數學傳播 40卷4期, pp. 89-92

三個著名定理的等價證明

趙國瑞

在幾何學發展的歷史長河中, 人們先後發現許多經久不衰的平面幾何定理, 其中托勒密定理、斯德瓦特定理和西姆松定理尤爲著名。

托勒密定理: 圓內接四邊形兩組對邊乘積之和等於兩對角線乘積。

如圖1, 四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的圓內接四邊形, 則 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

簡證: 作 $\angle ACB=\angle DCE$。

易證 $\triangle ACB\sim\triangle DCE$, $\triangle ACD\sim\triangle BCE$。

$$\therefore\ \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CD},\qquad \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BE}.$$

即 $AB\cdot CD=AC\cdot DE$, $BC\cdot AD=AC\cdot BE$。

$\therefore\ AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(DE+BE)=AC\cdot BD$。

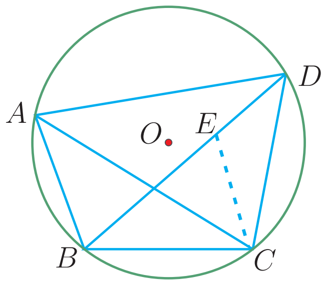

圖 1

說明: (1) 對於任意凸四邊形 $ABCD$, 必有 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geq AC\cdot BD$, 當且僅當四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形時等號成立。

(2) 托勒密定理有逆定理: 如果一個四邊形兩組對邊乘積之和等於兩對角線乘積, 那麼這個四邊形內接於圓。

斯德瓦特定理: 如圖 2, 點 P 爲 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上異於 B、C 點的任意一點, 連結 AP, 則 $AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$。

簡證: 設 $\angle APB=\theta$, 則 $\angle APC=180^\circ-\theta$。

由餘弦定理, 得

$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos\theta$,

$AC^2=AP^2+PC^2+2AP\cdot PC\cdot\cos\theta$。

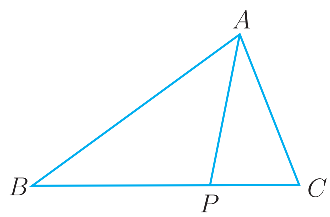

圖 2

$\therefore\ AB^2{\cdot}PC+AC^2{\cdot}BP=AP^2(PC+BP)+BP{\cdot}PC(BP+CP)=AP^2{\cdot}BC+BP{\cdot}PC{\cdot}BC$。

說明: 證明斯德瓦特定理亦可過點 A 作 BC 邊上的高, 利用畢氏定理進行證明。

西姆松定理: 三角形外接圓上任意一點向三邊 (或其延長線) 所作垂線的垂足共線。

如圖3, 點 P 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓上任意一點, 過點 P 分別作 $PD\perp AB$ 於 D, $PE\perp AC$ 於 E, $PF\perp BC$ 於 F, 則點 D、E、F 共線。

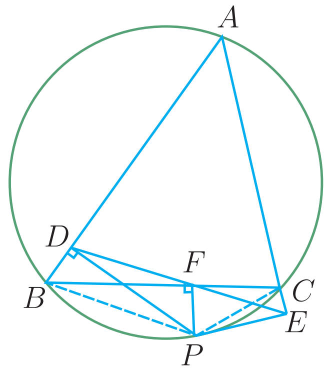

圖3

簡證: 連結 BP、CP。

由 $PD\perp AB$, $PF\perp BC$, 知點 B、D、F、P 四點共圓,

$\therefore\ \angle BFD=\angle BPD$。

由 $PE\perp AC$, $PF\perp BC$, 知點 E、C、F、P 四點共圓,

$\therefore\ \angle CFE=\angle CPE$。

而 $\angle DBP=\angle PCE$, $\therefore\ \angle BPD=\angle CPE$。

$\therefore \angle BFD=\angle CFE$。

$\therefore\ \angle DFC+\angle CFE=\angle DFC+\angle BFD=180^\circ$, 即點 D、E、F 共線。

說明: 西姆松定理亦有逆定理: 從一點向三角形三邊 (或其延長線) 所作垂線的垂足如果共線, 那麼該點在三角形的外接圓上。

對於上面三個定理, 無論是從定理內容, 還是從定理的證明過程來看, 似乎沒有什麼聯繫。筆者通過深入研究發現, 三個定理其實是等價的。即托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理 $\Leftrightarrow$ 西姆松定理。下面來證明這三個定理的等價性。

一、托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理

(a) 托勒密定理 $\Rightarrow$ 斯德瓦特定理

已知: 如圖 4, 點 P 爲 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上異於 B、C 點的任意一點, 連結 AP, 則 $AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$。

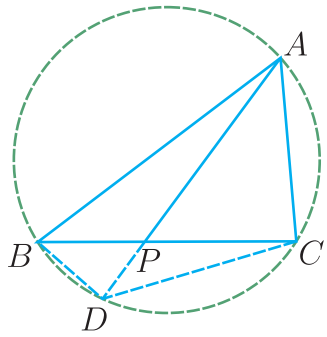

圖4

證明: 作 $\triangle ABC$ 的外接圓, 延長 AP 交外接圓於點 D。連結 BD、CD。

由托勒密定理, 得
$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD\cdot BC. \tag{1}$$
由相交弦定理, 得
$$BP\cdot PC=AP\cdot PD.\qquad \therefore PD=\frac{BP\cdot PC}{AP}. \tag{2}$$

易證 $\triangle APC\sim\triangle BPD$, $\triangle APB\sim\triangle CPD$。

$$\therefore\ \frac{AC}{BD}=\frac{AP}{BP},\qquad \frac{AB}{CD}=\frac{AP}{PC}.$$

$$\therefore\ BD=\frac{AC\cdot BP}{AP},\tag{3}$$

$$CD=\frac{AB\cdot PC}{AP}.\tag{4}$$

將 (2)、(3)、(4) 代入 (1), 得

$$AB\cdot\frac{AB\cdot PC}{AP}+AC\cdot\frac{AC\cdot BP}{AP}=\left(AP+\frac{BP\cdot PC}{AP}\right)\cdot BC.$$

整理, 得 $AB^2\cdot PC+AC^2\cdot BP=AP^2\cdot BC+BP\cdot PC\cdot BC$。

(b) 斯德瓦特定理 $\Rightarrow$ 托勒密定理

將托勒密定理 $\Rightarrow$ 斯德瓦特定理的證明過程一步步逆向推理, 即可由斯德瓦特定理 $\Rightarrow$ 托勒密定理。

由 (a)、(b) 可知, 托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理。

二、西姆松定理 $\Leftrightarrow$ 托勒密定理

(a) 西姆松定理 $\Rightarrow$ 托勒密定理

如圖 5, 四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的內接四邊形, 則 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

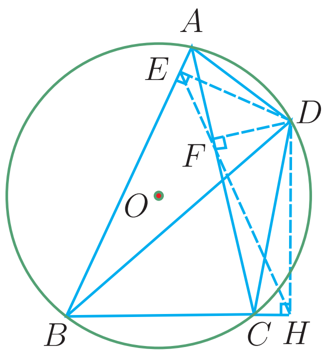

圖 5

證明: 過點 D 分別作 $DE\perp AB$ 於 E, $DF\perp AC$ 於 F, $DH\perp BC$ 於 H。連結 EF、FH、EH。由西姆松定理, 得

$$EF+FH=EH.\tag{5}$$

由 $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 知點 A、E、F、D 四點共圓, 且 AD 是該圓的直徑。

在 $\triangle AEF$ 中, 由正弦定理, 得 $\dfrac{EF}{\sin A}=AD$, $\therefore\ EF=AD\cdot\sin A$。

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\dfrac{BC}{\sin A}=2R$ (R為 $\odot O$ 的半徑), $\therefore\ \sin A=\dfrac{BC}{2R}$。

$$\therefore\ EF=\frac{AD\cdot BC}{2R}.\tag{6}$$

$$\text{同理}\ FH=\frac{AB\cdot CD}{2R},\tag{7}$$

$$EH=\frac{AC\cdot BD}{2R},\tag{8}$$

將 (6)、(7)、(8) 代入 (5), 得 $\dfrac{AD\cdot BC}{2R}+\dfrac{AB\cdot CD}{2R}=\dfrac{AC\cdot BD}{2R}$。

整理, 得 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

(b) 托勒密定理 $\Rightarrow$ 西姆松定理

將西姆松定理 $\Rightarrow$ 托勒密定理的證明過程一步步逆向推理, 即可由托勒密定理 $\Rightarrow$ 西姆松定理。

由 (a)、(b) 可知, 托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理。

既然托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理, 西姆松定理 $\Leftrightarrow$ 托勒密定理, 因此必有斯德瓦特定理 $\Leftrightarrow$ 西姆松定理, 從而托勒密定理 $\Leftrightarrow$ 斯德瓦特定理 $\Leftrightarrow$ 西姆松定理。

以上三個著名的定理雖然是不同國家的數學家在不同年代發現的, 但其等價說明這三個定理只是表達形式不同而已, 其本質是一樣的。研究定理是否等價, 有利於揭示定理的本質, 以便我們更好地把握定理本身。

—本文作者任教湖北省襄陽市襄州區黃集鎮初級中學—