數學傳播 40卷4期, pp. 93-96

空間多邊形的幾個性質

吳 波

文 [1] 給出了正三角形和正五邊形的兩個性質, 文 [2]、[3]、[4] 對此作了進一步探究, 得到 (下面的表述與原文略有不同):

命題1([2]): 球 O 的內接 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊相等, P 為空間中任意一點, 則向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\ldots$、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別對應在向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\ldots$、$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 上的射影之和等於 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的半周長(約定 $A_{n+1}=A_1$)。

命題2([4]): P 為圓內接多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 所在平面內任意一點, 設點 P 在邊 A_iA_{i+1} 所在直線上的射影為 B_i $(i=1,2,\ldots,n$, 約定 $A_{n+1}=A_1)$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{B_iA_i}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{B_iA_{i+1}}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|^2.$$

本文擬將相關命題作進一步推廣。

引理: $\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}=\dfrac{1}{2}(|OM_1|^2+|OM_2|^2-|M_1M_2|^2).$

證明: $|M_1M_2|^2=\overrightarrow{M_1M_2}^2=(\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2})^2=|OM_1|^2+|OM_2|^2-2\overrightarrow{OM_1}\bullet\overrightarrow{OM_2}.$
將上式略作變形即得引理中結論。 □

上述引理其實就是餘弦定理的變形。我們可用它將命題 2 推廣到任意空間多邊形, 即:

性質1: 對給定的空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 和任意一點 P 有

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}})=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_{i+1}P}\bullet\overrightarrow{A_{i+1}A_i})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|^2(\text{約定 } A_{n+1}=A_1).$$

圖 1 所示的是 $n=5$ 時的情形。

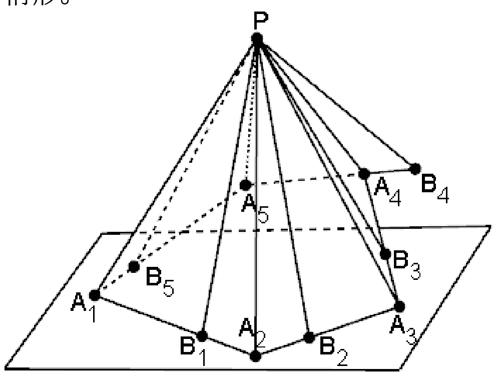

圖1

證明: 由引理有:

$$\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\frac{1}{2}(|A_iA_{i+1}|^2+|A_iP|^2-|A_{i+1}P|^2)$$

在上式中令 i 分別取 $1,2,\ldots,n$ 得 (注意 $A_{n+1}=A_1$):

$$\overrightarrow{A_1P}\bullet\overrightarrow{A_1A_2}=\frac{1}{2}(|A_1A_2|^2+|A_1P|^2-|A_2P|^2),$$
$$\overrightarrow{A_2P}\bullet\overrightarrow{A_2A_3}=\frac{1}{2}(|A_2A_3|^2+|A_2P|^2-|A_3P|^2),$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{A_nP}\bullet\overrightarrow{A_nA_1}=\frac{1}{2}(|A_nA_1|^2+|A_nP|^2-|A_1P|^2),$$

將上面 n 個等式累加可得:

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|^2.$$

同理可證另一個式子也等於此定值。 □

由性質 1, 我們還可以證明下面的兩個性質:

性質2: 如圖1, 對給定的空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 和空間中任意一點 P, 邊 A_iA_{i+1} 的中點爲 M_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{M_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=0,\qquad (約定\ A_{n+1}=A_1).$$

證明: 由性質 1 中

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}})=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_{i+1}P}\bullet\overrightarrow{A_{i+1}A_i})\quad 有\quad \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iP}+\overrightarrow{A_{i+1}P})\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=0.$$

而邊 A_iA_{i+1} 的中點爲 M_i, 則 $\overrightarrow{A_iP}+\overrightarrow{A_{i+1}P}=2\overrightarrow{M_iP}$, 代入上式即知結論成立。 □

性質3: 如圖1, 對給定的空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 和空間中任意一點 P, 設點 P 在邊 A_iA_{i+1} 所在直線上的射影爲 B_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}|A_iB_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|A_{i+1}B_i|^2,\qquad (\text{約定 } A_{n+1}=A_1).$$

證明: 由題設知: 有向線段 $\overline{A_iB_i}$ 是向量 $\overrightarrow{A_iP}$ 在向量 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 上射影, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}&=\overline{A_iB_i}\bullet\overline{A_iA_{i+1}}=\overline{A_iB_i}\bullet(\overline{A_iB_i}+\overline{B_iA_{i+1}})\\&=\overline{A_iB_i}^2+\overline{A_iB_i}\bullet\overline{B_iA_{i+1}}=|A_iB_i|^2-\overline{A_iB_i}\bullet\overline{A_{i+1}B_i},\end{aligned}$$

則

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}|A_iB_i|^2-\sum_{i=1}^{n}(\overline{A_iB_i}\bullet\overline{A_{i+1}B_i}).$$

同理有

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{i+1}P}\bullet\overrightarrow{A_{i+1}A_i}=\sum_{i=1}^{n}|A_{i+1}B_i|^2-\sum_{i=1}^{n}(\overline{A_iB_i}\bullet\overline{A_{i+1}B_i}).$$

而由性質 1 知上述兩等式的左側相等, 再將右側相同部分抵消即知:

$$\sum_{i=1}^{n}|A_iB_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|A_{i+1}B_i|^2.$$ □

注: 由勾股定理知:$|A_iB_i|^2=|A_iP|^2-|B_iP|^2$, $|A_{i+1}B_i|^2=|A_{i+1}P|^2-|B_iP|^2$, 令 $i=1,2,\ldots,n$ 再累加求和也可證明此性質。

下面我們用性質 1 將命題 1 作進一步推廣。

性質4: 若空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊相等, P 爲空間中任意一點, 則向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、...、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別對應在向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、...、$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 上的射影之和等於多邊形 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的半周長 (約定 $A_{n+1}=A_1$)。

證明: 設空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的邊長爲 a, 由性質 1 得

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|A_iA_{i+1}|^2=\frac{1}{2}na^2.$$

而另一方面, 如圖 1, $\overrightarrow{A_iP}$ 在 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 上射影

$$\overline{A_iB_i}=\frac{\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{|\overrightarrow{A_iA_{i+1}}|}=\frac{1}{a}(\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}}).$$

則諸射影之和

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{A_iB_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a}(\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}})=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{A_iP}\bullet\overrightarrow{A_iA_{i+1}})=\frac{1}{a}\times\frac{1}{2}na^2=\frac{1}{2}na.$$

注: 同理有 $\overrightarrow{A_2P}$、$\overrightarrow{A_3P}$、...、$\overrightarrow{A_{n+1}P}$ 分別對應在向量 $\overrightarrow{A_2A_1}$、$\overrightarrow{A_3A_2}$、...、$\overrightarrow{A_{n+1}A_n}$ 上的射影之和也等於多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 的半周長 (約定 $A_{n+1}=A_1$)。

與性質 4 類似, 結合性質 2 可推得:

性質5: 若空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊相等, P 爲空間中任意一點, 邊 A_iA_{i+1} 的中點爲 M_i $(i=1,2,\ldots,n)$, 則向量 $\overrightarrow{M_1P}$、$\overrightarrow{M_2P}$、...、$\overrightarrow{M_nP}$ 分別對應在向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、...、$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ 上的射影之和爲零 (約定 $A_{n+1}=A_1$)。

文 [2] 的性質 2 可推廣爲:

性質6: 若空間多邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 各邊相等, 空間中一點 P 在邊 A_iA_{i+1} 所在直線上的射影爲 B_i 且 B_i 在線段 A_iA_{i+1} 之內, $\triangle PA_iB_i$ 的內切圓半徑爲 r_{2i-1}, $\triangle PA_{i+1}B_i$ 的內切圓半徑爲 r_{2i} $(i=1,2,\ldots,n)$, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_{2i-1}=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{2i}$ (約定 $A_{n+1}=A_1$)。

事實上, 直角三角形的內切圓半徑容易用邊表示出來, 再累加求和之後由性質 4 可推出性質 6 成立。具體證明過程與文 [1] 相同, 此處略。

参考資料

1. 劉步松。正三角形和正五邊形的兩個性質。數學傳播季刊, 36(1), 93-96, 2012。
2. 吳波。各邊相等的球內接多邊形的兩個性質。數學傳播季刊, 37(4), 94-96, 2013。
3. 徐道。正三角形一個性質的推廣。數學通報, 53(1):55-57, 2014。
4. 寇恒清。正多邊形一個性質的簡證與再推廣。數學通報, 53(11), 58-59, 2014。

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—