何謂應用數學

戴久永

數學起源於簡單的實用問題，諸如把一羣家畜平均分給家人（數論）和大量土地面積（幾何）。漸漸地，有人把數學基本的觀念組織起來並且溶入邏輯結構。歐幾里得的幾何就是早期數學成就的一個重要實例。古希臘人體認到數學定理可以基於某些公設演繹導出，在相當長的一段歲月之後，人們才確認公設（例如平行線公設）並無法全然明確地依經驗而證實。正由於平行線公設的改訂，才有非歐幾何的誕生，導繹出很多重要的分枝。

由於愈來愈多的部分數學內涵不涉及理論科學而獨立地發展，「純數學」這名詞於是出現了。純數學學者的創造性作品誠然令人印象良深， 但是如果我們把對數學的研究割地自限， 却是一件很不明智的舉動。我們研究數學的同時也應顧及其應用才能提供較豐富的內涵及更大智力上的挑戰。更進一步地說，如此研究法方能刺激新的數學方法及理論的發展，而某些這類的發展又能轉而找到在科學上的應用，如此循環不已。

如果有人想要爲應用數學下一定義，必然會漏洞百出，偶讀 C.C. Lin 和 L.A. Segel 的 *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*(Mac Millan Publishing Co. 1974)的第一章，覺得該章對於應用數學有非常精當的闡述，特地摘譯改寫提供讀者們參考。

1. 應用數學的性質

應用數學的發展是基於數學與科學唇齒相依的精神與信念。雖然並非所有數學都與科學存有這種相依的關係，但在應用數學的研究上，我們必須著重這部份的數學。這種作法是基於一個假設：由於研究科學上的問題而引發出來的數學有較大的可能又再應用於解決其他科學上的問題。舉個例子來說，我們原先的古典流體力學及彈性力學領域所發展出來的偏微分方程式上的穩定性理論(stability theory) 可以用來研究發展生物學 (developmental biology) 上的問題[1]。

依據數學史上的進展而言，數學與物理有相當密切的關係。古典的例子可由牛頓、高斯、尤拉、柯西及其他數學家的著作中找到，而較近的例子則可由研究相對論、布朗運動、統計力學以及相關聯的共變數理論 (theory of covariance)，機率和廣義調和分析等理論中發現。爲什麼數學與物理學會有如此密切的關係？對於這個哲學性問題最常聽到的答案[2]是「造物主是位數學家。」換句話說，人們相信大自然有某種基本的諧和及秩序。因此，自然界的現象能用數學上邏輯的原理加以組合。反之，在社會學和經濟學的領域，則是由於人們對最適性（optimality）的要求，硬加上的邏輯，方使數學在這些學科上佔有重要角色。

2. 應用數學的領域，目標與實用

應用數學的領域相當廣泛，我們借用一段愛因斯坦的話便可確切地描述[3]。

「其範疇實包含所有我們知識中能以數學式子加以表達者。」

這些話愛氏本來是用以定義物理學的，然而依字面的解釋來說，這個定義顯然包括生物學、經濟學、通訊工程等的數學理論。因此似乎更適於描述應用數學。

我們現在試着對應用數學的目標和方法給予簡明的闡述，並且將其與純數學和理論科學的目標，方法相互對照，或許能使讀者明瞭它們之間的特徵。

應用數學的目標在於利用數學闡明科學的概念和描述科學上的現象，並且經由這種研究，刺激新的數學的發展。利用數學以增進科學的理解的過程大致可分成以下三大步驟：

(i) 用數學式子表達科學上問題。

(ii) 求得上述式子的解答。

(iii) 對所得解答及其在科學上的經驗的驗證加以解釋。

人們經常誤認爲第二個步驟最爲緊要，並且誤以爲計算技巧爲應用數學家最爲可貴的「資產」。一般而言，這三大步驟實具有相等的重要性。在某些類型的問題中，其中某一步驟或許比另外兩大步驟顯得重要或困難。

無可否認地，對於各種計算方法的知識及運算技巧的純熟自然很重要。雖然一個僅僅熟知各種計算方法的人對於其他想利用數學的科學家確實能提供彌足珍貴的協助，然而我們要明白這種知識並不足以使他成爲一個自立的科學家。一個自立的科學家必須同時要能於建構數學模式之初，立下判斷，決定要「攻擊」那些問題，並且選擇如何加以理想化及採取那些近似值，才會於簡化問題時不至於失去其精義。因此一個有雄心的應用數學家不僅應具有運算的本領，而且必須更努力地從事健全的判斷力的培養。

最後，非常重要的一點是由數學理論中汲取適切的科學的結論及實際驗證的蘊涵，而且應儘可能地把結論簡化至最簡單的形式，並且以最扼要的方式表示。這個步驟是所有努力的最終點，並且是往後進展的基礎。新的理解的獲得，新的見識的取得，新的展望的斬獲，這些都比僅只於某些公式的導出和某些有用的數值表的編纂要來得重要和令人滿足感，特定的數值資料的累積只應視同達到目的的手段而已。

各位現在大概已能體認到對問題的科學性動機的理解和應用啓發式的推理能力加上運算技巧爲施行應用數學的必備條件了。這些要素遠比進行嚴密的證明的能力要來得重要。在很多狀況下，一個數學理論嚴密的建構可能要費時多年，然而在此期間，雖然他必須力求正確，並且在其推理上儘量地小心，應用數學家在面對這種邏輯構造不完備的狀況下，仍然必須繼續工作。

3. 應用數學與純數學的對比

純數學與應用數學在動機與目標上的差異，及其因此而導致強調重點及所處態度上的差異是我們最先要完全確認明辨的要點。在純數學方面，人們通常面對一些抽象概念，邏輯或爲唯一鑑定其理論正確性的工具；而在應用學數方面，經驗證實則爲最主要與最有力的判斷準則。

話雖如此，兩者之間却仍有很密切的關係存在。在某些情況（例如天體力學），嚴密的定理證明對於實用上也頗具價值。另一方面，在很多情況下，新的數學觀念和理論都是應用數學家或理論科學家們所發展出來的。分佈理論 (theory of distributions) 就是一個相當新的實例。

倘若一個科學上的問題用現存的數學概念無法充分地架構起來，自然就必得創建出新的概念，例如馮紐曼的抽象的「對局理論」 (game theory) 概念。

如果一個用數學式子表示的問題，無法以現有的方法解出，或者其解的性質無法以現有的理論充分明瞭，就必須發展出新的方法和新的理論（很多非線性問題就是屬於此類）。因此我們記錄應用數學的第四部份[4]。

(iv)　經由創造、推廣化、抽象化和公理化的建構創建科學上有關的新數學。

各位要知道，在數學理論發展期間，最先獲得證明的一些定理或許對純數學並不產生任何影響，但是我們仍應視其爲對應用數學的目的有用的成就來欣賞它。另一方面，許多次要的純數學也隱藏於應用數學的圈套之下（反之亦然）。

4. 應用數學與理論科學的對比

理論科學家與應用數學家之間的區分通常相當模糊不清。因爲他們各自常以對方的精神在工作。一個理論物理學家在他的問題於「首度攻擊」無法解決時，往往會轉向從事於相關的數字模式問題的研究，甚至於到達尾隨純數學家所爲的地步，以便於建立起對實際物理問題的數學部份理解的信心與判斷力。這種類型的工作也是應用數學家在解決他們的問題的時候常做的事。同時，應用數學家由他的理論中抽取科學性的結論，以便與實際證據互相對照比較。爲了要使這工作做得頗具效率，應用數學家必須對他所研究的問題具有相當程度的科學知識。

通常一位理論科學家由於對某一特定題材長期地研究，因此對於某一學科會有相當專精的知識；相反地，一位應用數學家則可能研究多於一種學科，而對各學科和數學都有所貢獻。在這個分工越來越專業化的時代，科學與數學的「互益互榮」(cross fertilization) 確實爲應用數學家們最有用也最令人滿意的活動之一。

數學與任何應用領域之間的交互影響實爲雙向的。其中一個方向，就是數學應用於其他領域比較顯而易見。範圍包括由求得某個實用問題的解答到廣泛理論的發展，有好些不同的形式。另外一個方向，也就是常爲人們所忽視的方向，就是應用領域「應用」於數學。換句話說，就是刺激引發新的數學的發展或者協助解決固有的數學難題。

大致說來，一個理論物理學家（譬如），對於發現一個新的物理定律或原理比較感興趣。因此他比較偏愛和這些發現有關的研究，即使這種嘗試僅只部份成功也不在乎。他的工作通常較趨於歸納和預測的性質。應用數學家則對於如何適切地以數學描述現象較感興趣，他趨向於導繹已知原理或定律的結論。

舉個例子來說，颶風的起因不太會成爲一個現代物理學家的中心興趣，因爲颶風的發生可以完全用古典力學和熱力學的原理來描述，然而對於應用數學家來說，它却是一個相當具有吸引力的素材。他非常欣賞所涉及的非線性問題的挑戰以及該現象所具有的科學上的趣味。

註　　釋

(1)一般人都沒想到星體的移動和阿米巴的活動會有什麼相似的地方，但是借助於應用數學的威力的證實，人們領悟到並非如此。例如我們所看見星體和阿米巴的行動就如同它們的質量呈連續性分佈一般。雖然事實上我們必須利用顯微鏡方能明察阿米巴間的間隔，而即使是最靠近的兩顆星體之間的距離却要以光年計算。一個理想化的數學模式對於例如連體性 (Continum) 假設上的「誤差」並非緊要（星體與阿米巴實均屬離散個體，但因過於密集，因此將其理想化爲連體）眞正的問題是在於：「這種誤差對於我們所要調查的現象是否有顯著性的影響？」

對於星體和阿米巴而言，其於連體模式中的理想化實在引人注目，因爲依據所呈現現象中微粒的外觀即可令人一目瞭然。水與空氣似乎「像」是連體，對於大多數的人來說，分子的存在僅是一種傳聞，連體模式對於研究涉及這類介質的現象當然也頗爲有用。

另外一個星體與阿米巴間的相似性爲兩者均需對其組織的結構加以解釋。星體的螺旋狀分佈型式即使爲了美學上的理由就有調查的必要，而更重要的原因是該型態對於所涉及的星體間的引力的特性提供了重要的線索。人們研究阿米巴的形成運動的主要原因則在於它能對於組織細胞的運動（發展生物學的基本要項）指出端倪。

(2)「God is number」——畢達哥拉斯。「God ever geometrizes」——柏拉圖。「God ever arithmetizes」——賈克比 (Carl Gustav Jacob Jacobi) "The Great Architect of the Univevse now begins to appear as mathematician" ——Sir James Jeans。(英國物理學家)，以上各名言均錄自美國數學史家 E. T. Bell 所著的 *Men of Mathematics* (London: Penguin 1953) 第 21 頁。

(3)愛氏晚年自傳: *Out of My Later Years* (New York Philosophical Library, 1950)第 98 頁。

(4)有人把這第四部份視爲唯一的應用數學，而把前三部份列入科學而非數學的領域。另外有些人則認爲能歸列於這第四部份的著作缺乏純科學的相關性，因此主要僅能依其本身的數學價值判斷是否有用。

(5)多少年來，數學與物理學之間的關係就是進行着這種雙向交流的實例。物理學中固然採用了各式各様的數學，而物理的問題也每每刺激了新的數學的發展，微積分就是其中一例。此外，某些時候，物理的模式也曾用以解決數學上的問題。(關於這個觀點的討論，有興趣的讀者可參閱 George Polya 所著的 *Induction and Analogy in Mathematics* Vol I. Princeton University Press Princeton, N.J., 1954。)

由於時代的進展，計算科學 (Computing sciences) 的發達，各應用領域的研究工作均有日趨數量化的傾向。社會學、生物學及生態環境學又何能例外，這些學科上的問題固然有待利用數學來解決，反之，它們也刺激引發出來新的數學。事實上，這些方面的問題引發得到的數學內涵本身就可能很有意思。固然我們希望它會有些用處，但是「可應用性」並非用以評估的唯一標準。我們應牢記在心有很多數學理論早先發展時純粹只是爲了數學推論，後來却發現它們大有用處。布氏代數 (Boolean Algebra) 就是一個很好的實例，在它的理論發展五十餘年之後，人們才發現可利用它來設計計算機的邏輯結構。所以有些數字看似無用，實則不是不用，可能是時機未到。(換句話說就是「理論領先了技藝 (technology)」之故。)

另外也有其他方面的數學原先是受某一種應用的刺激而引發出來的，事後却發現它對另一方面的應用相當有用。譬如大部份的圖形理論 (graph theory) 就有類似上述的歷史。圖形理論起源於著名的「克橋問題」(Königsberg Bridge Problem)，後來又受到化學結構以及分析遊戲和謎題 (games and puzzles)之類問題的刺激，如今却大量地應用於遺傳學、生態學、交通流量以及通訊等等各方面。

——本文作者現任教於交通大學運輸管理系