -(P^2 - 12P + 36) + 36 \\ &= 36 - (P-6)^2 \end{aligned}$$

故當  $P=6$  時  $f(P)=36$  為最大。

2, 3.  $f(P) = 36 - (P-6)^2 > \frac{M}{2} = 18$

即

$$\begin{aligned} (P-6)^2 - 18 < 0, P^2 - 12P + 18 < 0 \\ (P-6+3\sqrt{2})(P-6-3\sqrt{2}) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore 6-3\sqrt{2} < P < 6+3\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{機率} = \frac{(6+3\sqrt{2}) - (6-3\sqrt{2})}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 0.707 \approx 0.71 = 7 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2}$$

$$\therefore p=7, q=1$$

評註:

- (1) 本題考二次函數的極值，二次不等式及幾何機率。
- (2) 二次函數求極值，以配方法為主（中學生宜熟稔此方法。同時，要記牢  $\sqrt{2}$  的近似值 1.41421）
- (3) 本題屬應用題，測驗考生操作能力，也是高中數學教材的主題，難易適中。本題是連坐題，惜連坐得不太合理，若是極大值算錯，就連帶幾何機率必答錯。

【乙】求一圓，使中心在  $(-2, 1)$ ，並且和直線  $3x-4y-5=0$  相切。設這圓是  $x^2+y^2+lx+my+n=0$

4. (A)  $|l| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(B)  $|l| \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$

(C)  $|l| \in \{4, 5, 6, 7, 0\}$

(D)  $|l| \in \{8, 9, 0\}$

(E)  $l < 0$

5. (A)  $|m| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(B)  $|m| \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$

(C)  $|m| \in \{4, 5, 6, 7, 0\}$

(D)  $|m| \in \{8, 9, 0\}$

(E)  $m < 0$

6. (A)  $|n| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(B)  $|n| \in \{2, 3, 6, 7, 8\}$

(C)  $|n| \in \{4, 5, 6, 7, 0\}$

(D)  $|n| \in \{8, 9, 0\}$

(E)  $n < 0$

(以上三小題，複選，合為 11 分，錯了倒扣 0 分)。

答: (C), (B, E), (C, E)

解: 圓半徑  $r = \frac{|3(-2) - 4(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3$

故方程式為  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$   
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$$\therefore l=4, m=-2, n=-4$$

$$\therefore |l|=4, |m|=2, |n|=4$$

評註:

- (1) 本題是由所予條件求圓的方程式。
- (2) 圓心知道，只要把圓心到切線的距離算出，作為半徑，則圓的方程式就可輕而易得。
- (3) 此題最簡單，是二元二次方程式中最基本的問題，似乎命題教授有意優待考生，「免費」贈送考生 11 分。

【丙】站在湖中小島的山峯上，看對岸的高峯仰角是  $30^\circ$ ；看湖面，這高峯的鏡影，俯角是  $45^\circ$ ；所站的山峯高度為 250 公尺（從湖面算起）試問對岸高峯高度多少？取兩位有效數字，設之為

$$p \cdot 100 + q \cdot 10 \text{ (公尺)}, p, q \in A. \text{則}$$

7. (A)  $p \in \{1, 3, 5, 7\}$

(B)  $p \in \{2, 3, 6, 7\}$

(C)  $p \in \{4, 5, 6, 7\}$

(D)  $p \in \{8, 9\}$

(E)  $p \in \{0, 8\}$

8. (A)  $q \in \{1, 3, 5, 7\}$

(B)  $q \in \{2, 3, 6, 7\}$

(C)  $q \in \{4, 5, 6, 7\}$

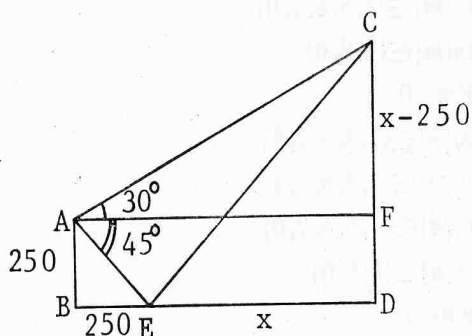
(D)  $q \in \{8, 9\}$

(E)  $q \in \{0, 8\}$

(以上兩小題，合為 11 分，複選，錯了倒扣 11/960 分)。

答: (D), (A, B)

解:



設  $AB, CD$  為二山峯之高，今知  $AB=250$ ，設  $CD=x$  則鏡影  $DE=CD=x$ 。

依題意知

$$\frac{x-250}{x+250} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sqrt{3}x - 250\sqrt{3} = x + 250$$

$$(\sqrt{3}-1)x = 250(\sqrt{3}+1)$$

$$x = \frac{250(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{250(4+2\sqrt{3})}{2} = 933$$

$$\div 930 = 9 \times 100 + 3 \times 10$$

$$\therefore p=9, q=3$$

評註:

- (1)本題是考三角測量。  
 (2)考生只要弄清題意，作一個簡圖，就能解出。  
 (3)本題有一爭議的地方，就是句中的「鏡影」，由題意看不出其真正的意義，高中課本也沒有這個名詞；同時，依常識判斷，湖邊的物體，在湖面上的倒影，由於水的折射，往往比實際長度要短，因此產生一些非數學的困擾，許多考生因而無法作答，這就失去了甄別的作用。

【丁】多項式  $(x^2+3x+2)^3$  被  $(x^2+2x+3)$  除，餘式為何？設餘式為  $px+q$ 。

9. (A)  $p < 0$   
 (B)  $|p| \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$   
 (C)  $|p| \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$   
 (D)  $|p| \in \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$   
 (E)  $|p| \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \}$

10. (A)  $q < 0$   
 (B)  $|q| \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$   
 (C)  $|q| \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$   
 (D)  $|q| \in \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$   
 (E)  $|q| \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(以上兩小題，合為 11 分，複選，錯了倒扣 11/960

分)。

答: (C, E), (C, D, E)

解:  $x^2+3x+2 = (x^2+2x+3) + (x-1)$ 

$$f(x) = (x^2+3x+2)^3$$

$$= [(x^2+2x+3) + (x-1)]^3$$

$$= p(x)(x^2+2x+3) + (x-1)^3$$

以  $x^2+2x+3$  除  $f(x)$  之餘式即等於  $x^2+2x+3$  除  $(x-1)^3$  之餘式

$$\therefore (x-1)^3 = (x-5)(x^2+2x+3) + 10x+14$$

$$\therefore p=10, q=14$$

評註:

- (1)本題是多項式求餘式問題。  
 (2)主要是測驗考生對多項式的變形。  
 (3)本題是基本題，11分可以輕易獲得。

【戊】令  $z = \frac{5}{14} + \frac{12}{14}i$ ,  $s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$

試求無窮等比級數之和

$$S = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

及  $\epsilon_n = S - S_n$ 11. (A)  $|z| > 1$ 

- (B)  $1/S$  在高斯平面第四象限  
 (C)  $0.5 < (S \text{ 的實數部分}) < 0.6$   
 (D)  $0.6 < (S \text{ 的虛數部分}) < 0.7$   
 (E)  $0.8 < |S| < 0.9$

(複選，4分，錯了倒扣  $\frac{4}{30}$  分)。

若  $|\epsilon_n| < \frac{1}{15}$ ,  $n$  最少是多少？記這個最小的解答為

$$10p+q; p, q \in A$$

12. (A)  $p \in \{1, 3, 5, 7\}$  (B)  $p \in \{2, 3, 6, 7\}$ (C)  $p \in \{4, 5, 6, 7\}$  (D)  $p \in \{8, 9\}$ (E)  $p \in \{0, 8\}$ 13. (A)  $q \in \{1, 3, 5, 7\}$  (B)  $q \in \{2, 3, 6, 7\}$ (C)  $q \in \{4, 5, 6, 7\}$  (D)  $q \in \{8, 9\}$ (E)  $q \in \{0, 8\}$ 

(以上兩小題，複選，合為 7 分，錯了倒扣 7/960 分)。

答: (B, C), (A, B), (A, C)

解: 11.

$$(A) z = \frac{5}{14} + \frac{12}{14}i = \frac{13}{14}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{其中 } \cos\theta = \frac{5}{13}, \sin\theta = \frac{12}{13}$$

故

$$|z| = \frac{13}{14} < 1$$

$$(B) \quad S = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \dots$$

$$= \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{S} = 1 - z = \frac{9}{14} - \frac{12i}{14} \in \text{IV 象限}$$

$$(C) \quad S = \frac{1}{\frac{9}{14} - \frac{12i}{14}} = \frac{14}{9-12i} = \frac{14(9+12i)}{225}$$

$$\text{故 } S \text{ 的實數部分} = \frac{14 \times 9}{225} = \frac{126}{225}$$

$$(D) \quad S \text{ 的虛數部分} = \frac{14 \times 12}{225} > 0.7$$

$$(E) \quad |S| = \frac{14}{\sqrt{9^2 + (-12)^2}} = \frac{14}{15}$$

$$\varepsilon_n = S - S_n$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{z^n}{1-z}$$

$$= \frac{\left(\frac{13}{14}\right)^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)}{\frac{9}{14} - \frac{12i}{14}}$$

故

$$|\varepsilon_n| = \frac{(13/14)^n}{15/14} < \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow 14 \left(\frac{13}{14}\right)^n < 1$$

$$\Rightarrow n \log 13 - (n-1) \log 14 < 0$$

$$\Rightarrow n[1.1139] - (n-1)[0.3010 - 0.8451] < 0$$

$$\Rightarrow n[1.1139 - 1.1461] < -1.1461$$

$$\Rightarrow n > \frac{1.1461}{0.0322} = 35.59\dots$$

$$\Rightarrow n \text{ 之最小值 } 36$$

$$\Rightarrow p = 3, q = 6.$$

評註:

- (1) 本題考複數的絕對值，高斯平面，複數的標準化，等比級數求和，棣美佛定理，對數求指數。
- (2) 本題要謹慎計算，對於求指數問題，考生應想到求助於對數。
- (3) 本題是綜合性問題，所涉及的面較廣，深淺適中，是理想的考題。複數每年必考，未來考生宜特別留意。本題有複數等比級數，課本上沒有，但考生仍可自行算出。

$$S = \frac{1-z^n}{1-z} \quad \text{當 } z \in \mathbb{C} \quad z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad \text{當 } |z| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

【己】多項式  $(5-m)x^2 - 6x + m + 5$  在  $x$  為正實數時，永遠取正值，試求  $m$  之範圍  $I$ 。

14. (A)  $I$  為開區間  $(\alpha, \beta)$  或  $(-\infty, \beta)$

(B)  $I$  為閉區間  $[\alpha, \beta]$

(C)  $I$  為左開右閉區間  $(\alpha, \beta]$  或  $(-\infty, \beta]$

(D)  $I$  為左閉右開區間  $[\alpha, \beta)$  或  $[\alpha, \infty)$

(E)  $I$  為  $(\alpha, \infty)$

記  $I$  的長度為  $l$ ，則

15. (A)  $l = 5$       (B)  $l = 6$       (C)  $l = 8$

(D)  $l = 12$       (E)  $l = \infty$  (即長度無限大)

設  $I$  之右端為  $\beta$ ，則

16. (A)  $\beta = \infty$       (B)  $\beta = 6$       (C)  $\beta = 5$

(D)  $\beta = 4$       (E)  $\beta = 0$

(以上三小題，各為單選，合為 11 分，錯了倒扣 11/124 分)。

答: (B), (C), (D)

解:

令

$$y = (5-m)x^2 - 6x + m + 5$$

表拋物線

$$\because y > 0 \quad \text{開口向上} \quad \therefore 5 - m > 0$$

$$\because \quad \quad \quad 5 - m > 0$$

則頂點橫坐標

$$\frac{6}{2(5-m)} > 0$$

$\Rightarrow B$  圖之情形不合，而  $A$  圖成立。

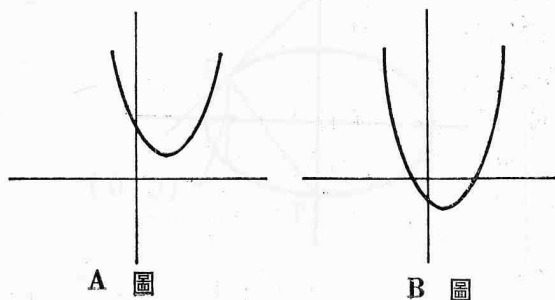
欲  $A$  圖成立則

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-6)^2 - 4(5-m)(m+5) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 < 16 - 4 < m < 4$$

故  $I = (-4, 4)$



評註:

- (1) 本題測驗二次函數的圖形，其圖形為拋物線。首項係數為正時，向上開口；為負時，向下開口，拋物線與X軸相交於二點時，其判別式 $> 0$ ；相切時，判別式 $= 0$ ；不相交時，判別式 $< 0$ 。
- (2) 用配方法找出拋物線頂點坐標是第一關鍵，然後根據題意知拋物線向上開口，再判斷拋物線與X軸的關係。
- (3) 本題是合理適中的考題。唯正確答案是  $I = (-4, 4)$  選擇項(A)I為開區間 $(\alpha, \beta)$ 或 $(-\infty, \beta)$ ，這個答案易引起爭議；首先 $\alpha, \beta$ 沒有交代是何含意，其次，在集中用「或」字連絡的，皆表示「聯集」的意思，顯然 $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, \beta)$ 。再者，本題的 $x$ 為正實數，但 $x$ 以任意實數來看，所得的解答仍相同。這對「高程度」的學生來說，失去了鑑別力。

【庚】自橢圓之正焦弦的一端作法線，會通過此橢圓短軸的一端，試求其離心率之平方到兩位有效數字

$$e^2 \div p \cdot 10^{-1} + q \cdot 10^{-2}; p, q \in A$$

17. (A)  $p \in \{1, 3, 5, 7\}$

(B)  $p \in \{2, 3, 6, 7\}$

(C)  $p \in \{4, 5, 6, 7\}$

(D)  $p \in \{8, 9\}$

(E)  $p \in \{0, 8\}$

18. (A)  $q \in \{1, 3, 5, 7\}$

(B)  $q \in \{2, 3, 6, 7\}$

(C)  $q \in \{4, 5, 6, 7\}$

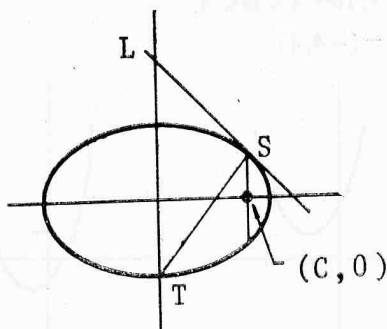
(D)  $q \in \{8, 9\}$

(E)  $q \in \{0, 8\}$

(以上兩小題，複選，合 11 分，錯了倒扣 11/960 分)。

答: (B, C), (B)

解:



設橢圓

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$S(c, \frac{b^2}{a})$$

$$T(0, -b)$$

切線

$$L: b^2cx + a^2\left(\frac{b^2}{a}\right)y = a^2b^2$$

$$\begin{cases} m_L \cdot m_T = -1 \\ \left(\frac{-b^2c}{ab^2}\right)\left(\frac{b^2/a + b}{c-0}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b^2+ab}{a}\right) = 1$$

$$b^2+ab = a^2$$

$$(a^2-c^2) + a\sqrt{a^2-c^2} = a^2$$

$$a^2(a^2-c^2) = c^4$$

$$a^4 - a^2c^2 - c^4 = 0$$

兩端同除  $c^4$

$$e^4 + e^2 - 1 = 0$$

$$e^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{負不合})$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618 \div 0.62$$

評註:

- (1) 本題考橢圓標準式，已知切點之切線方程式，切線，法線之垂直關係，橢圓離心率。
- (2) 本題要先設橢圓標準式，並作圖，找出正焦弦端點坐標，求過此點的切線方程式，並找出法線附近的短軸端點，求出兩點所連線段之斜率，再利用垂直關係，斜率之積 $= -1$ ，同時， $a^2 = b^2 + c^2$ 及 $e = c/a$ ，都是考生必須熟記的。
- (3) 本題較難，因為涉及到文字數，屬理論性的求值，可補救電腦閱卷的缺點，是測驗「高程度」考生的好題目。

【辛】採用極坐標，考慮錐線

$$r = 2d / (1 - \cos\theta) \quad (d > 0)$$

的一個焦弦  $PQ$ ，設其長度為  $l$ ，設錐線頂點為  $R$ ，而三角形  $PQR$  的面積  $S = kl^2d^q$ ，則

19. (A)  $p = 0$  (B)  $p = 1/2$  (C)  $p = 1$

(D)  $p = 3/2$  (E)  $p = 2$

20. (A)  $q = 0$  (B)  $q = 1/2$  (C)  $q = 1$

(D)  $q = 3/2$  (E)  $q = 2$

(以上兩小題，各為單選，合為 8 分，錯了倒扣 8/24 分)

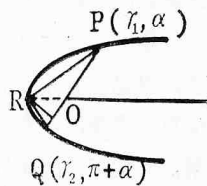
21. (A)  $k=1/2$       (B)  $k=1$       (C)  $k=3/2$   
 (D)  $k=2$       (E)  $k=2/3$

(單選, 3分, 錯了倒扣 $\frac{3}{4}$ 分)

答: (B), (D), (B)

解:  $R(d, \pi) \therefore OR=d$

設  $P(r_1, \alpha), Q(r_2, \pi+\alpha)$



$$\begin{aligned}
 l &= r_1 + r_2 \\
 &= \frac{2d}{1 - \cos\alpha} + \frac{2d}{1 - \cos(\pi + \alpha)} \\
 &= \frac{2d}{1 - \cos\alpha} + \frac{2d}{1 + \cos\alpha} \\
 &= \frac{4d}{1 - \cos^2\alpha} \\
 &= \frac{4d}{\sin^2\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4d}{l} \Rightarrow \sin\alpha = 2\sqrt{a/l}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} [OR \times \sin\alpha] l \\
 &= \frac{1}{2} d (2\sqrt{a/l}) l k \\
 &= l^{1/2} a^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{3}{2}, \quad k = 1$$

評註:

- (1) 本題考如何由圓錐曲線的極方程式中, 求弦長。
- (2) 先把極方程的圖形畫出, 再設弦兩端之坐標, 然後求出弦長與弦之方向角的關係, 再求 $\Delta$ 面積。
- (3) 多年不見的「極坐標」, 今年出現了, 許多考生可能放棄了這一章, 這給未來考生一個警惕! 一般學生專攻所謂「重要單元」, 打算投機取巧, 這對學習數學而言, 是一弊病。教科書中之各單元, 最好兩、三年之內的試題, 都能兼顧。

【壬】任意而且獨立地用 4 或 5 代入二維行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ 的四個成分 } a, b, c, d \text{ 所得的行列式值為奇}$$

數的機率為何? 設之為  $N/16$ , 則

22. (A)  $N \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$   
 (B)  $N \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$   
 (C)  $N \in \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}$   
 (D)  $N \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$   
 (E)  $N \in \{0, 16\}$

(複選, 11分, 錯了倒扣 $\frac{11}{30}$ 分)。

答: (B, C)

$$\text{解: } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

為奇數, 有二情形

(1)  $ad - bc = \text{偶} - \text{奇}$

共有  $(2 \cdot 2 - 1)(1 \cdot 1) = 3$  種情形

(2)  $ad - bc = \text{奇} - \text{偶}$

共有  $(1 \cdot 1)(2 \cdot 2 - 1) = 3$  種情形

$ad - bc$  為奇數共有  $3 + 3 = 6$  種情形

所求機率為  $6/16$

$\therefore N = 6$

評註:

- (1) 本題考試機率及二階行列式展開。
- (2) 本題表面是問機率, 實際是簡單的乘法原理。
- (3) 很簡單的機率問題, 比往年的機率考題都簡單。

### 三、乙丁組試題解答及評註

(甲丙組中的(戊)複數, (辛)極坐標刪掉, 代以下列兩題, 其餘皆相同)。

【甲】橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上的兩點  $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$  與  $(a\cos\beta, b\sin\beta)$  之連線, 斜率為何?

- (A)  $m = \frac{b}{a} \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$
- (B)  $m = \frac{-b}{a} \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$
- (C)  $m = \frac{b}{a} \cot \frac{\alpha + \beta}{2}$
- (D)  $m = \frac{-b}{a} \cot \frac{\alpha + \beta}{2}$
- (E) 以上皆非

(單選, 11分, 錯了倒扣 $\frac{11}{4}$ 分)。

答: (D)

解:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{b \sin \alpha - b \sin \beta}{a \cos \alpha - a \cos \beta} = \frac{b(\sin \alpha - \sin \beta)}{a(\cos \alpha - \cos \beta)} \\
 &= \frac{2b \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{-2a \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \\
 &= \frac{b}{-a} \cot \frac{\alpha + \beta}{2}
 \end{aligned}$$

評註:

- (1) 本題考兩點所連線段之斜率及和差化積。
- (2) 考生只要熟悉複角公式，就可推出和差化積的公式，不要強記每一個公式。
- (3) 本題是簡單的三角公式應用。

【乙】試解三角方程式

$$\cos 2x + \cos^4 x + \cos 6x = 3.$$

在  $-\pi/2 < x < 3\pi/2$  的範圍內，設有  $N$  個解。

2. (A)  $N = 0$       (B)  $N = 1$       (C)  $N = 2$   
 (D)  $N = 3$       (E)  $N = 6$

(單選，11分，錯了倒扣  $\frac{11}{4}$  分)。

答: (C)

解

$$\cos 2x + \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 3$$

$$\cos 2x + (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 3$$

$$4\cos 2x + 1 + 2\cos 2x + 16\cos^3 2x - 12\cos 2x = 12$$

$$16\cos^3 2x + \cos^2 2x - 6\cos 2x - 11 = 0$$

$$(16\cos^2 2x + 17\cos 2x + 11)(\cos 2x - 1) = 0$$

$$(1) 16\cos^2 2x + 17\cos 2x + 11 = 0$$

$$\because \Delta = 17^2 - 4 \cdot 16 \cdot 11 < 0 \quad (\text{不合})$$

$$(2) \cos 2x - 1 = 0$$

$$\therefore \cos 2x = 1, \quad 2x = 2n\pi$$

$$\because -\pi < 2x < 3\pi$$

$$\therefore -\pi < 2n\pi < 3\pi \quad -1 < 2n < 3 \quad \therefore n = 0, 1$$

故  $N = 2$

評註

- (1) 本題皆三角方程式。
- (2) 靈活運用複角公式，將原來不規則的方程式，變為一個變數的三次方程式。
- (3) 較上題稍難的三角題目。

## 四、特色

1. 今年全採題組方式，共九大題。題數較往年少，但能兼顧到各冊。文字敘述簡明清楚，沒有非數學的困擾，學生可以用全部的考試時間，實際去解題，是故，甄別力可提高。
2. 問問題的方式靈活，不需要解題「絕招」，看到試題後，只要稍加思考，就能夠想到最迅捷的解法，不需要揣試各種解法。
3. 難易適中，深深掌握高中數學教材重點；沒有「送分題」，沒有「反代題」，更沒有「考古題」，沒有一題超出課本範圍，但也沒有「抄」自課本或參考書。
4. 着重計算，但演算不複雜，不繁瑣。對缺乏運算能力的人，仍無法猜出答案來，已充分避免學生的死背解答及公式的弊病了。
5. 選擇答案方式，不能猜答，需要老實地去做，投機取巧的考生，絕對沒有辦法「猜」得分數。
6. 沒有跳號，去年跳號惹來許多怨聲，跳號並不能防止作弊。
7. 採連鎖計分，連鎖題必須全對才能一齊得分，否則一有錯，就連累了兩三題，這種計分法，讓考生受不了。

## 五、建議

上面列出本次試題的特色，其實大都是優點，僅略帶小疵，但瑕不掩瑜，此次命題可謂命題教授的智慧、審慎及苦心的結晶，如果每年都出現這樣合理的試題，相信可帶動今後高中數學教育的正常化。為了完善更完善，我仍提出一些淺見，作為以後聯考命題的參考。

1. 甲丙組和乙丁組只有兩題稍有不同，使得乙丁組覺得較難而甲丙組覺得不夠深廣，今後宜分開命題。
2. 連鎖給分雖可避免選擇題的缺點，但仍需顧到部分給分。譬如，在試題中，要求一個具有兩位有效數字的量，首位有效數字較次位重要，要使計分有較大的彈性，應將計分設計成，答對首位數得若干分，首位答對了，再答對次位數，又得若干分，這比較合理兼顧部分成績的計分法。同時，不合理的連坐題目，也應避免。
3. 請聯招會在放榜以後，發表與考生成績有關的各種統計資料，以供教育工作者的參考，並藉以改進教學。

——本文作者現任職於師大附中