數學傳播 40卷4期, pp. 71-81

超級正交拉丁方與超級雙重幻方系

梁培基 · 邱荷生

一、前言

在 [1] 中, 談祥柏介紹了 [2] 中的一個 8 階雙重幻方。在 [3] 中梁培基構造了一個 8 階雙重幻方和一個 16 階雙重幻方。

我們首先定義了超級雙重幻方和超級拉丁方。並說明如何由兩個正交的超級拉丁方構造出一個超級雙重幻方, 以及如何由一個超級雙重幻方構造一個超級雙重幻方系。並指出由兩個階次分別爲 m 和 n 的超級雙重幻方有可能構造出階次爲 m^kn^e 階的超級雙重幻方。並且給出兩個 8 階超級雙重幻方的例子及一個 32 階超級雙重幻方的例子。還證明了不存在 4 階超級雙重幻方, 最後並提出了一些遺留的問題。

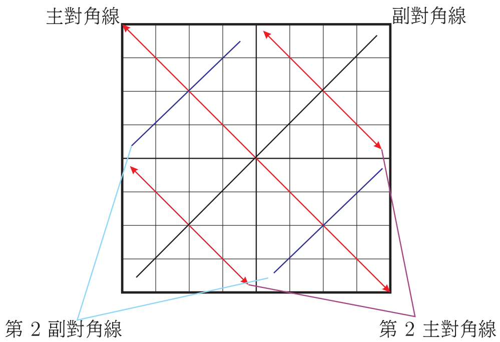
二、基本定義

如果一個 n 階方陣 $A=(a_{ij})$ 的元素是由 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 這 n 個元素組成, 而且此方陣的每一行 (列) 的元素都互不相同, 我們稱此方陣爲一 n 階拉丁方。

對一個 $2n$ 階的方陣 $A=(a_{ij})$, 我們稱它的元素 $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ 爲 A 的主對角線元素; $a_{1,2n},a_{2,2n-1},\ldots,a_{2n,1}$ 爲 A 的副對角線元素。

而元素: $a_{n,1},a_{n-1,2},a_{n-2,3},\ldots,a_{1,n}$ 及 $a_{n+1,2n},a_{2n+2,2n-1},a_{n+3,2n-2},\ldots,a_{2n,n+2}$ 爲 A 的第二副對角線。

而元素: $a_{1,n+1},a_{2,n+2},a_{3,n+3},\ldots,a_{n,2n}$ 及 $a_{n+1,1},a_{n+2,2},a_{n+3,3},\ldots,a_{2n,n}$ 爲 A 的第二主對角線。以 $n=4$ 爲例 $2n$ 階的各個對角線如下:



如果一個 $2n$ 階的拉丁方, 它的主對角線上的各元素, 副對角線上的各元素, 第二主對角線上的各元素及第二副對角線上的各元素都互不相同, 則稱此拉丁方爲超級拉丁方。

而兩個拉丁方 $A=(a_{ij})$ 與 $B=(b_{ij})$ 的階次相同時則稱它們爲正交的, 如果每一個有序二元集 $(a_{ij}\ b_{ij})$ 在此 n^2 個有序二元集 $(a_{ij}b_{ij})$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$ 中恰出現一次。

兩個矩陣 $A=(a_{ij})$ 與 $B=(b_{ij})$ 的階次相同時, 它們的點積 $C=(c_{ij})$ 是指

$$(c_{ij})=C=A\cdot B=(a_{ij})\cdot(b_{ij})=(a_{ij}\ b_{ij}).$$

一個 $2n$ 階方陣 $C=(c_{ij})$ 叫做超級和 (積) 幻方, 如果 C 的各個元素互不相等, 而且 C 的每行上元素的和 (積), 每列上元素的和 (積), 主對角線上元素的和 (積) , 副對角線上元素的和 (積) , 第二主對角線上元素的和 (積) 及第二副對角線上元素的和 (積), 都相等, 若 C 的各個元素有相等的, 則稱爲亞超級和幻方。

如果 C 既是超級和幻方, 又是超級積幻方, C 叫做超級雙重幻方。

三、基本定理

定理1: 若 $A=(a_{ij})$ 與 $B=(b_{ij})$ 是兩個正交超級拉丁方。當它們的點積 $C=A\cdot B=(a_{ij}\ b_{ij})$ 是超級和幻方時, 則 C 必是超級雙重幻方。

證: 已知 C 是超級和幻方, 又因 A 與 B 都是超級拉丁方, 故 C 也是超級積幻方。故 C 是超級雙重幻方。

定理2: 若正交拉丁方 A 與 B 的點積 $C=A\cdot B$ 是超級雙重幻方, 則

$$A_1=(a+ga_{ij})$$
$$B_1=(b+hb_{ij})$$

也是兩個正交超級拉丁方, 而且它們的點積

$$C_1=[(a+ga_{ij})(b+hb_{ij})]$$

可以有無限多種 a、b、g 和 h 的值使得 C_1 是超級雙重幻方。

證: A_1 與 B_1 也是兩個正交超級拉丁方是很顯然的。

因 $C=A$ 與 $B=(a_{ij}\ b_{ij})$ 是超級雙重幻方。所以 C 的所有元素都互不相等。又因 C_1 可表爲

$$C_1=\Big[gh\Big(\frac{a}{g}+a_{ij}\Big)\Big(\frac{b}{h}+b_{ij}\Big)\Big]$$

對於任意給定的 a 與 b, 必可使 g 和 h 取的足夠大, 使得 C_1 的所有元素都互不相等。這是因爲當 a、b 給定後, 可使 g, h 趨向無窮大, 使得

$$gh\left(\frac{a}{g}+a_{ij}\right)\left(\frac{b}{h}+b_{ij}\right) \to gha_{ij}b_{ij}$$

由 C 的元素都互不相等, 可知 C_1 的元素也都可以互不相等。當 C_1 的元素都互不相等時, 我們說 C_1 是超級積幻方是很容易的, 因爲這是明顯的事實。我們現在來證明 C_1 也是超級和幻方。由

$$(a+ga_{ij})(b+hb_{ij}) = ab + ahb_{ij} + bga_{ij} + gha_{ij}b_{ij}$$

可知 C_1 的第 i 行各元素的和爲

$$2nab + ah\sum_{j=1}^{2n} b_{ij} + bg\sum_{j=1}^{2n} a_{ij} + gh\sum_{j=1}^{2n} a_{ij}b_{ij} = 2nab + ahb_o + bga_o + ghc_o$$

這裏 a_o, b_o, c_o 分別是 A, B, C 的各行, 各列各對角線的元素之和。

所以 C_1 各行, 各列的元素之和是相等的。同理可以說明 C_1 的主對角線上的元素之和, 副對角線, 第二主對角線及第二副對角線上各元素之和也是相等的。所以 C_1 既是超級積幻方, 也是超級和幻方, 即 C_1 是超級雙重幻方。

如果我們用 j 表每個元素都是 1 的方陣, 則可把定理 2 中的 C 表爲

$$C_1 = (a_j + ga)\cdot(b_j + hb)$$

當 $C = A\cdot B$ 是超級雙重幻方時, 存在無限多組 a、b、g 及 h 的值使 C_1 爲超級雙重幻方, 因而我們稱這樣的 C_1 爲超級雙重幻方系。

下面我們來談如何由兩個已知的超級雙重幻方構造出一個階次更大的超級幻方。

定理 3: 若 $A=(a_{ij})$ 及 $B=(b_{ij})$ 是兩個階次相同的超級拉丁方, $E=(e_{ij})$ 及 $F=(f_{ij})$ 是兩個階次相同的超級拉丁方。且 $A\cdot B$ 及 $E\cdot F$ 都是超級雙重幻方, 假設存在常數 g、h、e 和 m 使

$$D = [(e_{ij}e_j + gA)\cdot(f_{ij}m_j + hB)]$$

的各個元素都互不相等, 則 D 爲一個階次更大的超級雙重幻方。

證: 我們假設已取了一組 g、h、e、和 m 的值使 D 的所有的元素都互不相等。那麼很顯然, D 是一個超級積幻方。這是因爲 D 是一個分塊矩陣, 每一個子塊都是一個超級雙重幻方。它的超級積幻方的性質是非常明顯的。由

$$D = [(me_{ij}\ f_{ij} + he_{ij}\ B + mgf_{ij}\ A + ghA\cdot B]$$

令 a_o, b_o, c_o 分別表 A, B, C 的各行 (各列) 元素之和, 且 A 與 B 的階次爲 h, 則 D 的第 ij 個分塊的各行 (各列及各種對角線) 上元素之和爲

$$mne_{ij}f_{ij} + hb_o\, e_{ij} + mga_of_{ij} + ghc_o$$

又由 E、F 是超級拉丁方及 E、F 是超級雙重幻方可知: 上式無論對 i 求和或對 j 求和其值都相等。類似的也可以得出 D 的各種對角線上各元素之和也相等。所以在這種情況下, D 是一個超級雙重幻方。

四、兩個 8 階超級雙重幻方的例

定理 4: 存在 8 階超級雙重幻方系。

證: 只要我們能把它們構造出來就行了。先構造兩個超級拉丁方爲:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\qquad\qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_1-3a_2 & a_1-3a_2 & a_1+4a_2 & a_1+a_2\\ a_1-4a_2 & a_1-a_2 & a_1+3a_2 & a_1+2a_2\\ a_1+3a_2 & a_1+2a_2 & a_1-4a_2 & a_1-a_2\\ a_1+4a_2 & a_1+a_2 & a_1-3a_2 & a_1-2a_2\end{bmatrix}\quad A_{12}=\begin{bmatrix} a_1-4a_2 & a_1-a_2 & a_1+3a_2 & a_1+2a_2\\ a_1-3a_2 & a_1-2a_2 & a_1+4a_2 & a_1+a_2\\ a_1+4a_2 & a_1+a_2 & a_1-3a_2 & a_1-2a_2\\ a_1+3a_2 & a_1+2a_2 & a_1-4a_2 & a_1-a_2\end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & a_1+4a_2 & a_1-2a_2 & a_1-3a_2\\ a_1+2a_2 & a_1+3a_2 & a_1-a_2 & a_1-4a_2\\ a_1-a_2 & a_1-4a_2 & a_1+2a_2 & a_1+3a_2\\ a_1-4a_2 & a_1-a_2 & a_1+a_2 & a_1+4a_2\end{bmatrix}\quad A_{22}=\begin{bmatrix} a_1+2a_2 & a_1+3a_2 & a_1-a_2 & a_1-4a_2\\ a_1+a_2 & a_1+4a_2 & a_1-2a_2 & a_1-3a_2\\ a_1-2a_2 & a_1-3a_2 & a_1+a_2 & a_1+4a_2\\ a_1-a_2 & a_1-4a_2 & a_1+2a_2 & a_1+3a_2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} b_1+b_2 & b_1+3b_2 & b_1-4b_2 & b_1-b_2\\ b_1-b_2 & b_1-3b_2 & b_1+4b_2 & b_1+2b_2\\ b_1+3b_2 & b_1+b_2 & b_1-2b_2 & b_1-4b_2\\ b_1-3b_2 & b_1-b_2 & b_1+2b_2 & b_1+4b_2\end{bmatrix}\quad B_{12}=\begin{bmatrix} b_1-3b_2 & b_1-b_2 & b_1+2b_2 & b_1+4b_2\\ b_1+3b_2 & b_1+b_2 & b_1-2b_2 & b_1-4b_2\\ b_1-b_2 & b_1-3b_2 & b_1+4b_2 & b_1+2b_2\\ b_1+b_2 & b_1+3b_2 & b_1-4b_2 & b_1-2b_2\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{bmatrix} b_1+2b_2 & b_1+4b_2 & b_1-3b_2 & b_1-b_2\\ b_1-2b_2 & b_1-4b_2 & b_1+3b_2 & b_1+b_2\\ b_1+4b_2 & b_1+2b_2 & b_1-b_2 & b_1-3b_2\\ b_1-4b_2 & b_1-2b_2 & b_1+b_2 & b_1+3b_2\end{bmatrix}\quad B_{22}=\begin{bmatrix} b_1-4b_2 & b_1-b_2 & b_1+b_2 & b_1+3b_2\\ b_1+4b_2 & b_1+2b_2 & b_1-b_2 & b_1-3b_2\\ b_1-2b_2 & b_1-4b_2 & b_1+3b_2 & b_1+b_2\\ b_1+2b_2 & b_1+4b_2 & b_1-3b_2 & b_1-b_2\end{bmatrix}$$

容易證明我們這樣所構造的方陣 A 和 B 都是超級拉丁方, 而且它們是正交的。我們令 C 爲方陣 A 與 B 的點積, 而:

$$C = A \cdot B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$$

由 A 及 B 的超級拉丁方的性質可知, 只要 C 的各個元素互不相同, 那麼它就是一個超級積幻方。

由 $a_{ij} = a_1 + a'_{ij} \cdot a_2 b_{ij} = b_1 + b_{ij} \cdot b_2$

可得 $a_{ij} \cdot b_{ij} = a_1 b_1 + b'_{ij} \cdot a_1 b_1 + a'_{ij} a_2 b_1 + a'_{ij} \cdot b'_{ij} \cdot a_2 b_2$

又由

$$\sum_{i=1}^{8} b'_{ij} = \sum_{i=1}^{8} a'_{ij} \sum_{j=1}^{8} b'_{ij} \sum_{j=1}^{8} a'_{ij} = 0$$

可知

$$\sum_{i=1}^{8} a_{ij} \cdot b_{ij} = 8a_1 b_1 + a_2 b_2 \sum_{i=1}^{8} a'_{ij} \cdot b'_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{8} a_{ij} \cdot b_{ij} = 8a_1 b_1 + a_2 b_2 \sum_{j=1}^{8} a'_{ij} \cdot b'_{ij}$$

由兩條對角線及另外兩個和式所得的結果也是類似的。因此 C 是否超級和幻方完全取決於矩陣

$$D = (a'_{ij} \cdot b'_{ij})$$

的各行各列的元素之和是否相等了。我們把 D 詳細的寫出爲

$D =$

-3	-6	-16	-2	12	1	6	8
4	3	12	4	-9	-2	-8	-4
9	2	8	4	-4	-3	-12	-4
-12	-1	-6	-8	3	6	16	2
2	16	6	3	-8	-6	-1	-12
-4	-12	-3	-4	4	8	2	9
-4	-8	-2	-9	4	12	3	4
8	6	1	12	-2	-16	-6	-3

容易證明: D 的各行的元素之和, 各列的元素之和, 兩條對角線上各元素之和以及 D_{12} 與 D_{21} 的主對角線上的元素之和等等都是 0。故只要 C 的各個元素互不相同, 它就是一個超級和幻方。

我們現在來證明: 對於任意給定的 a_1 與 a_2, 必存在 b_1 與 b_2, 使得 C 的各個元素互不相同。

對於 C 的任意一個元素 $a_{ij}\cdot b_{ij}$ 。其他元素若與它相等的話, 必是形如 $(a_{ij}+k_1a_2)(b_{ij}-k_2b_2)$ 或 $(a_{ij}-k_1a_2)(b_{ij}+k_2b_2)$ 這裏 $1\le k_1\le 8$, $1\le k_2\le 8$ 。

第一式若與 $a_{ij}b_{ij}$ 相等, 必是 $k_1a_2b_{ij}=k_2b_2(a_{ij}+k_1a_2)$ 。

當 a_1、a_2 都取定以後, 再取定 b_2, 我們必可使 b_1 取得足夠大, 使它不能成爲等式。對於後一式的討論也是類似的。因 a_1 與 a_2 之值取法有無限多。故使 C 的值互不相等的取法也有無限多。這就證明了我們的定理。

由此我們可得一個一般的定理

定理 5: 若 $A=(a_1+a_2a'_{ij})$, $B=(b_1+b_2b'_{ij})$ 是兩個正交的超級拉丁方。且 $C'=(a'_{ij}b'_{ij})$ 爲一個亞超級和幻方, 則 $C=A\cdot B=[(a_1+a_2a_{ij})(b_1+b_2b_{ij})]$ 是超級雙重幻方系。

下面我們再給出一個 8 階超級雙重幻方系的例。在此例中

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

這裏 A 仍上述。若令

$$B_{11}=\begin{bmatrix} b_1+b_2 & b_1+5b_2 & b_1-7b_2 & b_1-3b_2\\ b_1-b_2 & b_1-5b_2 & b_1+7b_2 & b_1+3b_2\\ b_1+5b_2 & b_1+b_2 & b_1-3b_2 & b_1-7b_2\\ b_1-5b_2 & b_1-b_2 & b_1+3b_2 & b_1+7b_2\end{bmatrix} \quad B_{12}=\begin{bmatrix} b_1-5b_2 & b_1-b_2 & b_1+3b_2 & b_1+7b_2\\ b_1+5b_2 & b_1+b_2 & b_1-3b_2 & b_1-7b_2\\ b_1-b_2 & b_1-5b_2 & b_1+7b_2 & b_1+3b_2\\ b_1+b_2 & b_1+5b_2 & b_1-7b_2 & b_1-3b_2\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=\begin{bmatrix} b_1+3b_2 & b_1+7b_2 & b_1-5b_2 & b_1-b_2\\ b_1-3b_2 & b_1-7b_2 & b_1+5b_2 & b_1+b_2\\ b_1+7b_2 & b_1+3b_2 & b_1-b_2 & b_1-5b_2\\ b_1-7b_2 & b_1-3b_2 & b_1+b_2 & b_1+5b_2\end{bmatrix} \quad B_{22}=\begin{bmatrix} b_1-7b_2 & b_1-3b_2 & b_1+b_2 & b_1+5b_2\\ b_1+7b_2 & b_1+3b_2 & b_1-b_2 & b_1-5b_2\\ b_1-3b_2 & b_1-7b_2 & b_1+5b_2 & b_1+b_2\\ b_1+3b_2 & b_1+7b_2 & b_1-5b_2 & b_1-b_2\end{bmatrix}$$

此時所得的 D 爲

$D=$

-3	-10	-28	-3	20	1	9	14
4	5	21	6	-15	-2	-12	-7
15	2	12	7	-4	-5	-21	-6
-20	-1	-9	-14	3	10	28	3
3	28	10	3	-14	-9	-1	-20
-6	-21	-5	-4	7	12	2	15
-7	-12	-2	-15	6	21	5	4
14	9	1	20	-3	-28	-10	-3

這裏 D 的各行元素, 各列元素, 各主副對角線上的元素之和都爲 0。所以由這一組 A、B 陣得到的也是一個超級雙重幻方系。

對後者來說, 當 $a_1=5$, $a_2=1$, $b_1=18$ 及 $b_2=1$ 時就可以得到一個 8 階超級雙重幻方。

五、一個 32 階超級雙重幻方的例

定理 6: 存在 32 階超級雙重幻方系。

證: 我們來把他構造出來: A 陣, B 陣 (略)

32 階雙重幻方分爲第 1 列至第 16 列與第 17 列至第 32 列兩部分, 如下:

32 階雙重幻方 (1) , 第 1 列至 16 列

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	前半行和
33	898	2115	3204	7497	6730	4587	780	3825	4626	9747	19860	22425	15834	9531	3612	115304
2403	2820	449	66	715	5004	6057	8330	18867	10260	4369	4050	3483	9884	15225	23322	115304
1796	99	1602	705	8076	9163	650	3753	5140	4275	17874	8721	17052	24219	3354	8825	115304
1410	801	132	1347	4170	585	9996	7403	9234	16881	4500	4883	9178	3225	25116	16443	115304
29	14430	22847	24608	18165	14102	8855	2328	2509	4046	8175	15376	4645	3462	2247	1288	147112
23839	23584	13949	30	2231	9240	13461	19030	14415	8720	3757	2702	1127	2568	2885	5574	147112
15392	31	23070	21373	15384	19895	2134	8085	4624	2895	13454	7085	4616	6503	966	1605	147112
22110	22301	32	14911	8470	2037	20760	14743	7630	12493	3088	4335	1926	805	7432	4039	147112
1737	2890	5995	11532	929	1154	963	644	25	12506	19899	21532	14705	11538	7315	1940	115304
10571	6540	2601	1930	483	1284	577	1858	20763	20636	12025	26	1843	7700	10897	15570	115304
3468	2123	9610	4905	2308	2787	322	321	13468	27	19994	18425	12820	16435	1746	6545	115304
5450	8649	2316	3179	642	161	3716	1731	19162	19225	28	12987	6930	1649	17300	12179	115304
4725	5654	11799	23832	26013	18270	10943	4128	165	2694	4935	6408	10829	9422	6255	1040	147112
22839	12312	5397	4950	3999	11296	17661	26910	5607	5640	2245	198	975	6672	8749	11662	147112
6168	5175	21846	10773	19488	27807	3870	10237	3592	231	4806	3525	10768	12495	910	5421	147112
11286	20853	5400	5911	10590	3741	28704	18879	4230	4005	264	3143	5838	845	13328	10095	147112
4485	3654	2471	1032	2925	3598	7695	15888	17493	14806	9591	1560	957	13470	21855	25632	147112
903	2824	3045	5382	14895	8208	3341	3150	1495	10008	14133	18326	24831	22560	13021	990	147112
4872	6279	774	1765	4112	3375	13902	6669	16152	19159	1430	8757	14368	1023	24030	20445	147112
2118	645	7176	4263	7182	12909	3600	3855	9174	1365	19992	15479	21150	23229	1056	13919	147112
23225	15002	8667	4508	3281	5202	10355	19220	7785	6410	4235	1164	1	962	2211	3076	115304
4347	8988	14425	24154	18259	10900	4913	3474	1067	4620	5769	8650	2307	2948	481	2	115304
16156	25083	4186	8025	5780	3667	17298	9265	7692	9515	970	3465	1924	3	1538	737	115304
8346	4025	26012	15579	9810	16337	3860	5491	3850	873	10380	7051	1474	769	4	1443	115304
11245	8974	5775	1552	5	2886	5159	6152	26941	17310	9951	5152	4053	6358	12535	23064	147112
1455	6160	8333	12110	5383	5896	2405	6	4991	10272	16733	27870	22103	13080	6069	4246	147112
10256	12975	1358	5005	3848	7	4614	3685	18464	28799	4830	9309	6936	4439	21142	11445	147112
5390	1261	13840	9615	4422	3845	8	3367	9630	4669	29728	17887	11990	20181	4632	6647	147112
14161	12114	7923	1300	825	11674	19035	22428	897	1218	1059	516	2025	2570	5643	11916	115304
1235	8340	11441	14994	21627	19740	11225	858	387	1412	609	1794	10923	6156	2313	2250	115304
13460	15827	1170	7089	12572	891	20826	17625	2436	2691	258	353	3084	2475	9930	4617	115304
7506	1105	16660	12787	18330	20025	924	12123	706	129	3588	1827	5130	8937	2700	2827	115304
262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	

32階雙重幻方 (2), 第 17 列至 32 列

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	後半行和
21	10582	16951	18456	25085	19230	11935	3104	965	1734	3815	7688	12077	8078	4815	2576	147112
17687	17688	10101	22	3007	12320	18589	25950	6727	4360	1445	1158	2415	5136	7501	13006	147112
11544	23	16918	15477	20512	26815	2910	11165	2312	1351	5766	2725	9232	13935	2254	4173	147112
16214	16149	24	11063	11550	2813	27680	19871	3270	4805	1544	2023	4494	2093	14864	8655	147112
297	4490	7755	9612	833	1346	1291	260	5625	6682	13851	27804	15249	10962	6707	2580	115344
8811	8460	4041	330	195	1668	673	1666	26811	14364	6425	5850	2451	7060	10353	16146	115304
5388	363	8010	6345	2692	2499	130	417	7196	6075	25818	12825	12180	17043	2322	6001	115304
7050	7209	396	4939	834	65	3332	2019	13338	24825	6300	6939	6354	2193	17940	11571	115304
6525	7710	15903	31776	18837	13398	8119	3096	429	6286	10575	12816	4165	4038	2919	520	147112
30783	16416	7453	6750	2967	8472	12789	19734	12015	11280	5837	462	455	3336	3365	4998	147112
8224	6975	29790	14877	14616	20631	2838	7413	7184	495	11214	9165	5384	5831	390	2085	147112
15390	28797	7200	7967	7766	2709	21528	14007	9870	10413	528	6735	2502	325	6664	4711	147112
193	578	1635	3844	8361	5770	3531	1932	17	8658	14003	15380	21625	16666	10395	2716	115304
2883	2180	289	386	1771	3852	5193	9290	14611	14740	8177	18	2619	10780	16025	22490	115304
1156	579	1922	545	6924	10219	1610	2889	9620	19	13842	12529	17948	23355	2522	9625	115304
1090	961	772	867	3210	1449	11148	6347	13266	13073	20	9139	10010	2425	24220	17307	115304
15793	10386	6099	3220	4825	7514	14715	26908	865	1282	1155	388	9	4810	8107	9228	115304
3059	6420	9809	16722	25947	15260	7225	5018	291	1540	641	1730	8459	8844	4329	10	115304
11540	17651	2898	5457	8092	5211	24986	13625	2564	2595	194	385	5772	11	7690	6633	115304
5778	2737	18580	10963	14170	24025	5404	7803	770	97	3460	1923	7370	6921	12	5291	115304
11661	8526	5295	2064	1125	1542	3591	7944	24157	20190	12927	2080	693	9878	16215	19224	147112
1935	5648	7917	12558	6951	4104	1285	1350	2015	13344	19517	24990	18423	16920	9429	726	147112
9744	13455	1806	4589	2056	1575	5958	2565	21536	25823	1950	12093	10776	759	17622	14805	147112
4942	1677	14352	9135	3078	4965	1800	1799	12510	1885	26656	20863	15510	16821	792	10327	147112
20825	17498	11259	1820	561	8082	13395	16020	8073	6090	3883	1548	225	514	1539	3972	115304
1755	11676	16825	21658	15219	14100	7633	594	1419	4236	5481	8970	2979	2052	257	450	115304
18844	22491	1690	10425	8980	627	14418	11985	7308	9867	1290	3177	1028	675	1986	513	115304
10842	1625	23324	18171	12690	13617	660	8531	3530	1161	10764	6699	1026	993	900	771	115304
4325	3846	2695	776	13	6734	11055	12304	19509	12694	7383	3864	5597	8670	16895	30752	147112
679	3080	3205	5190	11535	11792	6253	14	3703	7704	12117	20438	29791	17440	8381	5790	147112
5128	6055	582	1925	7696	15	10766	9581	13848	21367	3542	6741	9248	5983	28830	15805	147112
2310	485	6920	4487	10318	9997	16	7215	7062	3381	22296	13271	16350	27869	6176	8959	147112
262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	262416	

幻和 $S_{32}=262416$.

$$\text{幻積 }\Pi_{32}{=}1119856, 8910693992, 9258498195, 6494611566, 2254659894, 8481526637,$$
$$1583038089, 4301041900, 0214950216, 2829984601, 0798080000, 0000000000.$$

可以驗證 C_{ij} 的各行、各列及各個對角線上元素之和 (之積) 都分別等于它們的定值, 所以 C 是一個超級雙重幻方。

六、不存在 4 階超級雙重幻方

下面我們將說明階次爲 4 的矩陣恰有一對正交拉丁方。但它們卻不能構造出超級雙重幻方系。即

定理 7: 階次爲 4 的矩陣一對正交超級拉丁方。但用它們構造不出超級雙重幻方系。

證: 我們構造一對正交超級拉丁方

a_1	a_2	a_3	a_4
a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_3	a_2	a_1
a_2	a_1	a_4	a_3

b_1	b_2	b_3	b_4
b_4	b_3	b_2	b_1
b_2	b_1	b_4	b_3
b_3	b_4	b_1	b_2

在上表中, 因爲第一行我們可以任意填寫, 就令它們是 a_1、a_2、a_3、a_4 及 b_1、b_2、b_3、b_4。按超級拉丁方的要求第二行的第一個元素只能有兩種取法, 或取 $a_3(b_3)$, 或取 $a_4(b_4)$, 當這個元素取定後, 按超級拉丁方的要求, 以下的元素都是依次唯一確定的。這樣我們就造出了這兩個超級拉丁方, 而它們恰是正交的。因爲我們只能造出這兩個, 所以 4 階的超級拉丁方就是只有這兩個 (同構者我們看作相同)。

我們現在來證明由這兩個正交超級拉丁方構造不出超級雙重幻方。

假設由它們能造出超級雙重幻方。那麼它們的點積

a_1b_1	a_2b_2	a_3b_3	a_4b_4
a_3b_4	a_4b_3	a_1b_2	a_2b_1
a_4b_3	a_3b_1	a_2b_4	a_1b_3
a_2b_3	a_1b_4	a_4b_1	a_3b_2

令第一行的各元素之和與其它各行、各列及各對角線上元素之和分別相等可得到 11 個等式, 其中 8 個是:

$$(a_2-a_4)b_2+(a_3-a_2)b_3+(a_4-a_3)b_4=0$$
$$(a_2-a_3)b_2+(a_3-a_4)b_3+(a_4-a_1)b_4=0$$
$$(a_1-a_3)b_1+(a_3-a_4)b_3+(a_4-a_1)b_4=0$$
$$(a_1-a_4)b_1+(a_3-a_1)b_3+(a_4-a_3)b_4=0$$
$$(a_1-a_4)b_1+(a_2-a_1)b_2+(a_4-a_2)b_4=0$$
$$(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_4)b_2+(a_4-a_1)b_4=0$$
$$(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)b_2+(a_3-a_1)b_3=0$$
$$(a_1-a_3)b_1+(a_2-a_1)b_2+(a_3-a_2)b_3=0$$

要使 b_1、b_2、b_3、b_4 有非 0 解, 由上列各式可得

<table>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_4</td><td>a_3-a_2</td><td>a_4-a_1</td><td rowspan="4">$=0$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_3</td><td>a_3-a_4</td><td>a_4-a_2</td></tr>
<tr><td>a_1-a_3</td><td>0</td><td>a_3-a_4</td><td>a_4-a_1</td></tr>
<tr><td>a_1-a_1</td><td>0</td><td>a_3-a_1</td><td>a_4-a_3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_4</td><td>a_3-a_2</td><td>a_4-a_1</td><td rowspan="4">$=0$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_3</td><td>a_3-a_4</td><td>a_4-a_2</td></tr>
<tr><td>a_1-a_4</td><td>a_2-a_1</td><td>0</td><td>a_4-a_2</td></tr>
<tr><td>a_1-a_2</td><td>a_2-a_4</td><td>0</td><td>a_4-a_1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_4</td><td>a_3-a_2</td><td>a_4-a_1</td><td rowspan="4">$=0$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a_2-a_3</td><td>a_3-a_4</td><td>a_4-a_2</td></tr>
<tr><td>a_1-a_2</td><td>a_2-a_3</td><td>a_3-a_1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>a_1-a_3</td><td>a_2-a_1</td><td>a_3-a_2</td><td>0</td></tr>
</table>

由上面三個行列式分別可得

$$(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_21+a_23+a_24-a_1a_3-a_1a_4-a_3a_4)=0$$
$$(a_3-a_1)(a_3-a_4)(a_21+a_22+a_24-a_1a_2-a_1a_4-a_2a_4)=0$$
$$(a_3-a_1)(a_4-a_2)(a_21+a_22+a_23-a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3)=0$$

因爲不能有 $a_i=a_j,\ i\neq j$ 。所以必有

$$a_21+a_23+a_24-a_1a_3-a_1a_4-a_3a_4=0$$
$$a_21+a_22+a_24-a_1a_2-a_1a_4-a_2a_4=0$$
$$a_21+a_22+a_23-a_1a_2-a_1a_3-a_2a_3=0$$

由上列前兩式和後兩式分別可得

$$(a_2-a_3)(a_2+a_3-a_1-a_4)=0$$
$$(a_3-a_4)(a_3+a_4-a_1-a_2)=0$$

同前, 由上兩式只可能有

$$a_2+a_3-a_1-a_4=0 \qquad a_3+a_4-a_1-a_2=0$$

由上列兩式只能有

$$a_2=a_4$$

這是不允許的。

所以由這兩個超級正交拉丁方不能構造出超級雙重幻方。

七、問題

對於超級雙重幻方的研究只是一個開端, 需要研究的問題還很多, 我們現在想到的有以下幾點: (以下所說的 n 都是矩陣的階次) 。

1. 對於什麼樣的 n 存在超級拉丁方?
2. 對於什麼樣的 n 存在正交超級拉丁方?
3. 若對某個階次 n 存在正交超級拉丁方, 這樣互相正交的超級拉丁方最多可有多少?
4. 對於什麼樣的正交超級拉丁方可構造出雙重幻方系?

   目前解決了:

   ① $n=(2k+1)^m,\ (k=1,2,\ldots,m\geq 2)$;

   ② $n=2^m\ (m\geq 3)$;

   ③ nk ($n\neq$3 的倍數, 且 $n>3$, $k>3$ 的奇數) [4]
5. 是否超級雙重幻方系都只能由一對正交超級拉丁方造出?
6. 是否存在 6 階超級雙重幻方系?

附: 寫這篇文章的時候心情非常沉痛, 當年對我關心、支持、幫助的老前輩、老數學家 – 邱荷生研究員已經離開了這個世界, 雖然離開了我們, 但他在學術研究方面功不可沒, 特別是在雙重幻方與反幻方方面, 孜孜不倦地指導我從 “0” 開始起步、學習、進展、發表文章, 取得一些成果。

筆者忠懇的感謝幫助、指導我進步的已故的老數學家、老前輩: 梁宗巨教授, 張忠輔教授、邱荷生研究員。他們高尚尊貴的人格、純潔無瑕的品格、樂於助人的風格。為我們矗立了學習的豐碑!

老教授, 老前輩, 永垂不朽!

參考文獻

1. 談祥柏。《世界之最》(2)。上海科學技術出版社, 128-129, 1980。
2. W· W · Horner. Addition — Mulirlieationmagic square of orcer 8, *Scrirta Uattlematica*, 21, 23-27, 1955.
3. 梁培基。雙重幻方。數學研究與評論, 2(2), 14, 1982。
4. Liang Peiji, Sun Rongguo, Ku Tunghsin and Zhu Lie, A construction of addition-multiplication magic squares using orthogonal diagonal latin squares. *Journal of Combin. Math.*, 1992.
5. 梁培基、顧同新。平方幻方與雙重幻方的構造。數學傳播季刊, 13(3), 65-69, 1989。
6. [美]李學數。數學與數學家的故事。第7冊, 封丘農民數學家梁培基, 上海科學技術出版社。

—本文作者梁培基任職教河南省封丘縣科協, 邱荷生任職河南省數學會—