數學傳播 40卷4期, pp. 57-62

遞迴數列的「特徵多項式」與「線性衍生遞迴式」

陳建燁

一、動機:

定義費氏數列 $\langle F_n \rangle$: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, 且滿足遞迴關係式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, 其中 $n = 1, 2, \ldots$。

對於費氏數列, 從 $F_8 = F_7 + F_6$ 出發, 簡單地反覆代換, 可得

$$\begin{aligned} F_8 &= F_7 + F_6 = (F_6 + F_5) + F_6 = 2F_6 + F_5 \\ &= 2(F_5 + F_4) + F_5 = 3F_5 + 2F_4 \\ &= 3(F_4 + F_3) + 2F_4 = 5F_4 + 3F_3 \end{aligned}$$

至此, 得到一個遞迴關係式: $F_8 - 5F_4 - 3F_3 = 0$, 先將這樣的關係式, 稱為由 $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ 導出的「線性衍生遞迴式」(在接下來的探討中, 會給出更正式的定義)。

類似地, 從 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (其中 $n \in N$ 且 $n \geq 5$) 出發, 如上同樣地反覆代換, 可得 $F_n - 5F_{n-4} - 3F_{n-5} = 0$。以此角度而言, $F_8 - 5F_4 - 3F_3 = 0$ 和 $F_9 - 5F_5 - 3F_4 = 0$ 有著同樣的結構。

眾所周知, $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ 所對應的特徵方程式為 $x^2 - x - 1 = 0$。而在這篇文章中, 定義 $F_8 - 5F_4 - 3F_3$ 所對應的「特徵多項式」為 $x^8 - 5x^4 - 3x^3$。由長除法, 可得 $x^8 - 5x^4 - 3x^3 = (x^2 - x - 1)(x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^3)$, 發現 $x^8 - 5x^4 - 3x^3$ 是 $x^2 - x - 1$ 的倍式! 這是個巧合嗎? 其中的關聯性是什麼呢? 請讀者先行思考, 再看本文接下來的探討。

二、探討:

(一) 定義:

1. 線性衍生遞迴式

設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴關係式: $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$, 其中 $n\in N$ 且 $n\geq 2$。將形如

$$\sum_{k=0}^{n-2}p_k(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})$$
$$=p_0(a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2})+p_1(a_{n-1}+ra_{n-2}+s_{n-3})+\cdots+p_{n-2}(a_2+ra_1+sa_0)=0$$

的等式, 稱為由 $a_{n+2}+ra_{n+1}+sa_n=0$ 所導出的線性衍生遞迴式。

例: Fibonacci 數列 $\langle F_n\rangle$ 滿足遞迴關係式: $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$, 由於

1. $(F_n-F_{n-1}-F_{n-2})+1\cdot(F_{n-1}-F_{n-2}-F_{n-3})+2\cdot(F_{n-2}-F_{n-3}-F_{n-4})+3\cdot(F_{n-3}-F_{n-4}-F_{n-5})=0$, 同類項合併得 $F_n-5F_{n-4}-3F_{n-5}=0$, 所以 $F_n-5F_{n-4}-3F_{n-5}=0$ 為由 $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$ 所導出的線性衍生遞迴式。

   註: 讀者可以看出, 這是將「一、動機」之中提到的代換, 改成用「線性組合」的方式來表達。

2. 特徵多項式
   給定一數列 $\langle a_n\rangle$, 定義 $r_ka_k+r_{k-1}a_{k-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0$ 所對應的「特徵多項式」為

   $$r_kx^k+r_{k-1}x^{k-1}+\cdots+r_1x+r_0。$$

   註: 即數列的下標, 恰對應 x 的次方。

   例: $a_9-5a_5-3a_4$ 所對應的特徵多項式為 $x^9-5x^5-3x^4$。

3. 數列中各項的線性組合
   給定一數列 $\langle a_n\rangle$, 將形如 $r_ka_k+r_{k-1}a_{k-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0$ 的式子, 稱為 $a_0,a_1,\ldots,a_k$ 的線性組合。

4. 數列的線性組合集合
   給定一無窮數列 $\langle a_n\rangle$, 定義一集合

   $$S=\{r_ka_k+r_{k-1}a_{k-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0\mid r_0,r_1,\ldots,r_k\in Z\}$$

   為數列 $\langle a_n\rangle$ 的「線性組合集合」。

5. 特徵對應
   規定一個對應 φ, 其規則為

   $$\varphi:\ r_ka_k+r_{k-1}a_{k-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0\ \to\ r_kx^k+r_{k-1}x^{k-1}+\cdots+r_1x+r_0,$$

   也可記為

   $$\varphi(r_ka_k+r_{k-1}a_{k-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0)=r_kx^k+r_{k-1}x^{k-1}+\cdots+r_1x+r_0,$$

說明: φ 是一個從「數列的線性組合集合」到「特徵多項式」的對應, 將 φ 稱爲「特徵對應」。由定義易知 φ 是一個一對一對應。

(一) 性質:

由上述的定義, 得到以下的性質: 設 $P = p_k a_k + p_{k-1}a_{k-1} + \cdots + p_1 a_1 + p_0 a_0$ 與 $Q = q_k a_k + q_{k-1}a_{k-1} + \cdots + q_1 a_1 + q_0 a_0$ 皆爲 $a_0, a_1, \ldots, a_k$ 的線性組合, 則有 $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha \cdot \varphi(P) + \beta \cdot \varphi(Q)$。

證明:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\alpha P+\beta Q)\\
&=\varphi[\alpha(p_k a_k+p_{k-1}a_{k-1}+\cdots+p_1 a_1+p_0 a_0)+\beta(q_k a_k+q_{k-1}a_{k-1}+\cdots+q_1 a_1+q_0 a_0)]\\
&=\varphi[(\alpha p_k+\beta q_k)a_k+(\alpha p_{k-1}+\beta q_{k-1})a_{k-1}+\cdots+(\alpha p_1+\beta q_1)a_1+(\alpha p_0+\beta q_0)a_0]\\
&=(\alpha p_k+\beta q_k)x^k+(\alpha p_{k-1}+\beta q_{k-1})x^{k-1}+\cdots+(\alpha p_1+\beta q_1)x+(\alpha p_0+\beta q_0)a_0\\
&=\alpha(p_k x^k+p_{k-1}x^{k-1}+\cdots+p_1 x+p_0)+\beta(q_k x^k+q_{k-1}x^{k-1}+\cdots+q_1 x+q_0)\\
&=\alpha\cdot\varphi(p_k a_k+p_{k-1}a_{k-1}+\cdots+p_1 a_1+p_0 a_0)+\beta\cdot\varphi(q_k a_k+q_{k-1}a_{k-1}+\cdots+q_1 a_1+q_0 a_0)\\
&=\alpha\cdot\varphi(P)+\beta\cdot\varphi(Q).
\end{aligned}
$$

註: 此性質表示 φ 是「線性」(linear)。

(三) 定理:

經過一番實驗與探索, 得到以下的定理:

線性衍生遞迴定理: 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式: $a_n + r a_{n-1} + s a_{n-2} = 0$, 其中 $n \in N$ 且 $n \geq 2$, 且 $\sum\limits_{k=0}^{n-2} p_k(a_{n-k} + r a_{n-k-1} + s a_{n-k-2}) = 0$ 爲由 $a_n + r a_{n-1} + s a_{n-2} = 0$ 所導出的線性衍生遞迴式。設將 $\sum\limits_{k=0}^{n-2} p_k(a_{n-k} + r a_{n-k-1} + s a_{n-k-2}) = 0$ 同類項合併之後, 所得等式爲 $r_n a_n + r_{n-1}a_{n-1} + \cdots + r_1 a_1 + r_0 a_0 = 0$, 則 $r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0$ 必爲 $x^2 + rx + s$ 的倍式。

說明: 即由原遞迴式出發, 所導出的線性衍生遞迴式, 在同類項合併之後, 所對應的特徵多項式, 必爲 $x^2 + rx + s$ 的倍式。此處的同類項合併, 是以 a_k 的下標 k 作分類。

證明:

$$\begin{aligned}
&r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0=\varphi(r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0)\\
&\quad=\varphi\Big[\sum_{k=0}^{n-2}p_k(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})\Big]\\
&\quad=\sum_{k=0}^{n-2}[p_k\cdot\varphi(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})] \qquad (\because\ \varphi \text{ is linear})\\
&\quad=\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x^{n-k}+rx^{n-k-1}+sx^{n-k-2})\\
&\quad=\sum_{k=0}^{n-2}[p_kx^{n-k-2}\cdot(x^2+rx+s)]=(x^2+rx+s)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{m}p_kx^{n-k-2}\Big), \quad \text{得證。}
\end{aligned}$$

到此, 已足以說明在「一、動機」所觀察到的現象。反之, 若 $r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0$ 爲 x^2+rx+s 的倍式, 則 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0=0$ 是否爲 $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$ 的線性衍生遞迴式? 答案是肯定的。

逆定理: 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足遞迴關係式: $a_nra_{n-1}+sa_{n-2}=0$, 其中 $n\in N$ 且 $n\geq 2$。若 $r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0$ 爲 x^2+rx+s 的倍式, 則 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0=0$ 爲由 $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$ 所導出的線性衍生遞迴式。

證明: 設 $r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0$ 除以 x^2+rx+s 所得的商式爲 $\sum\limits_{k=0}^{n-2}p_kx^{n-k-2}$, 可得

$$\begin{aligned}
&\varphi(r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0)=r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0\\
&\quad=(x^2+rx+s)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{n-2}p_kx^{n-k-2}\Big)=\sum_{k=0}^{n-2}[p_kx^{n-k-2}\cdot(x^2+rx+s)]\\
&\quad=\sum_{k=0}^{n-2}p_k(x^{n-k}+rx^{n-k-1}+sx^{n-k-2})=\sum_{k=0}^{n-2}[p_k\cdot\varphi(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})]\\
&\quad=\varphi\Big[\sum_{k=0}^{n-2}p_k(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})\Big]
\end{aligned}$$

由於 φ 是一對一對應, 所以

$$r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0=\sum_{k=0}^{n-2}p_k(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2}),$$

即 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0=0$ 爲由 $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$ 所導出的線性衍生遞迴式, 得證。

上述的證明過程, 實際上給出了如何由 $a_n+ra_{n-1}+sa_{n-2}=0$ 導出 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0=0$ 的具體操作方法: 將 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0$ 所對應的特徵多項式 $r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0$ 除以 x^2+rx+s, 設所得的商式爲 $\sum\limits_{k=0}^{n-2}p_kx^{n-k-2}$, 則 $r_na_n+r_{n-1}a_{n-1}+\cdots+r_1a_1+r_0a_0$ 即可表示爲 $\sum\limits_{k=0}^{n-2}p_k(a_{n-k}+ra_{n-k-1}+sa_{n-k-2})$。

例: 設 $\langle F_n\rangle$ 爲費氏數列, 試證: $F_n=F_{n-3}+3F_{n-4}+3F_{n-5}+F_{n-6}$, 其中 $n\in N$ 且 $n\geq 6$。

證明: $F_n-F_{n-3}-3F_{n-4}-3F_{n-5}-F_{n-6}$ 所對應的特徵多項式爲

$$x^n-x^{n-3}-3x^{n-4}-3x^{n-5}-x^{n-6}=x^{n-6}(x^6-x^3-3x^2-3x-1),$$

由長除法得

$$\begin{aligned}&x^6-x^3-3x^2-3x-1=(x^2-x-1)(x^4+x^3+2x^2+2x+1)\\ \Rightarrow\ &x^{n-6}(x^6-x^3-3x^2-3x-1)=(x^2-x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+2x^{n-4}+2x^{n-5}+x^{n-6})\end{aligned}$$

由 $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &1\cdot(F_n-F_{n-1}-F_{n-2})+1\cdot(F_{n-1}-F_{n-2}-F_{n-3})+2\cdot(F_{n-2}-F_{n-3}-F_{n-4})\\ &+2\cdot(F_{n-3}-F_{n-4}-F_{n-5})+1\cdot(F_{n-4}-F_{n-5}-F_{n-6})=0\\ \Rightarrow\ &F_n-F_{n-3}-3F_{n-4}-3F_{n-5}-F_{n-6}=0,\end{aligned}$$

得證。

三、應用:

(一) 費氏數列與二項式係數內積恆等式:

設 $\langle F_n\rangle$ 爲費氏數列, 試證: $\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^nF_k=F_{2n}$。

證明:

(1) $F_{2n}-(C_n^nF_n+C_{n-1}^nF_{n-1}+\cdots+C_1^nF_1+C_0^nF_0)$ 所對應的特徵多項式爲 $x^{2n}-(C_n^nx^n+C_{n-1}^nx^{n-1}+\cdots+C_1^nx^1+C_0^n)=x^{2n}-(x+1)^n$, 令 $f(x)=x^{2n}-(x+1)^n$。

(2) 設 $x^2-x-1=0$ 的兩根爲 α 與 β, 且 $\alpha>\beta\Rightarrow\alpha^2=\alpha+1$ 且 $\beta^2=\beta+1$ 注意到 $f(\alpha)=\alpha^{2n}-(\alpha+1)^n=\alpha^{2n}-(\alpha^2)^n=0$ 與 $f(\beta)=\beta^{2n}-(\beta+1)^n=\beta^{2n}-(\beta^2)^n=0$ 由因式定理, 得 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲 $f(x)$ 的因式 $\Rightarrow f(x)$ 爲 x^2-x-1 的倍式。

(3) 由「線性衍生遞迴定理」的逆定理, 可知 $F_{2n}-(C_n^nF_n+C_{n-1}^nF_{n-1}+\cdots+C_1^nF_1+C_0^nF_0)=0$ 爲 $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$ 的線性衍生遞迴式, 所以欲證之等式成立。

(二) Padovan 數列相關恆等式

Padovan 數列 $\langle P_n\rangle$ 定義如下: $P_0=P_1=P_2=1$, 且滿足遞迴關係式 $P_n=P_{n-2}+P_{n-3}$, 其中 $n\in N$ 且 $n\geq 3$。(譯名爲「巴都萬數列」)

設 $\langle P_n\rangle$ 爲 Padovan 數列, 試證:

1. $P_n=P_{n-1}+P_{n-5}$
2. $P_n=P_{n-2}+P_{n-4}+P_{n-8}$
3. $P_n=P_{n-4}+P_{n-5}+P_{n-6}+P_{n-7}+P_{n-8}$

證明: $P_n-P_{n-2}-P_{n-3}=0$ 所對應的特徵方程式爲 $x^3-x+1=0$, $P_n-P_{n-1}-P_{n-5}$, $P_n-P_{n-2}-P_{n-4}-P_{n-8}$ 與 $P_n-(P_{n-4}+P_{n-5}+P_{n-6}+P_{n-7}+P_{n-8})$ 所對應的特徵多項式分別爲 $x^{n-5}(x^5-x^4-1)$, $x^{n-8}(x^8-x^6-x^4-1)$ 與 $x^{n-8}(x^8-x^4-x^3-x^2-x-1)$, 由長除法可得

$$\begin{aligned}
x^{n-5}(x^5-x^4-1)&=(x^3-x-1)(x^{n-3}-x^{n-4}-x^{n-5})\\
x^{n-8}(x^8-x^6-x^4-1)&=(x^3-x-1)(x^{n-3}+x^{n-6}-x^{n-7}+x^{n-8})\\
x^{n-8}(x^8-x^4-x^3-x^2-x-1)&=(x^3-x-1)(x^{n-3}+x^{n-5}+x^{n-6}+x^{n-8})
\end{aligned}$$

即 $x^{n-5}(x^5-x^4-1)$, $x^{n-8}(x^8-x^6-x^4-1)$ 與 $x^{n-8}(x^8-x^4-x^3-x^2-x-1)$ 皆爲 x^3-x-1 的倍式, 由「線性衍生遞迴定理」的逆定理, 欲證之等式皆成立。

四、結語:

設 $\langle F_n\rangle$ 爲費氏數列, 對於形如 $F_n-5F_{n-4}-3F_{n-5}=0$ 的關係式, 一般會取數列的前幾項代入, 檢驗正確性, 再用數學歸納法證明, 整個問題也就到此爲止。

本文從一般熟知的特徵方程式出發, 定義所謂的「特徵多項式」, 以找出「線性衍生遞迴式」的內在結構, 從而將這一類的問題, 轉化爲多項式除法, 進而可以對線性的遞迴式, 給出系統性的證明。

參考資料

1. mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html.
2. https://zh.m.wikipedia.org/zh-tw/巴都萬數列
3. 廖信傑。用矩陣方法探討三階遞迴數列。數學傳播, 38(1), 36-50, 2014。
4. 陳建燁。Pascal 與 Fibonacci 的對話。學科中心電子報, 第110期, 2016年5月。

—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—