數學傳播 40卷3期, pp. 85-96

20世紀中葉前西方解析幾何教科書中的「點到直線距離公式」*

楊懿荔 · 汪曉勤

「點到直線的距離公式」是高中解析幾何的重要知識點, 不同教科書所給出的推導方法互有不同。滬教版教科書首先求出已知點及其在已知直線上的射影所確定的向量, 利用該向量與已知直線的法向量平行, 求得點到直線的距離。人教版教科書則給出兩種推導方法: 方法一爲求出過已知點並與已知直線垂直的直線方程, 進而求出該直線與已知直線的交點座標, 最後求出已知點與該交點之間的距離; 方法二爲過已知點分別作 x 軸和 y 軸的平行線, 利用直角三角形面積公式求得點到直線的距離。

那麼, 歷史上還有哪些不同的推導方法? 這些方法對我們今天的教科書編寫和課堂教學有何啟示? 爲了回答上述問題, 我們對 19 世紀初到 20 世紀中葉之前出版的 65 種西方解析幾何教科書 (限於篇幅, 參考文獻中沒有全部列出) 進行考察。

在 65 種早期解析幾何教科書中, 我們找到了距離公式的8種不同推導方法 : 交點法、原點距離法、投影法、三角法、三角形面積法、座標平移法、向量法、最值法。早期教科書大多採用了「有向距離」概念, 有些根據已知點和原點是否位於直線同側來確定距離的正負, 有些則根據已知點位於直線的上方或下方來確定距離的正負。爲統一起見, 我們採用今天的非負距離概念對各種方法進行整理。此外, 本文只考慮已知直線與坐標軸不平行的一般情形。

1. 點到直線距離公式的推導

1.1. 交點法[1]

設直線 l 的方程爲 $Ax+By+C=0$ $(AB\neq 0)$, 要求點 $P(x_0,y_0)$ 到 l 的距離。如圖 1 所示, 過 P 作 l 的垂線 l', 垂足爲 $R(x_1,y_1)$, 則 l' 的方程爲

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0) \tag{1}$$

*人教社課程與教材研究所十二五規劃課題「數學史融入高中數學教材研究」(課題批准號:KC2014–010) 系列論文之一。

聯立 l 與 l' 的方程, 解得:

$$x_1=\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\qquad y_1=-\frac{ABx_0-A^2y_0+BC}{A^2+B^2}$$

利用兩點間距離公式, 得

$$d=\sqrt{\Big(x_0-\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}\Big)^2+\Big(y_0+\frac{ABx_0-A^2y_0+BC}{A^2+B^2}\Big)^2}$$

整理得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{2}$$

此法爲人教版教科書的推導方法之一。

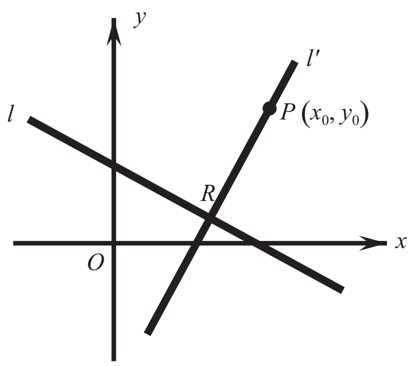

圖1. 交點法

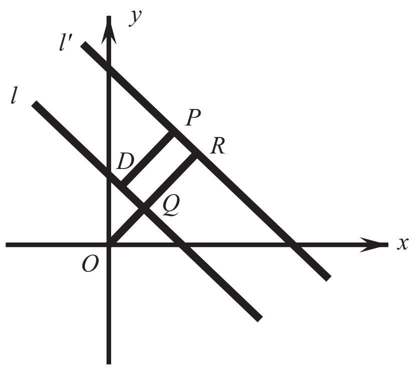

圖2. 原點距離法

但絕大多數教科書都對上述推導方法作了一定的簡化。將 l 的方程寫成:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C) \tag{3}$$

聯立方程 (1) 和 (3) , 解出 $x-x_0$ 和 $y-y_0$, 利用兩點之間距離公式即得[2, 3, 4]。或者, 因點 R 同時位於 l 和 l' 上, 故得[5]

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=-(Ax_0+By_0+C) \tag{4}$$

$$B(x_1-x_0)-A(y_1-y_0)=0 \tag{5}$$

(4) 和 (5) 兩邊各平方, 相加, 即得公式 (2)。

或者將 (1) 寫成

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B} \tag{6}$$

並設比例常數爲 λ, 將 $x = x_0 + \lambda A$, $y = y_0 + \lambda B$ 代入 l 的方程, 解得 λ, 再利用兩點之間距離公式得 $d = \sqrt{A^2 + B^2}|\lambda|$。

交點法對於初學者而言, 是最直接、最通俗易懂的, 其基本思想即爲將點到直線的距離轉化爲兩點之間的距離。但計算量略大。

1.2. 原點距離法[6]

如圖 2 所示, 設直線 l 的方程爲

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0,$$

其中 p 爲原點到 l 的距離, α 爲過原點且垂直於 l 的直線與 x 軸正方向之間的夾角, 其範圍爲 $[0, 2\pi)$。

此方程稱之爲直線的法線式 (normal equation)。法線式已淡出當今的教科書, 但在 20 世紀中葉之前, 法線式在西方教科書中的活躍程度不亞于直線方程其餘的任何形式。其推導方式頗多, 以其典型推導方法爲例: 如圖 3 所示, 作 $AB \,/\!/\, l$, $PT \,/\!/\, OD$, $PA \perp x$ 軸。又知 $\angle AOB = \alpha$, $OD = p$。由圖得: $OB + TP = OD$, 而 $OB = OA \times \cos\angle AOB = x\cos\alpha$, $TP = AP \times \sin\angle TAP = y \sin\alpha$, 代入即得: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$。

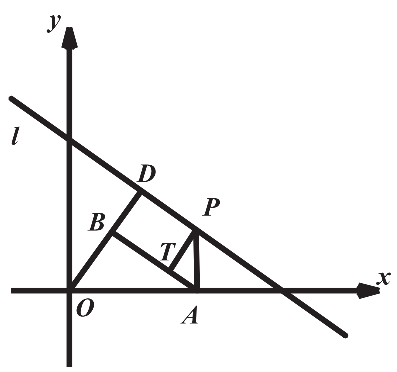

圖3. 法線式的來源

依圖 2 所示, 給定點 $P(x_0, y_0)$, 過 P 作 l 的垂線, 垂足爲 D, 令 $PD = d$, 過 P 作 l 的平行線 l'。過 O 作 l' 的垂線, 垂足爲 R, 交 l 於 Q。設 $OR = p'$, 則直線 l' 的方程爲 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p' = 0$。因點 P 在 l' 上, 故有

$$p' = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha.$$

因此所求距離爲

$$d = |p' - p| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|. \tag{7}$$

若給定直線方程爲一般式 $Ax+By+C=0$, 可將一般式轉換爲法線式, 轉換方法如下: 觀察可知, 法線式中 x, y 係數的平方和爲一個正單位, 因爲 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$。令 R 爲由一般式轉換至法線式的因數, 且 R 滿足 $(R\cdot A)^2+(R\cdot B)^2=1$, 即 $R=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$。在 $Ax+By+C=0$ 的兩邊同時乘以 R, 則得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\qquad (C<0)$$

或

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{-C}{-\sqrt{A^2+B^2}}\qquad (C>0)$$

令

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\qquad p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因此, 轉換成一般式後, 即得距離公式 (2)。

相較於交點法, 原點距離法的運算量大幅度縮減, 這得益於法線式的應用。法線式的已知條件中已有原點到直線距離的概念, 將任意點到直線的距離轉化兩條平行直線間的距離, 而原點到直線的距離一目了然, 作差即得兩平行線間距。

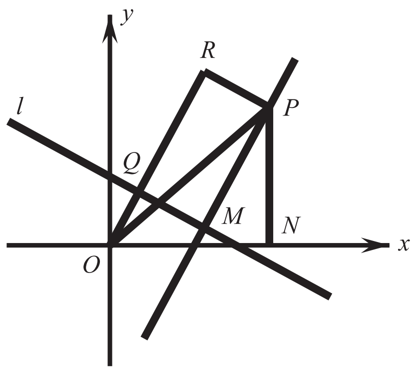

圖4. 投影法

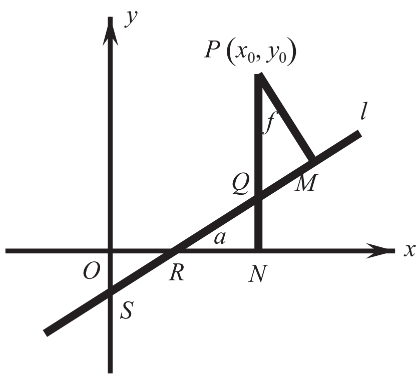

圖5. 三角法之一和二

1.3. 投影法[7]

如圖 4, 設已知點 $P(x_0, y_0)$, 直線 l 的方程爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$。過原點作 l 的垂線 OR, 過 P 分別作 x 軸、直線 l 和 OR 的垂線, 垂足分別爲 N、M 和 R。根據向量的投影長性質 — 兩個向量在軸上的投影長之和等於它們的和在軸上的投影長, 可得

$$\mathrm{Proj}_{OR}\overrightarrow{ON}+\mathrm{Proj}_{OR}\overrightarrow{NP}=\mathrm{Proj}_{OR}\overrightarrow{OP}=OR.$$

其中 $\mathrm{Proj}_{OR}\overrightarrow{ON}$ 表示向量 $\overrightarrow{ON}$ 在 OR 上的投影長。

因 $OR = OQ + QR = p + d$, $\text{Proj}_{OR}\overrightarrow{ON} = x_0 \cos\alpha$, $\text{Proj}_{OR}\overrightarrow{NP} = y_0 \sin\alpha$。故有 $p + d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha$, 故得距離公式 (7)。

投影法的主要思想是將所有向量轉化到有向距離的方向, 再配合法線式的應用。可見, 法線式在投影法中也起到了至關重要的作用。

1.4. 三角法之一[8]

設直線 l 的方程爲 $Ax + By + C = 0$ $(AB \neq 0)$, 要求點 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距離。如圖 5, 過點 P 分別作 l 和 x 軸的垂線, 垂足分別爲 M 和 N, PN 與 l 交於 Q。設點 Q 的縱坐標爲 y_Q, 因 Q 在 l 上, 故 $Ax_0 + By_Q + C = 0$, 於是得 $y_Q = -\dfrac{Ax_0 + C}{B}$。設 l 的傾斜角爲 α, $\angle MPQ = \varphi$, 則 $\varphi = \alpha$ $(0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ 或 $\pi - \alpha$ $(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$。因 $\tan\alpha = -\dfrac{A}{B}$, 故 $\tan\varphi = \left|\dfrac{A}{B}\right|$, $\cos\varphi = \left|\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$。於是有

$$PM = PQ \times \cos\varphi = |y_0 - y_Q| \cos\varphi = \left|y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B}\right| \cos\varphi$$

故得

$$d = \left|y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B}\right| \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

也有教科書直接利用三角形相似性來推導距離公式[9]。如圖 5, 因 $Rt\triangle PMQ$ 與 $Rt\triangle ROS$ 相似, 故 $\dfrac{PM}{PQ} = \dfrac{OR}{RS}$, 其中 $OR = \left|\dfrac{C}{A}\right|$, $RS = \left|\dfrac{C}{AB}\right|\sqrt{A^2 + B^2}$, 於是有

$$d = PM = \frac{OR}{RS} \times PQ = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \times \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.5. 三角法之二[10]

仍如圖 5, 設點 M 的座標爲 (x_1, y_1), 則

$$x_1 = x_0 \pm d \sin\alpha, \qquad y_1 = y_0 \mp d \cos\alpha,$$

其中的加減號取決於 $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$。代入直線 l 的方程得

$$\pm d(A \sin\alpha - B \cos\alpha) = -(Ax_0 + By_0 + C) \tag{8}$$

但由 $\tan\alpha = -\dfrac{A}{B}$ 得

$$d(B \sin\alpha + A \cos\alpha) = 0 \tag{9}$$

(8) 和 (9) 兩邊各平方, 相加得

$$d^2(A^2+B^2)=(Ax_0+By_0+C)^2 \tag{10}$$

故得公式 (2)。

1.6. 三角法之三[11]

直線 l 和點 P 同上。如圖 6, 過點 P 作 l 的垂線, 垂足爲 M, 又作 x 軸的平行線, 交 l 於 Q。設點 Q 的橫坐標爲 x_Q, 因 Q 在 l 上, 故 $Ax_Q+By_0+C=0$, 於是得 $x_Q=\dfrac{By_0+C}{A}$。設 l 的傾斜角爲 α, $\angle PQM=\varphi$, 則 $\varphi=\alpha$ $(0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ 或 $\pi-\alpha$ $(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$, 且 $\sin\varphi=\dfrac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。故得

$$PM=d=PQ\times\sin\varphi=|x_0-x_Q|\sin\varphi=\left|x_0+\frac{By_0+C}{A}\right|\sin\varphi=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

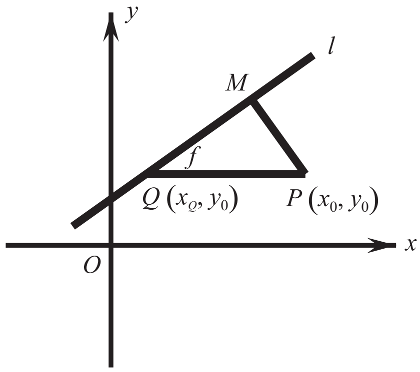

圖 6. 三角法之三

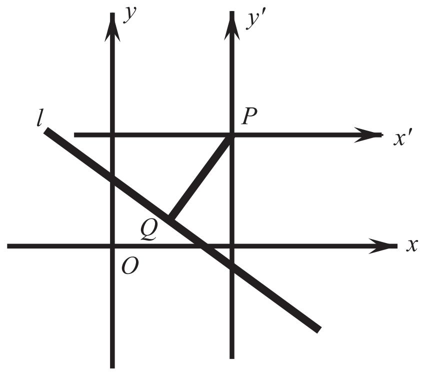

圖 7. 座標平移法

三角法之一與之三是相似的推導過程。均從三角形入手, 將點到直線的距離看做三角形的一邊, 另一邊落在已知直線上, 而第三邊則取與坐標軸平行的線段。此法可利用傾斜角的三角比, 將求任意線段的問題轉換爲求與坐標軸平行的線段問題。

1.7. 座標平移法

有兩種情形, 一是由直線的一般方程入手, 二是從標準方程入手。

(1) 基於一般方程[12]

要求 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $l: Ax+By+C=0$ $(AB\neq 0)$ 的距離。如圖 7, 以 P 爲原點建立新的坐標系 $PX'Y'$。設 l 上一點在新、舊坐標系下的座標分別爲 (x', y') 和 (x, y), 則有 $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$。代入直線方程得:

$$A(x_0+x')+B(y_0+y')+C=0,$$

即

$$Ax'+By'+Ax_0+By_0+C=0.$$

化成法線式, 即爲

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x'+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y'+\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

故得距離公式 (2)。

(2) 基於法線式方程[13]

設直線方程爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$。類似建立新坐標系, 並設 l 上一點在新、舊坐標系下的座標分別爲 (x', y') 和 (x, y), 則有

$$(x_0+x')\cos\alpha+(y_0+y')\sin\alpha=p,$$

即

$$x'\cos\alpha+y'\sin\alpha=p-x_0\cos\alpha-y_0\sin\alpha,$$

故得距離公式 (7)。

座標平移法與直線的法線式密不可分。在法線式方程的表達形式中, p 表示原點到直線的距離。通過座標平移, 可把已知點平移到原點, 利用法線式中 p 的幾何意義即得。

1.8. 三角形面積法[14]

仍設直線 l 的方程爲 $Ax+By+C=0$ $(AB\neq 0)$, 要求點 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距離。如圖 8, l 與 x 軸和 y 軸的交點分別爲 $M\Big(-\dfrac{C}{A}, 0\Big)$ 和 $N\Big(0, -\dfrac{C}{B}\Big)$, 則有

$$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1\\ -\dfrac{C}{A} & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{C}{B} & 1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\Big|\frac{C}{B}x_0+\frac{C}{A}y_0+\frac{C^2}{AB}\Big|=\frac{1}{2}\Big|\frac{C(Ax_0+By_0+C)}{AB}\Big|$$

因 $S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}MN\times d$, 而

$$MN=\sqrt{\Big(\frac{C}{A}\Big)^2+\Big(-\frac{C}{B}\Big)^2}=\Big|\frac{C}{AB}\Big|\sqrt{A^2+B^2}$$

故得距離公式 (2)。

面積法直觀易懂, 利用了三角形面積兩種不同的求法 — 行列式法以及一般法 ($S=\frac{1}{2}\cdot$ 底 $\cdot$ 高) 得到關於距離的方程, 即得。

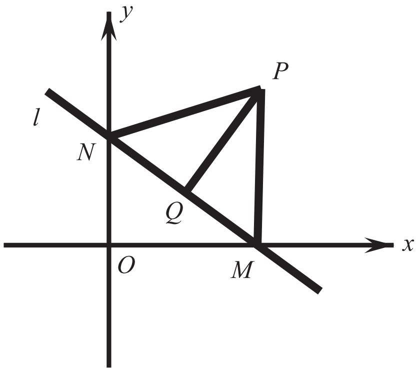

圖 8. 三角形面積法

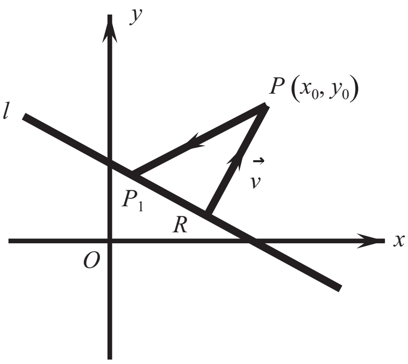

圖 9. 向量法

1.9. 向量法[15]

如圖 9, 設直線 l 的方程爲 $Ax+By+C=0$ $(AB\neq 0)$, 可知其法向量爲 $\vec{v}=(A,B)$, 給定不在 l 上的點 , 要求 P 到 l 的距離。任取 l 上一點 $P_1(x,y)$, 則 $\overrightarrow{PP_1}=(x-x_0,y-y_0)$。因 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}=|\vec{v}||\overrightarrow{PP_1}|\cos\theta$, 故得點到直線的距離爲

$$d=|\overrightarrow{PP_1}||\cos\theta|=\frac{|\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}|}{|\vec{v}|} \tag{11}$$

(11) 與公式 (2) 等價。此法即爲現行滬教版教材中的方法。

向量法的運用建立于向量的數量積。P 到 l 的距離即爲 $\overrightarrow{PP_1}$ 在法向量 $\vec{v}$ 方向上的投影長, 根據向量的數量積公式 $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$, 稍作轉換即得 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影長公式:

$$|\vec{a}|\cdot\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

1.10. 最値法[16]

設直線 l 的方程爲 $Ax+By+C=0$, 給定點 $P(x_0,y_0)$, 直線上任一點爲 (x,y)。將直線方程變形爲

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C)$$

點 P 到直線 l 的距離 d 即爲 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的最小值。利用柯西不等式:

$$(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

即得

$$|A(x-x_0)+B(y-y_0)| \le \sqrt{A^2+B^2}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

因此有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \ge \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

故得距離公式 (2)。

柯西不等式是最值法的重要工具。最值法的思想類似於交點法, 將點到直線的距離轉換爲求兩點間距離的最小值。由兩點間距離公式聯想到柯西不等式, 從而由直線方程的變形入手。

2. 各種方法的分佈

圖 10 給出了各種方法的分佈情況。少數教科書同時採用了兩種不同的推導方法。

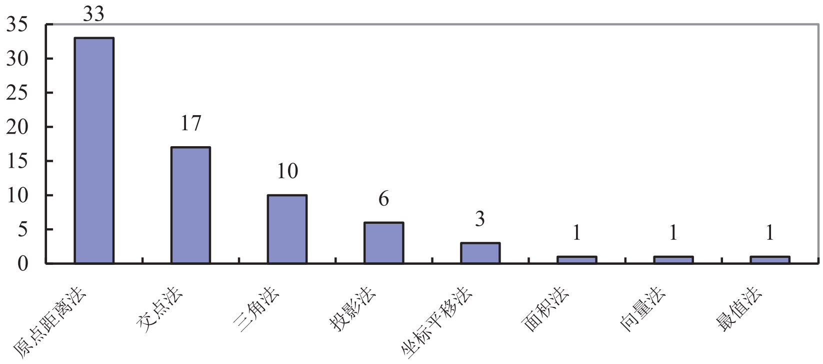

圖 10. 各種方法的分佈情況

圖11給出了各種方法在不同時期的分佈情況。

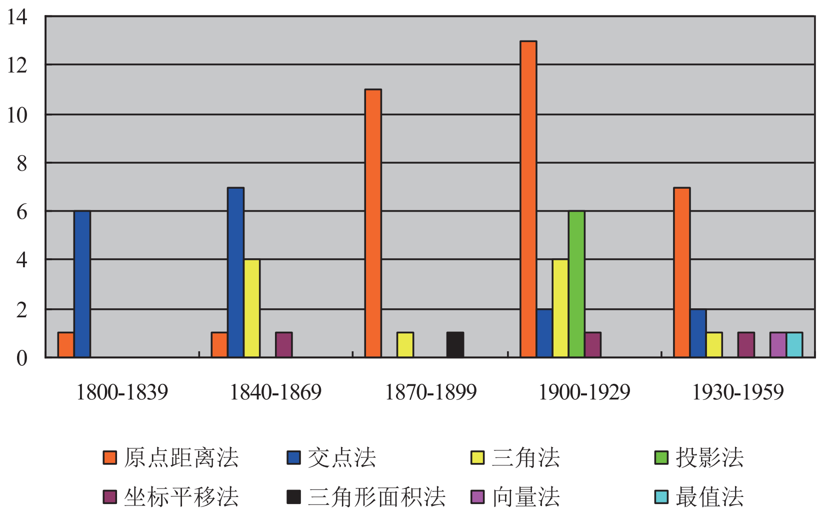

圖 11. 各種方法的年代分佈

由圖 10−11 可知, 19 世紀上半葉之前的解析幾何教科書 (特別是法國的教科書) 主要採用交點法來推導點到直線距離公式。這是一種十分清晰、自然的方法, 並且教科書作者們通過簡化, 減少了其中的計算量。1870 年代之後, 由於直線的法線式方程中已包含參數 p, 表示原點到直線的距離, 因此原點距離法幾乎一統天下。投影法實際上與原點距離法一致。。均建立在法線式方程的基礎之上。座標平移法雖然比較巧妙, 但由於很多教科書並不涉及座標變換知識, 因而用得並不多。

在給定一般方程的情況下, 三角法的使用頻率僅次於交點法。三角形面積法因爲需要用到三角形面積的三階行列式運算式, 因而採用者很少。最值法則涉及二元函數, 且柯西不等式在早期教教科書中也不常用, 因而也很少被採用。

向量在教科書中的普遍使用, 出現在1940年代前後, 向量法也就是此時出現的, 與原點距離法、交點法和三角法相比, 這種方法不夠切合學生的認知基礎。

3. 若干啓示

西方早期解析幾何教科書爲我們呈現了「點到直線距離公式」豐富多彩的推導方法。綜合上述方法, 並將其與現行教科書中的方法對比, 得到如下啟示:

(1) 從歷史上看, 人們最容易想到、且早普遍使用的是交點法。歷史是一面鏡子, 這種方法依然適合於今日的課堂教學, 當然, 需要對其進行簡化, 即將 $x-x_0$, $y-y_0$ 看作未知數。三角法利用直角三角形的邊角關係以及有關三角公式, 直觀而簡易, 有一定的優勢, 在歷史上頗受人們的喜愛, 因而也完全可以運用於今日的教學之中。向量法出現得很遲, 遠遠滯後于向量概念本身, 可知不易想到, 由於缺乏幾何、代數或三角方面的知識基礎, 這種方法也易於遺忘。至少, 我們在運用該方法的同時, 也有必要介紹其他方法, 以加深學生的理解和記憶。

(2) 基於法線式方程的原點距離法因爲特別簡便而受到早期教科書作者們的青睞, 但由於今日教科書並不涉及法線式方程, 故該方法已無法搬用。不過, 我們完全可以對其進行改編。設點 P 的座標和直線 l 的方程如前。如圖 12, 過 P 作 l 的平行線 l', 交 x 軸於 T, 過原點 O 作 l 的垂線, 垂足爲 Q, 交 PT 於 R。直線 l 與坐標軸的交點 M、N 的座標爲 $M\Big(-\frac{C}{A},0\Big)$, $N\Big(0,-\frac{C}{B}\Big)$, 故得 $|OM|=\Big|\frac{C}{A}\Big|$, $|ON|=\Big|\frac{C}{B}\Big|$, $|MN|=\Big|\frac{C}{AB}\Big|\sqrt{A^2+B^2}$, 故有

$$|OQ|=\frac{|-C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{12}$$

此即原點到直線 l 的距離。

因直線 l' 的方程爲 $Ax+By=Ax_0+By_0$, 根據 (12) 可知, $|OR|=\dfrac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。因此 $|QR|=|OR|-|OQ|$, 即得距離公式 (2)。

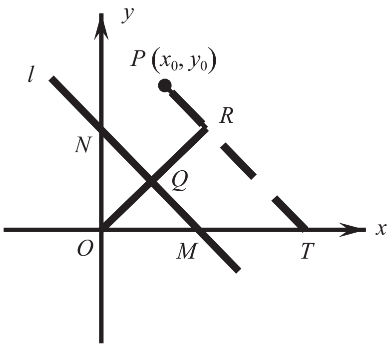

圖 12.

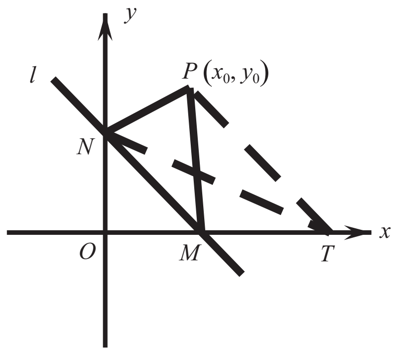

圖 13.

(3) 三角形面積法採用三階行列式來表達三角形面積, 對於未涉及行列式的教材而言, 此法需要一定的改編。如圖13, 仍過點 P 作 l 的平行線交 x 軸於 T, 則

$$S_{\triangle PMN}=S_{\triangle TMN}=\frac{1}{2}MT\times ON=\frac{1}{2}\times\left|\frac{C}{B}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{C(Ax_0+By_0+C)}{AB}\right|$$

當然, 也可以用多種其他方法來求 $\triangle PMN$ 的面積。

(4) 最值法採用了柯西不等式, 而有部分高中生並未接觸過該不等式。對於這些學生, 可按照最值法的思想, 建立在學生認知基礎上求最值。設直線上任一點爲 (x, y), 它與點 P 之間的距離 $d(x)$ 滿足

$$\begin{aligned}d^2(x)&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x-x_0)^2+\left[\frac{A(x-x_0)+(Ax_0+By_0+C)}{B}\right]^2\\&=\frac{A^2+B^2}{B^2}(x-x_0)^2+\frac{2A(Ax_0+By_0+C)}{B^2}(x-x_0)+\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{B^2}\\&=\frac{A^2+B^2}{B^2}\left[(x-x_0)+\frac{A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right]^2+\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}\end{aligned}$$

易見, $d^2(x)$ 的最小值爲 $\dfrac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$, 故得距離公式 (2)。

(5) 歷史上點到直線距離公式的推導方法豐富多彩, 反映了數學思維的多元性和靈活性以及不同知識領域之間的密切聯繫。在課堂上運用多種方法來推導該公式, 可以拓寬學生的思維, 爲他們創造綜合運用各種已學知識的機會, 並激發他們的好奇心和進一步探究的興趣; 學生從中收穫的將不僅僅是一個公式, 還有其背後豐富多彩的思想方法。

同時, 我們也應該看到, 教科書上的方法未必是最佳方法, 我們完全可以對其進行改進, 使其更符合學生的認知基礎。

參考文獻

1. E. J. Purcell, *Analytic Geometry* [M], New York: Appleton-Centruy-Crofts, 1958. 51-54.
2. F. Lefrancois, *Essais de Géométrie Analytique* [M], A Paris: Chez Courcier. 1804. 13-15.
3. J. R. Young, *The Elements of Analytical Geometry* [M], London: John Souter, 1830. 28-29.
4. P. L. Cirodde, *Leçons de Géométrie Analytique*, Paris: L. Hachette et Cie, 1848. 202-206
5. G. A. Gibson and P. Pinkerton, *Elements of Analytical Geometry* [M], London: Macmillan & Co., 1919. 53-54.
6. A. S. Hardy, *Elements of Analytic Geometry* [M], Boston: Ginn & Company, 1891. 55-56.
7. A. M. Harding and G. W. Mullins, *Analytic Geometry* [M], New York: The Macmillan Company, 1926. 90-92.
8. E. Loomis, *The Elements of Analytical Geometry* [M], New York: Harper & Brothers, 1877. 57-58.
9. B. H. Crenshaw and C. D. Killbrew, *Analytic Geometry and Calculus* [M], New York: P. Blakiston's Son & Co, 1925. 21-23.
10. M. O'Brien, *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry* [M], Cambridge: Deightons, 1844. 27-28.
11. J. W. Cell, *Analytic Geometry* [M], New York: John Wiley & Sons, 1951. 42-44.
12. N. C. Riggs, *Analytic geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911. 83-85.
13. L. M. Kells and H. C. Stotz, *Analytic Geometry* [M], New York: Prentice-Hall, 1949. 68-69.
14. W. J. Johnston, *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M], Oxford: The Clarendon Press, 1893. 70-71.
15. F. D. Murnaghan, *Analytic Geometry* [M], New York: Prentice-Hall, 1946. 85-86.
16. A. E. Taylor, *Calculus, with Analytic Geometry* [M], New Jersey: Prentice-Hall, 1959.

—本文作者任教華東師範大學數學系—