數學傳播 40卷4期, pp. 18-29

任意長度等差級數— van der Waerden 話當年

張鎮華

一、菲爾茲獎的光環

陶哲軒 (Terence Chi-Shen Tao) 1975 年 7 月 17 日出生於澳洲, 是第二代澳洲香港移民, 從小天資過人, 研究興趣涵蓋數學各種領域, 24 歲就當了 UCLA 數學系終身教授。他從小開始, 得過無數的重要獎項, 31 歲的時候、也就是 2006 年 8 月 22 日, 在西班牙馬德里的國際數學家大會獲得菲爾茲獎 (Fields Medal) , 並於次日在大會做了一小時報告。

陶哲軒得到菲爾茲獎的引文是「因爲他對偏微分方程、組合學、調和分析和加性數論的貢獻。」他的第一個突出表現是, 和 Ben Green 共同證明了, 可能在幾百年前就被問過的一個有關質數的問題:「質數裡面是否包含任意長度的等差級數?」等差級數 (算術級數) 是相鄰兩項相差一個定數的整數列, 例如 3, 5, 7 是一個長度爲 3、公差爲2的等差級數, 109, 219, 329, 439, 549 是一個長度爲 5、公差爲 110 的等差級數。

有關了解等差級數的一個大突破, 是匈牙利數學家 Endre Szemerédi 在 1975 年證明了「正密度的無窮正整數集裡面包含任意長度的等差級數。」所謂一個集合有正密度, 指的是當 n 夠大時, 這個集合在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 當中都含有固定百分比的元素。不過這個定理並不適用於質數集, 因爲它並沒有正密度, 事實上, 當正整數越來越大時, 質數就越來越稀疏。但是不管質數有多稀疏, Green-Tao 證明了「質數裡面確實包含任意長度的等差級數。」他們的這個結果具有高度原創性, 提供一個有深度、基礎但困難問題的答案, 在質數性質的研究裡創下一個新的突破。

任意長度等差級數的研究, 最早可以追溯到 1927 德國數學家 van der Waerden 的定理「將正整數分成若干集合, 其中總有一個包含任意長度的等差級數。」根據 van der Waerden 1971 年回憶文的記載, 他於 1926 年在 Hamburg 大學數學系, 和他的朋友 Emil Artin 與 Otto Schreier 一齊討論 Baudet 猜想, 三人都有一些不錯的構想, 後來他繼續推導, 完成了 1927 年的文章。

根據 Graham [1979] 的看法, 雖然 van der Waerden 在他的文章中一直叫做 Baudet 猜想, 但是有更強的證據顯示, 這個猜想事實上最早是 Schur 在研究模 p 二次剩餘時提出來的, 這可見諸於 Brauer 在 Schur 收集工作 [1973] 的序文。

Schur 證明過的一個定理:「將正整數分成若干集合, 其中總有一個有 $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = x_n$ 的解。」如果將方程式變化, 甚至擴大爲解方程組, 可以變化出很多困難的問題。等差級數就是解方程組 $x_i + x_{i+2} = 2x_{i+1}$、$1 \leq i \leq \ell - 2$、其中各 x_i 均相異, 換句話說, 要取得正整數 a 和 d 使得 $x_i = a + (i-1)d$、$1 \leq i \leq \ell$, 其中 d 叫做這個等差級數的公差、ℓ 叫做它的長度。有時爲了方便也會考慮 $x_i = a + id$、$1 \leq i \leq \ell$ 的表示法。

二、話說 1926 年—van der Waerden 的回憶

現在來回溯 van der Waerden、Artin 和 Schreier 三個人在 1926 年的討論。這個問題最先的問法是在所有正整數上求等差級數。

猜想 AP1: 若將正整數任意分成兩類, 則對任意 ℓ、其中總有一類包含一個長度是 ℓ 的等差級數。

這個猜想其實等價於一個看起來很像、但是比較強的敘述。

猜想 AP2: 若將正整數任意分成兩類, 則其中有一類使得對任意 ℓ、這一類總是包含一個長度 ℓ 的等差級數。

證明 (AP1)$\Leftrightarrow$(AP2): 猜想 AP2 顯然可以推到猜想 AP1。反過來, 如果猜想 AP1 成立, 將正整數任意分成兩類 A_1 和 A_2, 對任意 ℓ 存在 i_ℓ 使得 A_{i_ℓ} 包含一個長度 ℓ 的等差級數, 因爲每個 i_ℓ 都只能是 1 或 2, 就會有無窮多個 i_ℓ 都相等、不失一般性假設是 1, 由於長度是 ℓ 的等差級數中有長度是 $\ell - 1$ 的等差級數, 對任意 ℓ、A_1 總是包含一個長度 ℓ 的等差級數。這證明了猜想 AP2。 □

一開始他們就知道, 猜想 AP1 對 $\ell = 2$ 顯然成立, 甚至不需要考慮所有正整數, 只要考慮 $1, 2, 3$ 這三個數, 不論將它們如何分類, 總有一類包含兩個數、構成等差級數。

接著討論 $\ell = 3$ 的情況, 一樣地、也不需要考慮所有正整數, 只要考慮 1 到 9 這九個數。如果只考慮 1 到 8 是不夠的, 因爲可以分成 $\{1, 2, 5, 6\}$ 和 $\{3, 4, 7, 8\}$、其中沒有一類包含長度是 3 的等差級數, 但是如果把 9 加到任何一類中、就會產生長度是 3 的等差級數。

一般來說, 如果將 $\{1, 2, \ldots, 9\}$ 分成 A 和 B 兩類, 並假設沒有任何一類有長度 3 的等差級數。考慮正中央三個數 $4, 5, 6$ 的狀態, 它們不可能屬於同一類, 在排除鏡射組合和兩類互

換的情況之後, 不失一般性這三個數的組合可分成下面兩種情況

$$4,6\in A、5\in B, \text{ 或者 } 4,5\in A、6\in B。$$

第一種情況中, 考慮 $(2,4,6)$ 和 $(4,6,8)$ 這兩組等差級數便知道 $2,8\in B$, 因此, B 當中就有 $(2,5,8)$ 這組等差級數, 矛盾。第二種情況中, 考慮 $(3,4,5)$ 得知 $3\in B$, 再考慮 $(3,6,9)$ 得知 $9\in A$, 再考慮 $(1,5,9)$ 和 $(5,7,9)$ 得知 $1,7\in B$, 最後考慮 $(1,2,3)$ 和 $(6,7,8)$ 知道 $2,8\in A$。但這麼一來, 得到 A 中有 $(2,5,8)$, 又矛盾。

接著 Schreier 提問, 這樣的做法是不是對每一個固定的 ℓ 都對? 也就是, 猜想 AP1 是否等價於猜想 AP3? Schreier 證明了 猜想 AP1 的確等價於猜想 AP3。

猜想 AP3: 對任意正整數 ℓ, 存在正整數 $N(\ell)$ 使得, 若將 $\{1,2,\ldots,N(\ell)\}$ 任意分成兩類, 則其中總有一類包含一個長度是 ℓ 的等差級數。

證明 (AP1)⇔(AP3): 猜想 AP3 顯然可以推到猜想 AP1, Schreier 利用對角線程序證明了猜想 AP1 可以推到猜想 AP3。假設猜想 AP1 成立、但是猜想 AP3 卻不成立, 則對任意正整數 N 總可以將 $\{1,2,\ldots,N\}$ 分成兩類、使得這種分割 D_N 中沒有一類包含長度是 ℓ 的等差級數, 觀察所有分割所成的列

$$D_1, D_2, D_3, \ldots,$$

考慮 1 這個數, 對每一個分割, 它總是落在其中的一類, 所以 $D_1,D_2,D_3,\ldots$ 有無窮子列 D_1', D_2', $D_3',\ldots$ 使得 1 總是落在每一分割的同一類、設爲第 i_1 類、其中 $i_1\in\{1,2\}$。

在 $D_2',D_3',D_4',\ldots$ 中, 2 總是落在每一個分割的某一類, 所以 $D_2',D_3',D_4',\ldots$ 有無窮子列 $D_2'',D_3'',D_4'',\ldots$ 使得 2 總是落在每一分割的同一第 i_2 類中。依此類推, 可以得到無窮子列

$$D_n^{(n)}, D_{n+1}^{(n)}, D_{n+2}^{(n)}, \ldots$$

使得對所有分割 $1,2,\ldots,n$ 都在同一類中:

$$\begin{gathered} 1 \text{ 在第 } i_1 \text{ 類、} \\ 2 \text{ 在第 } i_2 \text{ 類、} \\ \vdots \\ n \text{ 在第 } i_n \text{ 類。} \end{gathered}$$

利用這些資訊, 考慮所有正整數的分割 D、其中 1 在第 i_1 類、2 在第 i_2 類、依此類推 n 在第 i_n 類等。在這個分割, n 所在的類和它在 $D_n^{(n)}$ 所在的類相同, 這就是稱爲對角線程序的原因。

在 D 裡面不會有一類包含長度 ℓ 的等差級數。如果 D 的某一類包含一個長度 ℓ 的等差級數, 設其最後一項是 n, 則這個等差級數也在 $D_n^{(n)}$ 中某一類, 這和原來 D_N 中任一類都不包含長度 ℓ 的等差級數矛盾。 □

前面已經知道 $N(2)=3$ 及 $N(3)=9$。他們希望利用歸納法, 由 $N(\ell-1)$ 去推導 $N(\ell)$。Artin 觀察到, 做歸納法的時候, 與其討論將正整數分成兩類、不如將它分成更多類。Artin 也證明這和原來的猜想是等價的。

猜想 AP4: 對任意正整數 k 和 ℓ, 存在正整數 $N(k,\ell)$ 使得, 若將 $\{1,2,\ldots,N(k,\ell)\}$ 任意分成 k 類, 則其中總有一類包含一個長度是 ℓ 的等差級數。

證明 (AP3)$\Leftrightarrow$(AP4): 猜想 AP4 取 $k=2$ 就是猜想 AP3。

假設猜想 AP3 成立, 對於猜想 AP4 當 $k=2$ 時, 取 $N(2,\ell)=N(\ell)$。當 $k=4$ 時, 取 $N(4,\ell)=N(N(2,\ell))$, 若將 $\{1,2,\ldots,N(N(2,\ell))\}$ 任意分成 4 類 A_1,A_2,A_3,A_4, 則 $A_1\cup A_2$ 或 $A_3\cup A_4$ 中總有一類、不妨假設是 $A_1\cup A_2$、包含一個長度是 $N(2,\ell)$ 的等差級數 $a+d,a+2d,\ldots,a+N(2,\ell)d$。對 $i=1,2$ 令 $A_i'=\{j:1\leq j\leq N(2,\ell),a+jd\in A_i\}$, 則 $\{1,2,\ldots,N(2,\ell)\}$ 被分成 A_1' 和 A_2' 兩類, 所以其中總有一類 A_i' 包含一個長度是 ℓ 的等差級數 $a'+d',a'+2d',\ldots,a'+\ell d'$, 將它還原就會是 A_i 中長度是 ℓ 的等差級數 $(a+a'd)+d'd,(a+a'd)+2d'd,\ldots,(a+a'd)+\ell d'd$ 這證到 $k=4$ 的情況。用歸納法就可得到 $k=2^r$、進而 $k\leq 2^r$ 的敘述。 □

於是他們開始證明猜想 AP4。這是歸納法證明常見的的做法: 要證明一個敘述, 透過證明另一個更強的敘述, 可以提供歸納法假設更多資訊, 證明反而更容易。

三、數學實驗

數學的研究學習裡沒有實驗的說法, 但是其實大部分的研究, 還是從小的例子觀察歸納, 這可以說是數學裡的實驗。現在來看看他們想要證明猜想 AP4 所作的實驗。

當 $\ell=2$ 時顯然可以取 $N(k,2)=k+1$。雖然之前已經用窮舉法算出 $N(2,3)$, 他們還是開始嘗試 $k=2$、$\ell=3$ 的情況。

他們用 2 條平行線表示整數分成的 2 類, 用短的垂直線段表示各類中的數, 如圖 1 所示。連續 5 個正整數所成的區塊, 前 3 個數必有 2 個在同一類中, 它們形成長度爲 2 的等差級數, 等差級數的第 3 項必在同一區塊, 如果它與前 2 項在同一類, 就得證; 可以假設它在另一類, 如圖 1 所示。

長度 5 的區塊依其中各數在不同類總共有 $2^5=32$ 型, 所以在連續 33 個區塊中有 2 塊是同型的, 如圖 2 所示。

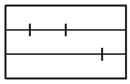

圖 1: 兩類及其上整數表示法。

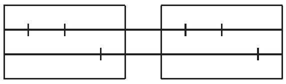

圖 2: 同型的兩區塊。

接下來找第 3 區塊、使其與第 2 區塊的距離、等於第 2 區塊到第 1 區塊的距離, 如圖 3 所示。標出第 3 區塊中與前 2 區塊相同的位置的 3 數, 則前 2 數要在不同類中、不然就找到長度 3 的等差級數, 第 3 數不論在那一類, 也都會形成 aaa 或 bbb 的等差級數。所以最多只要 $2\cdot 2^5+1=65$ 個區塊、也就是 $5\cdot 65=325$ 個數, 就可以找到長度 3 的等差級數。可取 $N(2,3)=325$。

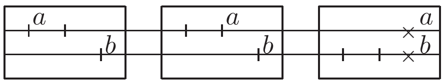

圖 3: 不可避免的等差級數。

接著討論 $k=\ell=3$ 的情況。類似地, 用 3 條平行線表示整數分成 3 類, 用短垂直線段表示各類中的數。連續 7 個正整數所成的小區塊, 前 4 個數必有 2 個在同一類中、設爲第 1 類, 它們形成長度 2 的等差級數, 等差級數的第 3 項必在同一小區塊, 可以假設它在另一類、設爲第 2 類, 如圖 4 第 1 個小區塊所示。長度 7 的小區塊依其中各數在不同類總共有 3^7 型, 所以在連續 3^7+1 個區塊中有 2 塊是同型的, 如圖 4 前 2 個小區塊所示。接下來找第 3 小區塊、使這 3 個小區塊等距, 如圖 4 所示。標出第 3 區塊中與前 2 區塊相同的位置的 3 數, 則前 2 數要在不同類中、設爲第 2/3 類, 第 3 數則會在第 3 類, 不然都會找到長度 3 的等差級數。從第 1 到第 3 個小區塊只要 $r\le 2\cdot 3^7+1$ 個小區塊, 將它們合成如圖 4 的大區塊。

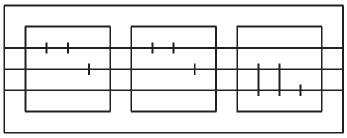

圖 4: 三個小區塊合成一個大區塊。

一個大區塊有 r 個小區塊, 共有 $7r$ 個數, 依其中各數在不同類總共有 3^{7r} 型, 所以在連

續 $3^{7r}+1$ 個大區塊中有 2 塊是同型的, 如圖 5 所示。

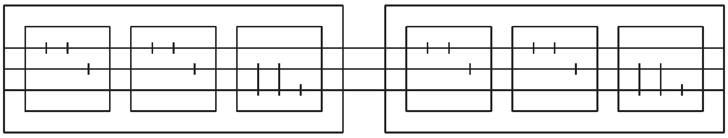

圖 5: 同型的兩個大區塊。

接下來找第 3 大區塊、使這 3 個大區塊等距, 如圖 6 所示。標出第 3 個大區塊中與前 2 個大區塊相同的位置的數, 則第 3 個大區塊中最末一個標示爲 $\times$ 的數不論在那一類, 也都會形成 aaa、bbb 或 ccc 的等差級數。所以最多只要 $2\cdot 3^{7r}+1$ 個大區塊、也就是 $7r(2\cdot 3^{7r}+1)\ \le\ 7(2\cdot 3^7+1)(2\cdot 3^{7(2\cdot 3^7+1)}+1)$ 個數, 就可以找到長度 3 的等差級數。可取 $N(3,3)=7(2\cdot 3^7+1)(2\cdot 3^{7(2\cdot 3^7+1)}+1)$。

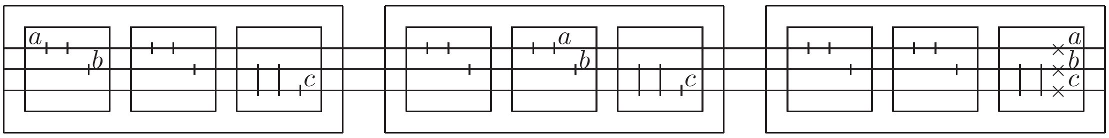

圖 6: 不可避免的等差級數。

至此, 他們都相信同樣的論證可以證明猜想 AP4。不過 Artin 和 Schreier 還是不放心, 希望看看 $\ell=4$ 的證明, 他們還是先考慮 $k=2$ 的情況。

如前所示, 連續 $n=N(2,3)$ 個正整數中必有一類含有長度是 3 的等差級數, 可設 n 是奇數, 並考慮連續 $g=n+(n-1)/2$ 個正整數所成的區塊, 則等差級數的第 4 項在此區塊內, 而且可假設是在與前 3 項不同的一類, 如圖 7 所示。

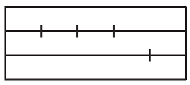

圖 7: 長度 4 的級數。

長度 g 的區塊依其中各數在不同類總共有 2^g 型, 所以在連續 $N(2^g,3)$ 個區塊中有等距的 3 塊是同型的, 如圖 8 所示。按照同樣距離找出第 4 區塊, 就會形成 $aaaa$ 或 $bbbb$ 的等差級數。

至此他們完全同意, 由 $\ell-1$ 的結論可以推到 ℓ 的結論。他們的這個建構性的討論, van der Waerden 將其概念大力推演, 終於完成了 1927 年發表的定理。

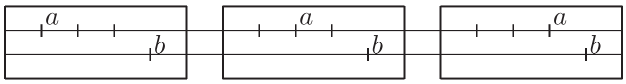

圖 8: 同型的三區塊。

van der Waerden 在 1971 年寫下前述的回憶文, 展現了數學家不把成就集於自身的風範, 值得大家學習。

四、證明 van der Waerden 定理

這一節正式證明 van der Waerden 定理, 這裡引用 Graham 和 Rothchild [1974] 的簡短證明。前述將一個集合 A 分成 k 類 $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 也就是 $A = \cup_{1\le i\le k} A_i$、且對 $i \neq j$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 習慣上人們也常把它叫做 A 的一個 k-著色, A_i 中的元素稱爲著第 i 種顏色。

定理 1 (van der Waerden 定理 [1927])**.** 對於任意的正整數 k, ℓ 都存在一個正整數 $w(k,\ell)$, 使得若將 $\{1, 2, \ldots, w(k,\ell)\}$ 作 k-著色, 則必存在同色的、長度爲 ℓ 的等差數列。

證明: 用 $\{0, 1, \ldots, \ell\}^m$ 表示所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$、其中各 $x_i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$、的集合。這個集合中的兩元素稱爲 ℓ-等價 (ℓ-equivalent) $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ 是指它們的對應項在最後一次出現 ℓ 之前都相等, 也就是, 若 s 是使得當 $i \ge s$ 時 $x_i < \ell$ 且 $y_i < \ell$ 的最小指標, 則當 $j < s$ 時 $x_j = y_j$。底下以雙層歸納法證明敘述 $S(\ell, m)$:

> 對所有 k, 存在 $w(k,\ell,m)$ 使得對於 $\{1, 2, \ldots, w(k,\ell,m)\}$ 的任意 k-著色 C, 存在正整數 $a, d_1, d_2, \ldots, d_m$ 使得 $a + \sum_{i=1}^{m} \ell d_i \le w(k,\ell,m)$、而且在 $\{0, 1, \ldots, \ell\}^m$ 的等價類中所有 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 所對應的 $C(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i)$ 都相等。

當 $m = 1$ 時, 因爲 $\{(x_1) : 0 \le x_1 < \ell\}$ 是 ℓ-等價類, 所以 $\{a + x_1 d_1 : 0 \le x_1 < \ell\}$ 是同色的等差級數, $w(k,\ell,1)$ 就是所想要求的 $w(k,\ell)$。$S(1,1)$ 顯然成立, 所以只要證明下面兩個陳述。

(甲) 若 $S(\ell, m)$ 成立, 則 $S(\ell, m+1)$ 成立。

證明: 固定一個 k, 令 $w = w(k,\ell,m)$ 及 $w' = w(k^w, \ell, 1)$, 爲了證明 ww' 是所要求的 $w(k,\ell,m+1)$, 考慮 $\{1, 2, \ldots, ww'\}$ 的任意 k-著色 C, 將這個集合分割成 w' 個區塊, 每一區塊含有 w 個連續的數, 依其中各數所著的顏色總共有 k^w 型, 將每一區塊視同一個數, 就等同在考慮 $\{1, 2, \ldots, w'\}$ 這個集合。更精確來說, 定義 $\{1, 2, \ldots, w'\}$ 的 k^w-著色 C' 使得

$C'(i)=C'(i')$ 若且爲若 $C((i-1)w+j)=C((i'-1)w+j)$ 對 $1\leq j\leq w$ 都成立。由歸納法假設, 存在 a' 和 d' 使得 $C'(a'+xd')$ 對所有 $0\leq x\leq \ell-1$ 都相同。將 $S(\ell,m)$ 應用在 $\{(a'-1)w+1,(a'-1)w+2,\ldots,a'w\}$, 根據 w 的定義, 存在 $a,d_1,d_2,\ldots,d_m$ 使得在 $\{0,1,\ldots,\ell\}^m$ 的等價類中所有 $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ 所對應的 $C(a+\sum_{i=1}^m x_id_i)$ 都相等。令 $d_{m+1}=d'w$, 則 透過前述的 C', 對於 $\{1,2,\ldots,ww'\}$ 在 $\{0,1,\ldots,\ell\}^{m+1}$ 的等價類中所有 $(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1})$ 所對應的 $C(a+\sum_{i=1}^{m+1} x_id_i)$ 都相等。這證明 $S(\ell,m+1)$ 成立。 $\square$

(乙) 若 $S(\ell,m)$ 對所有 m 都成立, 則 $S(\ell+1,1)$ 成立。

證明: 固定一個 k, 考慮 $\{1,2,\ldots,2w(k,\ell,k)\}$ 的任意 k 著色 C, 存在 $a,d_1,d_2,\ldots,d_k$ 使得 $a+\sum_{i=1}^k \ell d_i\leq w(k,\ell,k)$、而且在 $\{0,1,\ldots,\ell\}^k$ 的等價類中所有 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 對應的 $C(a+\sum_{i=1}^k x_id_i)$ 都相等。根據鴿籠原理, $\{0,1,\ldots,k\}$ 當中存在 $u<v$ 使得

$$C(a+\textstyle\sum_{i=1}^u \ell d_i)=C(a+\sum_{i=1}^v \ell d_i)。$$

這個式子再加上 $S(\ell,k)$ 就會得到, 對 $0\leq x\leq \ell$, 所有 $C((a+\sum_{i=1}^u \ell d_i)+x(\sum_{i=u+1}^v d_i))$ 都相等。這證明 $S(\ell+1,1)$ 成立。 $\square$

五、Erdős 和 Turán 1936 年的工作

van der Waerden 定理進一步可以推廣到 Hales-Jewett 定理 [1963]。這個定理用通俗的說法可以這麼描述: 對於任意給定的正整數 k 和 n, 總是存在 $h=h(k,n)$ 使得當 h-維的 n 階陣列被 k-著色的時候, 一定存在某個同顏色的行、列或者對角線。換句話說, 無論有多少人玩, 當我們在夠高維度的空間玩井字遊戲的時候, 最後就一定能夠分出勝負, 不會有平手的結局。

不過, 接下來我們要從另一個角度來討論。

1936 年 Erdős 和 Turán 用另一種觀點研究等差級數的問題。對於任一正整數 ℓ, 一個 A_ℓ 數列是指、不存在長度是 ℓ 的等差級數當做子列的數列, 用 $r_\ell(n)$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$ 內的 A_ℓ 數列的最大長度。如果 $a_1<a_2<\ldots<a_r$ 是一個 $\{1,2,\ldots,n\}$ 內的 A_ℓ 數列, 則

$$n+1-a_r<n+1-a_{r-1}<\ldots<n+1-a_1, \tag{1}$$

$$a_1-k<a_2-k<\ldots<a_r-k、其中\ k<a_1 \tag{2}$$

也都是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 內的 A_ℓ 數列, 所以

$$r_\ell(m+n)\leq r_\ell(m)+r_\ell(n), 特別是\ r_\ell(2n)\leq 2r_\ell(n)。 \tag{3}$$

尤有進著, 當 $\ell = 3$ 時會有不等式

$$r_3(2n+1) \le 2r_3(n), \tag{4}$$

這是因爲對 $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ 內的任意最長 A_3 數列, 如果它不包含 1 或 $2n+1$, 則 $r_3(2n+1) \le r_3(2n) \le 2r_3(n)$ 就得到式 (4); 否則這個 A_3 數列就不含 $n+1$, 考慮 $n+1$ 前後兩段也會得到式 (4)。利用歸納法可得:

$$\text{當 } r_3(a) \le b \text{ 時, 對 } k \ge 0 \text{ 恆有 } r_3((a+1)2^k - 1) \le b2^k。 \tag{5}$$

Erdő-Turán 的推導可以寫成一般定裡, 如下所述。

定理 2. 若 $r_3(a) \le b$、$\varepsilon > 0$、$n > \max\{a+1, b/\varepsilon\}$, 則 $r_3(n) < (\frac{b}{a+1} + \frac{b}{2a(a+1)} + \varepsilon)n$。

證明: 首先取整數 k 使得 $(a+1)2^k \le n \le (a+1)2^{k+1} - 1$, 接著再取整數 c 使得 $(a+1)2^k + a(c-1) \le n \le (a+1)2^k - 1 + ac$, 此時 $a(c-1) \le (a+1)2^{k+1} - 1 - (a+1)2^k$、而有 $2a(c-1) \le (a+1)2^k + a(c-1) - 1 < n$。所以

$$\begin{aligned} r_3(n) &\le r_3((a+1)2^k - 1 + ac) \\ &\le r_3((a+1)2^k - 1) + r_3(a)c \quad (\text{根據式 (3)}) \\ &\le b2^k + bc \quad (\text{根據式 (5)}) \\ &= \tfrac{b}{a+1}((a+1)2^k + a(c-1)) + \tfrac{b}{2a(a+1)}2a(c-1) + b \\ &< (\tfrac{b}{a+1} + \tfrac{b}{2a(a+1)} + \varepsilon)n。 \end{aligned}$$

□

可以證明 $r_3(8) \le 4$。如果 $r_3(8) \ge 5$, 考慮 $\{1, 2, \ldots, 8\}$ 內長度是 5 的 A_3 數列, 由式 (1) 可假設 $\{1, 2, 3, 4\}$ 有此數列的 3 項, 只可能是 $1, 2, 4$ 或 $1, 3, 4$; 前者迫使此數列不含 $6, 7$、也就是 $1, 2, 4, 5, 8$、含有等差級數 $2, 5, 8$, 後前者迫使此數列不含 $5, 7$、也就是 $1, 3, 4, 6, 8$、含有等差級數 $4, 6, 8$, 都不可能。所以 $r_3(8) \le 4$。利用定裡 2 得知

$$\text{當 } \varepsilon > 0 \text{ 及 } n > \max\{9, 4/\varepsilon\} \text{ 時 } r_3(n) < (\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{36} + \varepsilon)n。$$

Erdős-Turán 的文章內少了 $\frac{1}{36}$ 這一項。利用更多冗長、但未寫出來的論證, 可以得到 $r_3(23) = 9$, 因此 n 大的時候 $r_3(n) < (\frac{3}{8} + \varepsilon)n$。其實和前面一樣, 應該是 $r_3(n) < (\frac{3}{8} + \frac{3}{368} + \varepsilon)n$。他們猜想應該是

猜想 ET(3): $r_3(n) = o(n)$。

事實上, 因爲 $r_3(41) = 16$, G. Szekeres 曾經猜想 $r_3(\frac{1}{2}(3^k + 1)) = 2^k$, 這對 $k = 1, 2, 3, 4$ 都成立*。利用這等式及定裡 2, 當 $k \to \infty$ 就可以得到猜想 ET(3)。更一般來說,

*因爲 $\{u \in \mathbb{N} : u \le (3^k+1)/2$ 且 $u-1$ 的三進位表示法中各位數都不是 $2\}$ 不含長度 3 的等差級數, 所以 $r_3((3^k+1)/2) \ge 2^k$。

Szekeres 猜想對任一質數 p 會有

$$r_p\left(\frac{(p-2)p^k+1}{p-1}\right)=(p-1)^k。$$

這可以用來提供 van der Waerden 定裡的一個新的證法, 事實上可以推到 $N(k,\ell)<\ell^{c\ell\log k}$。而且, 也同樣的會有對一般 ℓ 的猜想:

猜想 ET(ℓ): $r_\ell(n)=o(n)$。

Roth 在 1953 年利用 Hardy-Littlewood 圈法證明了猜想 ET(3), 他其實是得到 $r_3(n)=O(n/\log\log n)$。Szemerédi 在 1969 年利用組合學的方法證明了猜想 ET(4); 而 Roth 則在 1972 年利用類似證明猜想 ET(3) 的方法證明了猜想 ET(4)。最後, Szemerédi 終於在 1975 年利用非常巧妙而複雜組合學的方法證明了猜想 ET(ℓ)。後來還有一些其他的證明方法, 比較重要得如: Hillel Furstenberg [1977] 利用軼論的證明、Timothy Gowers [2001] 利用傅氏分析和組合學的證明。

六、Szemerédi 1975 年的工作及其後續

我們再來把上面的描述作更詳細的說明。首先, Szemeredi 在 1975 年所證明的定理, 可以有各種不同的描述方法, 以下引用三個等價敘述。

Szemerédi **定理** (**第一版本**) : 對於任意正整數 ℓ, 若 $A_\ell(n)$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中可以找到的最多元素數其中不包長度是 ℓ 的等差級數, 則 $\lim_{n\to\infty}A_\ell(n)=0$。

Szemerédi **定理** (**第二版本**) : 若某些正整數所成的集合 A 滿足 $\limsup_{n\to\infty}|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|/n>0$, 則對於任意正整數 ℓ, 在 A 中都可以找到長度是 ℓ 的等差級數。

Szemerédi **定理** (**第三版本**) : 若某些正整數所成的集合 A 滿足、存在一個正數 r 使得對每一個正整數 m 都有正整數 $n\geq m$ 滿足 $|A\cap\{1,2,\ldots,n\}|\geq rn$, 則對於任意正整數 ℓ, 在 A 中都可以找到長度是 ℓ 的等差級數。

Szemerédi 是利用正則引理 (regularity lemma) 證明了上述定理, 後來正則引理就被視爲有用的工具、應用到其他各種不同定理的證明。

Gauss 曾經發現一個有關質數的分布、但證明困難的定理:「不超過 n 的質數的個數 $\pi(n)\sim n/\ln n$」, 也就是說, 當 n 越來越大時, 質數在 $\{1,2,\ldots,n\}$ 所佔的百分比大約是 $1/\ln n$ 就越來越小, 最後趨近於 0。這就是爲何 Szemerédi 定理不能用來證明 Green-Tao 的質數中有任意長度等差級數這個定裡的理由。

其實, Erdős-Turán 還有一個比 ET(ℓ) 更一般的猜想, 爲了區分起見, 我們把 ET(ℓ) 叫做 Erdős-Turán 弱猜想, 而較強的叫做 Erdős-Turán 強猜想。這次它把前述某些正整數所成的集合 A 想成是正整數列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$。

Erdős-Turán **強猜想**: 若正整數列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 滿足 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/a_i = \infty$, 則對於任意正整數 ℓ, 在 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中都可以找到長度是 ℓ 的等差級數。

Erdős 強猜想可以推到弱猜想。假設強猜想是對的, 要證明弱猜想, 任取一個正密度的無窮正整數集 A, 存在正整數 d 和 j 使得 $n \geq jd$ 時 $|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \geq n/d$, 特別是 $i \geq j$ 時 $|A \cap \{1, 2, \ldots, id\}| \geq i$, 所以存在 $\{a_i\}_{i \geq j}$ 其中 $a_i \in A \cap \{1, 2, \ldots, id\}$, 得知 $\sum_{i \geq j} 1/a_i \geq \sum_{i \geq j} 1/id = \infty$。由強猜想, 對於任意正整數 ℓ, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$、因而 A 中都可以找到長度是 ℓ 的等差級數。

Erdős 強猜想到現在還未被解答, Green-Tao 的定理只證明了它的一個特例, 那是因爲:

「如果 p_i 是第 i 個質數, 則 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = \infty$。」

這個事實最早由 Euler 透過無窮數列的乘積證明。無窮數列的乘積, 涉及存在性的種種要求, 比較不容易瞭解。Erdős 獨具慧眼, 他曾經給出如下的初等證明。

假設 $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = c$, 則存在一個正整數 j 使得 $\sum_{i>j} 1/p_i < 1/2$。定義 $N(x)$ 是不超過 x 且不能被任何 p_i、$i > j$、整除的正整數 n 的個數。設 $n = km^2$, k 不再含平方因子 (任何整數都可以這樣) 。由於只有 j 個質數能整除 k, k 最多只有 2^j 種選擇。又因爲 m 最多只能取 $\sqrt{x}$ 個值, 我們得到 $N(x) \leq 2^j \sqrt{x}$, 所以不超過 x 且能被某個 p_i、$i > j$、整除的正整數 n 的個數是 $x?N(x)$。因爲不超過 x 且能被 p整除的整數最多有 x/p 個, 我們得到 $x - N(x) < \sum_{i>j} x/p_i < x/2$、也就是 $x/2 < N(x) \leq 2^j \sqrt{x}$, 這是不可能的, 因爲 j 是定數、而 x 可以任意變大。所以得證。

任意長度等差級數的研究, 由 van der Waerden 一直到 Green-Tao 的工作, 這並不是一個結束, 而是一個開始。這個開始, 展現了這群聰慧的數學家、將數學的各個領域融於一爐的本領, 也提醒人們、數學一體不可割分的本質。在這過程中, 最值得人們借鏡的是, 像 van der Waerden 那樣, 不把成就集於自身的風範。

参考文獻

1. P. Erdős and P. Turán, On some sequences of integers, *J. London Math. Soc.*, 11, 261-264, 1936.
2. R. L. Graham, *Rudiments of Ramset Theory*, CBMS Regiongal Conf. Series in Math., Number 45, AMS, Rhode Island, 1979.

3. R. L. Graham and B. L. Rothschild, A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 42, 385-386, 1974.
4. A. Hales and R. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106, 222-229, 1963.
5. K. F. Roth, On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.*, 28, 104-109, 1953.
6. K. F. Roth, Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions, IV, *Periodica Math. Hungar.*, 2, 301-326, 1972.
7. I. Schur, Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 25, 114-116, 1916.
8. I. Schur, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer-Verlag, 1973.
9. E. Szemerédi, On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 20, 89-104, 1969.
10. E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arithmetica*, 27, 199-245, 1975.
11. B. L. van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw. Arch. Wisk.*, 15, 212-216, 1927.
12. B. L. van der Waerden, How the proof of Baudet's conjecture was found, *Studies in Pure Mathematics (Presented to Richard Rado)*, Academic Press, London, 251-260, 1971.

—本文作者任教國立台灣大學數學系—