數學傳播 40卷4期, pp. 47-56

拋物線的切線族交出奇跡

蘇柏奇 · 陳明璋 · 顏貽隆

摘要: 就給定拋物線及其準線上的等距分點, 透過 AMA 和 Geogebra 套裝軟體的協助, 我們得到一中垂線族, 接著探索這中垂線族交點, 我們發現這些交點裡隱藏著一平行線族及一可平移疊合的拋物線族, 並予以證明。我們也確認該中垂線族裡的任意三條直線能夠還原該拋物線。

一、前言

2005年指考數學 (甲) 出了一題有關拋物線的題目, 引起了廣泛的討論。該題的關鍵點在於是否存在唯一的拋物線位於座標平面上半面且與三直線 ($y=0$, $y=x-1$, $y=-x-1$) 相切? 趙文敏 (2005) 分別以焦點座標、切點座標爲參數, 給出拋物線的方程式與作圖法, 進而說明有無窮多的拋物線滿足上述條件。另外, 如圖 1, 給定兩兩相交於 A、B、C 三點的三條直線, 由 Lambert 定理, 在 $\triangle ABC$ 外接圓上任取一點 F; 再由命題 1, 分別以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 爲對稱軸, 作 F 的對稱點 P_1, P_2, 則得以 F 爲焦點、直線 P_1P_2 爲準線的拋物線且和三直線相切, 因爲 F 爲動點, 即給定三條相異切線無法決定唯一的拋物線。再者, 在拋物線的一般式 $x^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中, 已知判別式 $b^2-4c=0$, 至少需四個條件才能得到式中五個未知數的唯一解, 提供三條切線不足以決定唯一拋物線的另一種觀點。

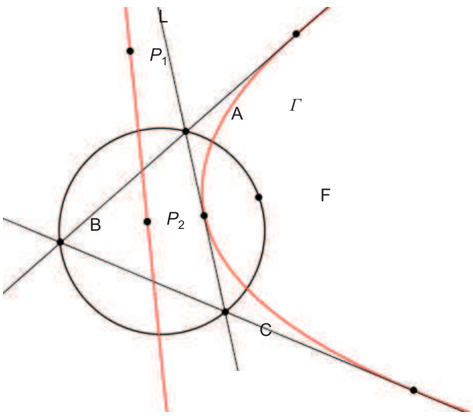

圖1： 三條切線無法決定唯一一條拋物線 (動態實驗1)

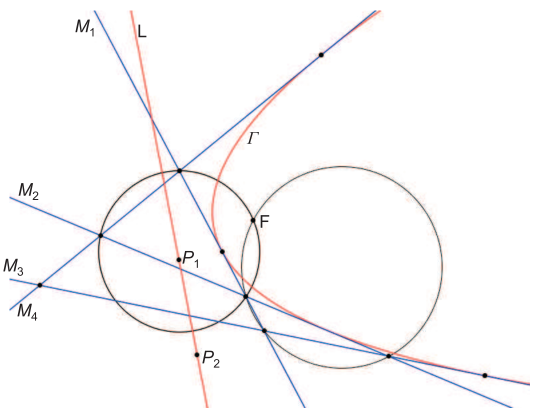

圖2： 四條切線決定唯一一條拋物線

在《一百個著名初等數學問題》一書中的第44、45題, 分別討論由四條切線、四個切點作拋物線的方法。若給定四條切線 M_i, $i=1,2,3,4$, 從四條切線交點組成的四個三角形中任取兩個分別作其外接圓, 由 Lambert 定理得兩個圓的交點即爲拋物線焦點; 再作焦點對於兩條切線的對稱點 P_1, P_2, 由命題得此兩對稱點爲準線上的兩點, 連接此兩點即得準線, 因而決定唯一的拋物線與四線相切 (見圖2).

Lambert**定理**: 若拋物線 Γ (焦點爲 F) 與 $\triangle ABC$ 的三邊 (或其延長線) 相切, 則 A、B、C、F 四點共圓。

命題1: 拋物線焦點對切線所作的對稱點落在準線上。(見[3]第 237 頁)

根據拋物線的幾何性質, 給定一直線 L 及線外一點 F, 滿足 $d(Q,L)=\overline{QF}$ 之 Q 點所成的集合即爲拋物線 Γ, 其中 L 及 F 分別爲 Γ 的準線與焦點(見圖3)。若在準線 L 上取一點 P, 連接 $\overline{PF}$, 則 $\overline{PF}$ 的中垂線爲 Γ 的切線 (引理1a)。由此可得, 在準線 L 上取任意四點 P_i, $i=1,2,3,4$, 並分別作 $\overline{P_iF}$ 的中垂線, 則此四條中垂線皆爲 Γ 的切線。在準線 L 上定出若干樣本點 $P_i(i\in Z)$ 滿足 $\overline{P_iP_{i-1}}=\overline{P_iP_{i+1}}$, 將 $\overline{P_iF}$ 的中垂線記爲 M_i, 諸 $M_i(i\in Z)$ 稱爲拋物線 Γ 的一組中垂線族 (見圖4), M_i 和 M_j 的交點記爲 $P_{i,j}$ (見圖5), 定義 $P_{i,i}$ 爲線段 $\overline{P_{i,i-1}P_{i,i+1}}$ 的中點 (見圖6)。藉由交點座標 (引理1b), 我們將於第二節探討交點 $\{P_{i,j}\mid i,j\in Z\}$ 可能的性質, 例如: 對給定整數 α,β, 諸點 $P_{i,\alpha-i}$ 落在直線 L_α 上; 諸點 $P_{i,\beta+i}$ 落在拋物線 Γ_β 上。

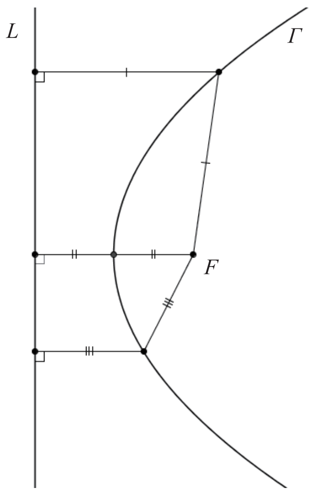

圖3：拋物線的幾何性質

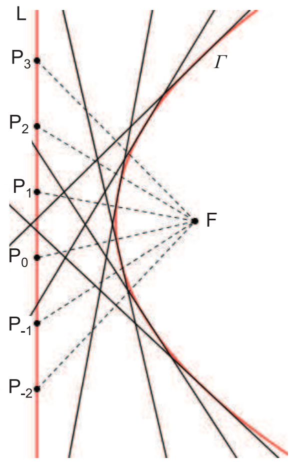

圖4：Γ 的一組中垂線族 (動態實驗2)

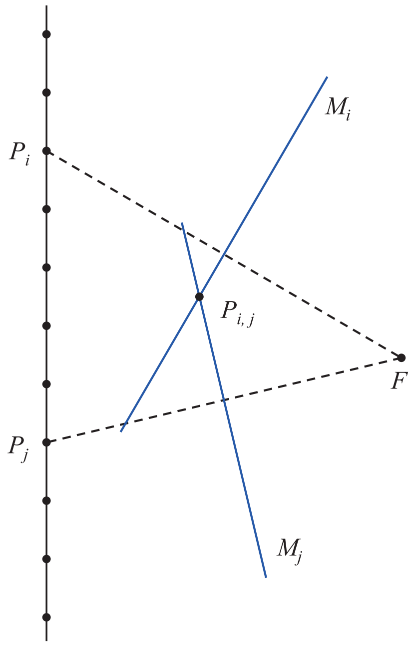

圖 5： $P_{i,j}$

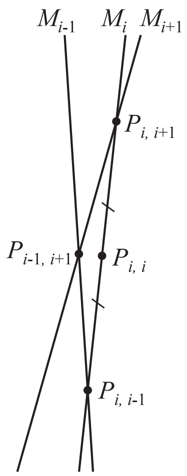

圖 6： $P_{i,i}$

一般所稱的織線是在相交兩直線上取等距的點，依序連接兩線上的點所成的圖形，例如: 圖 7 中, 在 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 上各取 5 點, 其中, $\overline{OA_1}=\overline{A_kA_{k+1}}$, $\overline{OB_5}=\overline{B_kB_{k+1}}$, $k=1,2,3,4$, 連接 $\overline{A_kB_k}$, $k=1,2,3,4,5$ 所得的圖形即爲織線。織線具有相當多的幾何性質, 較爲人知的是這些線段包絡出一個拋物線。若在準線上取等距分點 $P_i(i\in Z)$ 滿足 $\overline{P_iP_{i-1}}=\overline{P_iP_{i+1}}$, 作 $\overline{P_iF}$ 的中垂線 M_i, 則中垂線族 $M_i(i\in Z)$ 構成一組織線。

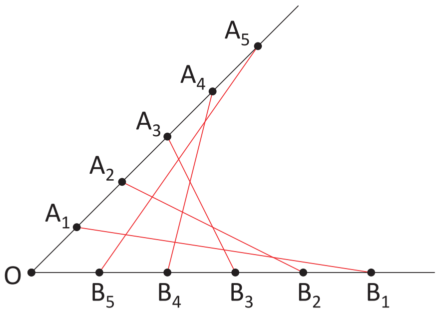

圖 7： 織線 (動態實驗 3)

給定任意兩兩相交一點的三直線, 可作出許多與此三直線相切的拋物線, 但自拋物線 Γ 的一組中垂線族中任取三線, 是否可還原出拋物線 Γ (即決定唯一的拋物線)？ 我們將在第三節針對這個問題, 藉由 Γ 的中垂線族的一些規律, 提供肯定的結論。

本文透過 AMA[1] 的功能, 可快速作多種中垂線, 展開探索過程, 我們從中觀察到若干現象, 逐漸形成猜測, 再利用 Geogebra[2] 的繪圖及計算功能, 逐一驗證, 給出完整的數學證明。

二、在準線上取等距分點所衍生中垂線族的交點

本節以準線及焦點建構出一個與拋物線相切的中垂線族, 並探討諸交點的性質。不失一般性, 設拋物線方程式爲 $y^2=4cx(c>0)$, 其焦點 $F(c,0)$, 在準線上取若干點 $P_i(-c,d_0+id)$ 滿足 $\overline{P_iP_{i-1}}=d$, 將 $\overline{P_iF}$ 的中垂線記爲 M_i, 當 $i\neq j$ 時, 中垂線 M_i 和 M_j 的交點記爲 $P_{i,j}$, 並定義 $P_{i,i}$ 爲線段 $\overline{P_{i,i-1}P_{i,i+1}}$ 的中點。本節將根據 $P_{i,j}$ 的座標 (引理1b), 進行一連串探究。

引理1: L 及 F 分別爲拋物線 Γ 的準線與焦點, 則:

(a) 若 P 爲準線 L 上的一點, 則 $\overline{PF}$ 的中垂線 M 與拋物線 Γ 相切。

(b) 中垂線 M_i 和 M_j 交點 $P_{i,j}$ 的座標爲 $\Big(\dfrac{(d_0+id)(d_0+jd)}{4c},d_0+\dfrac{(i+j)d}{2}\Big)$。

(c) 每一中垂線 M_i 被其上諸點 $P_{i,j}$ 截成等長線段。

證明:

(a) 如圖 8, 過 P 作一直線與 L 垂直, 與 M 相交於 Q, 因 $d(Q,L)=\overline{PQ}=\overline{QF}$ (M 爲 $\overline{PF}$ 的中垂線), 故可知 Q 在拋物線 Γ 上。以下先證明 Q 爲切點: 在 M 上取異於 Q 的任意點 Q', 因 $\overline{PQ'}=\overline{FQ'}$, 且直角 $\triangle PP'Q'$ 中, $\overline{PQ'}>\overline{P'Q'}$, 得 $d(Q',L)=\overline{P'Q'}=\overline{FQ'}$, 故得 Q' 不在 Γ 上, 得 M 與 Γ 恰有一交點 Q, 得證 Q 爲切點, 故得 M 爲切線。

(b) 由 $P_i(-c,d_0+id)$, $F(c,0)$, 得線段 $\overline{P_iF}$ 中垂線 M_i 的方程式爲

$$2cx-(d_0+id)y+\frac{(d_0+id)^2}{2}=0$$

同理可得 M_j 的方程式, 解聯立方程式 $\begin{cases}2cx-(d_0+id)y+\dfrac{(d_0+id)^2}{2}=0\\ 2cx-(d_0+jd)y+\dfrac{(d_0+jd)^2}{2}=0\end{cases}$

得 $P_{i,j}$ 的坐標 $\Big(\dfrac{(d_0+id)(d_0+jd)}{4c},d_0+\dfrac{(i+j)d}{2}\Big)$。

[1]國立交通大學陳明璋教授創造了一套配合 Microsoft PowerPoint 使用的工具軟體, 稱爲 AMA, 以設計簡單的線條規則, 經大量重複, 創造出豐富的、酷似自然界景象的圖案。利用 AMA 可以利用比較視覺化的工具來創作和實驗。

[2]GeoGebra 是由美國佛羅里達州亞特蘭大學 Markus Hohenwarter 教授所設計, 是一套免費和多平台的動態數學教育軟體。它結合了幾何、代數和微積分, 用點、向量、線段、直線、圓錐曲線等工具來繪圖, 當圖形改變時, 對應的函數或方程式也隨之改變。

(c) 當 $i \neq j$ 時, 由引理 1b 得兩點 $P_{i,j}$, $P_{i,j+1}$ 的坐標如下:

$$P_{i,j}\Big(\frac{(d_0+id)(d_0+jd)}{4c}, d_0+\frac{(i+j)d}{2}\Big),$$
$$P_{i,j+1}\Big(\frac{(d_0+id)(d_0+jd+d)}{4c}, d_0+\frac{(i+j+1)d}{2}\Big)$$

得向量 $\overrightarrow{P_{i,j}P_{i,j+1}}=\Big(\dfrac{(d_0+id)d}{4c},\dfrac{d}{2}\Big)$ 與 j 無關。

接下來考慮 $i=j$ 的情形, 同理可得向量 $\overrightarrow{P_{i,i-1}P_{i,i+1}}=\Big(\dfrac{(d_0+id)d}{4c},d\Big)$, 因 $P_{i,j}$ 為 $\overline{P_{i,i-1}P_{i,i+1}}$ 的中點, 再得向量 $\overrightarrow{P_{i,i-1}P_{i,i}}=\overrightarrow{P_{i,i}P_{i,i+1}}=\Big(\dfrac{(d_0+id)d}{4c},d\Big)$, 即得 $\overrightarrow{P_{i,i-1}P_{i,i}}=\overrightarrow{P_{i,i}P_{i,i+1}}=\overrightarrow{P_{i,j}P_{i,j+1}}$. 證畢。

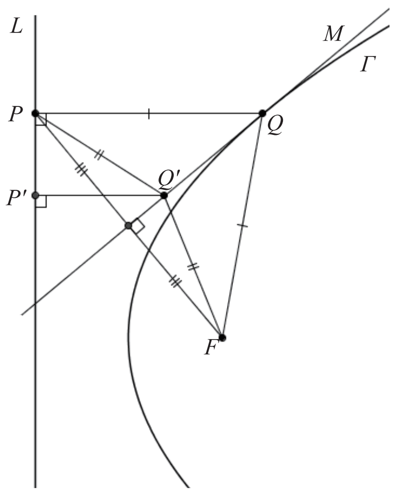

圖 8 : 中垂線 M 與拋物線 Γ 相切

在中垂線族 $\{M_i \mid i\in Z\}$ 的諸交點 $P_{i,j}$之中, 發現令人訝異的兩類共線現象 (定理2)。其一為當 $i+j$ 為定值時 (設為 α), 由 $P_{i,j}$ 的 y 座標為 $\dfrac{\alpha d}{2}$ 與 i、j 無關, 亦即不論 i、j 為何, 諸點 $P_{i,j}$ 皆落在水平直線 $L_\alpha: y=\dfrac{\alpha d}{2}$ 上 (式中 d 為準線上取點的間距), 尤有甚者, 不論 α 值為何, $L_{\alpha+1}$ 與 L_α 的距離皆為 $\dfrac{d}{2}$, 即諸水平線 $\{L_\alpha \mid \alpha\in Z\}$ 等距 (見圖9a)。另一種共線的情形為當 $|i-j|$ 為定值時 (設為 β), 經由代數運算, 我們由 $P_{i,j}$ 的 x,y 座標滿足拋物線方程式 $\Gamma_\beta: y^2=4cx+\dfrac{\beta^2d^2}{4}$, 即諸點落在同一條拋物線 Γ_β 上, 並且諸拋物線 Γ_β 經平移後可疊合 (見圖9b)。另外, 當 $\beta=i-j=0$時, Γ_0 即為一開始所給定的拋物線 $\Gamma: y^2=4cx$, 此時, 諸中垂線與 $\Gamma_0(=\Gamma)$ 相切, 得 M_i 與 Γ 相切於點 $P_{i,j}$。

定理2: 已知 M_i (i 為整數) 是拋物線 Γ : $y^2=4cx$ 的一個中垂線族, 對給定整數 α,β,

(a) $P_{i,\alpha-i}$ 諸點落在直線 L_α : $y=\dfrac{\alpha d}{2}$ 上, 諸直線 L_α 平行等距。

(b) $P_{i,\beta+i}$ 諸點落在拋物線 Γ_β : $y^2=4cx+\dfrac{\beta^2d^2}{4}$ 上, 諸拋物線 Γ_β 經平移後可疊合。

(c) 諸 M_i 與 Γ 相切於 $P_{i,i}$ 。

證明:

(a) 由引理1b, 得 $P_{i,\alpha-i}\Big(\dfrac{id^2(\alpha-i)}{4c},\dfrac{\alpha d}{2}\Big)$, 因其 y 座標與 i、j 無關, 得 $P_{i,j}$ 在 L_a : $y=\dfrac{\alpha d}{2}$ 上。又 $L_{k+1}:y=\dfrac{(\alpha+1)d}{2}$, 可得 $L_{\alpha+1}$ 與 L_α 平行, 且兩直線的距離為 $\dfrac{d}{2}$。

(b) 若 $j-i=\beta$, 由引理 1b, 得 $P_{i,j}\Big(\dfrac{(d_0+id)(d_0+id+\beta d)}{4c},d_0+id+\dfrac{\beta d}{2}\Big)$。

$$\text{假設}\qquad\begin{cases} x=\dfrac{(d_0+id)(d_0+id+\beta d)}{4c} & (1)\\[2mm] y=d_0+id+\dfrac{\beta d}{2} & (2)\end{cases}$$

由 (2) 得 $id=y-d_0-\dfrac{\beta d}{2}$, 代入 (1), 化簡得 $y^2=4cx+\dfrac{\beta^2d^2}{4}$。

(c) 由引理1b, 算得 $\overline{P_{i,i}F}=d(P_{i,i},L)$ 故得點 $P_{i,i}$ 在 Γ 上, 即 $P_{i,i}$ 為切點。 證畢。

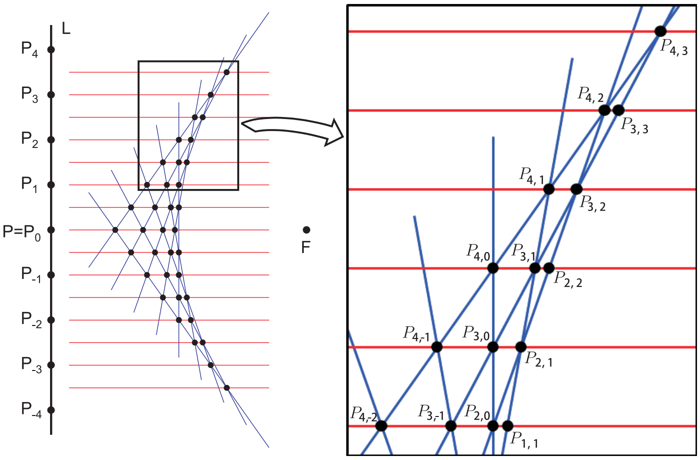

圖 9a : L_α

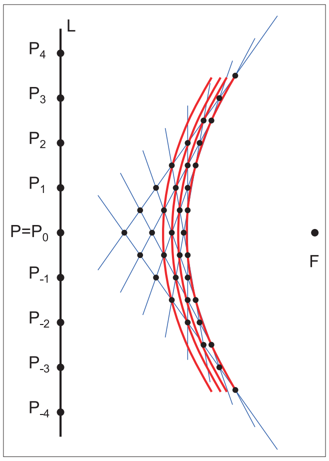

圖 9b : Γ_β

L_α 上相鄰兩點的距離與 α 的奇偶性有關, 當 $\alpha=2i$ 時, 水平直線 L_{2i} 上, 由右而左的點依序為 $P_{i,i},P_{i+1,i-1},P_{i+2,i-2},\ldots,P_{i+k,i-k},\ldots$ (見圖10a); 當 $\alpha=2i+1$ 時, 水平直線 L_{2i+1} 上, 由右而左的點依序為 $P_{i+1,i},P_{i+2,i-1},P_{i+3,i-2},\ldots,P_{i+k,i-k+1},\ldots$ (見圖10b), 方便

起見, 令 $d_{\alpha,k}$ 表示 L_α 上相鄰兩點的距離, 就 α 的奇偶性定義 $d_{2i,k}=\overline{P_{i+k-1,i-k+1}P_{i+k,i-k}}$, $d_{2i+1,k}=\overline{P_{i+k,i-k+1}P_{i+k+1,i-k}}$.

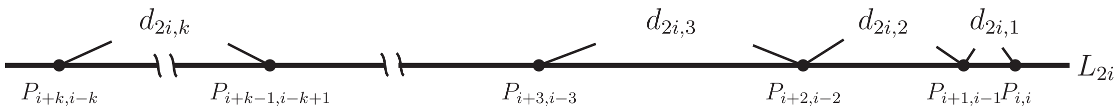

圖 10a： L_{2i}

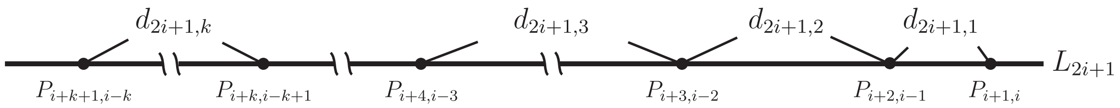

圖 10b： L_{2i+1}

由引理 1b 所提供的點座標得相鄰兩點的距離

$$d_{2i,k}=\overline{P_{i+k-1,i-k+1}P_{i+k,i-k}}=\frac{(2k-1)d^2}{4c}$$
$$d_{2i+1,k}=\overline{P_{i+k,i-k+1}P_{i+k+1,i-k}}=\frac{kd^2}{2c}$$

再算得 L_a 上共頂點兩段線段長度之差爲 $d_{\alpha,k+1}-d_{\alpha,k}=\dfrac{d^2}{2c}$ 與 α、k 無關, 因此數列 $< d_{\alpha,k} >$ 是一個以 $\dfrac{d^2}{2c}$ 爲公差的等差數列。以 $k=1$ 代入上兩式, 得首項

$$d_{2i,1}=\frac{d^2}{4c}$$
$$d_{2i+1,1}=\frac{d^2}{2c}$$

另外, 因 $d_{\alpha,k}$ 與 α 無關, 因此當 m,n 同爲奇數時 (或同爲偶數), 對於任意正整數 k, 可得 $d_{m,k}=d_{n,k}$。這顯示, 平移 L_{2m} 使得 L_{2m} 和 L_{2n} 疊合且兩線上的點 $P_{m-t,m+t}$ 和 $P_{n-t,n+t}$ 疊合, 則兩直線上的所有交點皆疊合; 同樣的情形也適用於任意兩直線 L_{2m+1} 和 L_{2n+1}。上述結果歸納爲系理 3。

系理 3: 令 $d_{2i,k}=\overline{P_{i+k-1,i-k+1}P_{i+k,i-k}}$, $d_{2i+1,k}=\overline{P_{i+k,i-k+1}P_{i+k+1,i-k}}$ 則

(a) 數列 $< d_{2i,k} >$ 爲首項 $\dfrac{d^2}{4c}$, 公差 $\dfrac{d^2}{2c}$ 的等差數列。

(b) 數列 $< d_{2i+1,k} >$ 爲首項 $\dfrac{d^2}{2c}$, 公差 $\dfrac{d^2}{2c}$ 的等差數列。

(c) 若 $m-n$ 爲偶數, 則 $d_{m,k}=d_{n,k}$。

給定一組 Γ 的中垂線族 $\{M_i \mid i \in Z\}$, 從其中任取四條線可圍出一個四邊形, 我們探究其中是否存在面積相等的四邊形? 在 Γ 的一組中垂線族之中, 諸點 $P_{i,j}$ 落在平行等距直線 $\{L_\alpha \mid \alpha \in Z\}$ 上, 又因爲當 $m-n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ 時, L_m 及 L_n 上存在等長線段 $d_{m,k} = d_{n,k}$, 因此, 我們可以得到兩個對角線落在 L_m 及 L_n 上的等面積四邊形。例如：圖 11 中的三個四邊形的面積皆相等。上述結果歸納如系理 4。

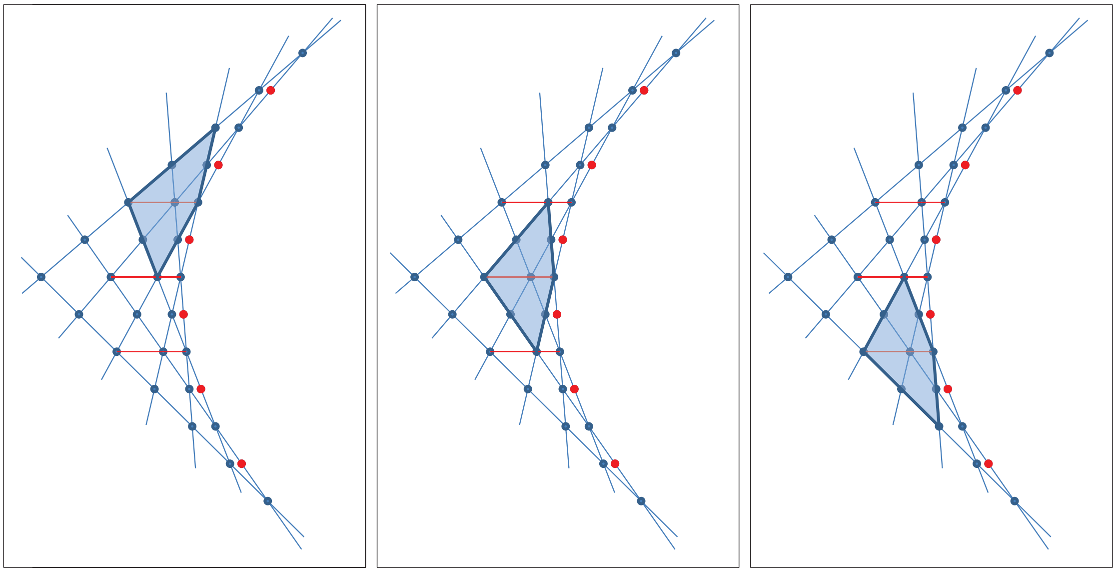

圖 11：等面積之四邊形 (動態實驗 4)

系理 4: 在中垂線族 $\{M_i \mid i \in Z\}$ 所對應的直線族 $\{L_\alpha \mid \alpha \in Z\}$ 裡, 任取 L_m 上兩點 $P_{i,m-i}$ 及 $P_{i+k,m-k-i}$ 形成一個邊落在 M_i、M_{m-i}、M_{i+k}、M_{m-k-i} 上的四邊形 $P_{i+k,m+k-i}P_{i+k,m-k-i}P_{i,m-2k-i}P_{i,m-i}$ (見圖 12). 則對於任意 n 滿足 $m-n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, 恰有一個對角線落在 L_n 的四邊形與前述四邊形等面積。

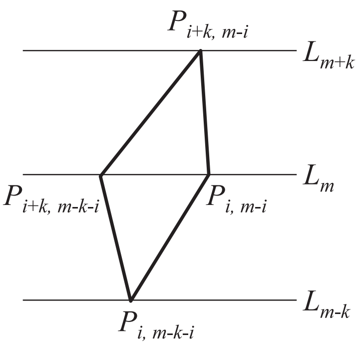

圖 12

三、由拋物線 Γ 中垂線族之三條直線還原 Γ

給定一條拋物線 Γ, 可求得無限多組中垂線族滿足若干關係 (定理 2 及系理 3, 4)。本節探討至少需要自中垂線族裡中選取三條直線, 才足以還原拋物線 Γ, 因此拋物線 Γ 是唯一與此中垂線族相切的拋物線。

任取拋物線 Γ 之一組中垂線族中的三條線 M_i, M_j, M_k $(k<i<j)$, 我們可以求得第四條直線。在 M_k 上, 根據引理 1c, 由 $\overline{P_{k,j+1}P_{j,k}}:\overline{P_{j,k}P_{i,k}}=1:(j-i)$ 可求出 $P_{k,j+1}$; 在 M_i 上, 根據 $\overline{P_{i,j+1}P_{i,j}}:\overline{P_{i,j}P_{i,k}}=1:(j-k)$ 可求出 $P_{i,j+1}$, 再由兩點 $P_{k,j+1}$ 及 $P_{i,j+1}$ 即得 M_{k+1}, 進而由 M_i, M_j, M_k, M_{k+1} 還原出拋物線 Γ (見圖13)。另一方面, 當給定一組 Γ 中垂線族的三條直線時, 因此三線分別與 Γ 相切於 $P_{i,i}$, $P_{j,j}$, $P_{k,k}$ 提供了額外的條件, 因此可還原拋物線 Γ, 提供僅由三線可還原 Γ 的另一種觀點。

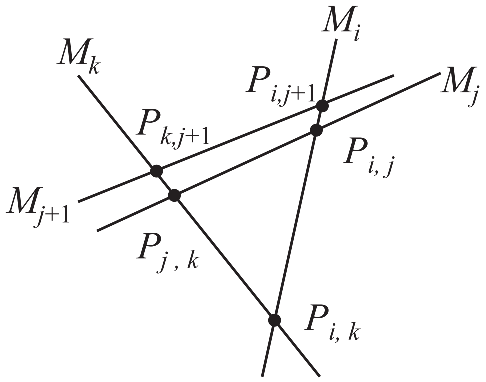

圖13: 由 M_i, M_j, M_k 還原 Γ

後記

文中圖 1、圖 4、圖 7 及圖 11 皆利用 GeoGebra 所設計的動態實驗, 讀者可輸入網址直接進行探索。動態實驗各網址如下:

(a) 動態實驗 1: 給定任三條互不平行的直線, 有幾個拋物線和此三直線相切?
`https://www.geogebra.org/m/a7dfd5ee`

(b) 動態實驗 2: 動態拋物線的中垂線族
`https://www.geogebra.org/m/uU8NCXr4`

(c) 動態實驗 3: 動態織線
`https://www.geogebra.org/m/RUSBdb6n`

(d) 動態實驗 4: 探索等面積之四邊形

本實驗需先下載並安裝 Java 6 :
http://www.java.com/zh_TW/download/installed.jsp 及 GeoGebra 5:
http://download.geogebra.org/installers/5.0/ (點選所需系統的 exe 檔)
安裝 Java 6 及 GeoGebra 5 後, 輸入網址即可開啟 GeoGebra 檔, 進行動態實驗的探索。https://drive.google.com/open?id=0B7ZBvcy-JR4DVHNaUFNMQWhqNFU

透過資訊科技我們可以從無數條直線的交點中, 觀察到一些令人欣喜的結果, 再透過數學軟體之精確圖形與快速計算, 即時驗證我們的觀察結果, 最後再給於嚴謹的證明, 這就是數學歸納法。筆者從事數學教學工作多年, 自始至終深信資訊科技能活化數學教學, 讓數學課變得更有趣, 每位學生都喜歡上數學課。期盼透過本文能讓更多的數學教師善加利用資訊科技於課堂上, 讓數學教育展現新氣象!

参考資料

1. 趙文敏。三切線可決定多少拋物線。科學教育月刊, 283, 51-61, 2005。
2. 沈朋裕。用Lambert 定理作拋物線。龍騰數學新天地第十二期, 38-40, 2005。
3. 海因里希—德里。一百個著名初等數學問題歷史與解答。凡異。

—本文作者蘇柏奇任教苗栗縣立興華高級中學, 陳明璋任教國立交通大學通識教育中心, 顏貽隆爲國立科學工業園區實驗高級中學退休教師—