數學傳播　40卷3期, pp. 78-82

黃金比與黑洞數

鄰黎明

一、黑洞數的概念

一個整數的數位的最大排序與它的最小排序之差, 重複操作, 最後是一個數迴圈或者一個數鏈迴圈, 我們把最後是一個數或者一個迴圈數鏈稱爲黑洞圈 (cycle), 也叫陷阱數或者黑洞數。

印度數學家首先證明四位數的單黑洞圈是 6174 (1-cycle), 楊之老師在文 [1] 一書中介紹了黑洞數問題, 文中提出如何具體構造黑洞數以及黑洞圈的長度 (個數)。

有沒有尋找構造黑洞數的簡易方法, 即使找不到構造黑洞數直接的方法, 能不能找到一個最接近黑洞圈的數, 它的下一個數就是黑洞數或者是黑洞圈, 我們把這個數定義爲准黑洞數, 或者能不能找到一個很接近黑洞數的數, 這個數下一個運算結果是準黑洞數, 我們定義爲黑洞友好數。

二、主要結果

究竟如何發現這樣構造的, 我們看四位數的單圈黑洞圈是6174; 五位數的黑洞數是黑洞圈 53955 $\rightarrow$ 59994, 74943 $\rightarrow$ 62964 $\rightarrow$ 71973 $\rightarrow$ 83952, 63954 $\rightarrow$ 61974 $\rightarrow$ 82962 $\rightarrow$ 75933; 六位數的黑洞圈是 631764, 549945; 七位數是黑洞圈 7419753 $\rightarrow$ 8429652 $\rightarrow$ 7619733 $\rightarrow$ 8439552 $\rightarrow$ 7509843 $\rightarrow$ 9529641 $\rightarrow$ 8719722 $\rightarrow$ 8649432 $\rightarrow$ 7519752 $\rightarrow$ 8629632 $\rightarrow$ 7629633 $\rightarrow$ 7429653 $\rightarrow$ 7419753, 是十三圈; 八位數是 97508421, 63317664; 九位數是 864197532, 十位數是 6333176664; 十一位數是 86431976532 單圈黑洞圈、還有 “76320987633 $\rightarrow$ 96442965531 $\rightarrow$ 87320987622 $\rightarrow$ 96653954331 $\rightarrow$ 86330986632 $\rightarrow$ 96532966431 $\rightarrow$ 87331976622 $\rightarrow$ 86542965432 $\rightarrow$ 76320987633” 黑洞圈是一個 8-cycle; 十二位數是 975550844421 $\rightarrow$ 975110888421 $\rightarrow$ 977750842221 $\rightarrow$ 975550844421; 十三位數是 8643319766532, 十四位數是 63333317666664; 十五位數是 864333197666532

思考: 從上面的 6174, 61974, 631764, 63317664, 633317664, 是兩位數黑洞數中取得 “63”、“9” 與 “6174” 進行搭配, 於是定理 1 就發現了。

於是我們想到用 6174 與“36”、“9”搭配, 發現了定理 1。

定理1: n 爲大於等於 2 的整數, 則:

$6174\underbrace{3636\cdots36}_{n\text{個}36}$ 爲 $2n+4$位準黑洞數; $6\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}17\underbrace{66\cdots6}_{n\text{個}6}$ 爲 $2n+4$ 位的一個單圈黑洞圈;

$61749\underbrace{3636\cdots36}_{n\text{個}36}$ 爲 $2n+5$ 位的一個黑洞友好數;

$864\underbrace{33\cdots3}_{n-2\text{個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{n\text{個}6}532$ 爲 $2n+5$ 位的一個單圈黑洞圈。

證明: $2n+4(n\geq 2)$ 位數, $6174\underbrace{3636\cdots36}_{n\text{個}36}$

$$7\underbrace{66\cdots6}_{n+1\text{個}6}4\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}1-1\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}4\underbrace{66\cdots6}_{n+1\text{個}6}7=6\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}17\underbrace{66\cdots6}_{n\text{個}6}4$$

對於 $2n+5(n\geq 2)$ 位數,

$$\begin{aligned}
&61749\underbrace{3636\cdots36}_{n\text{個}36}, 97\underbrace{66\cdots6}_{n+1\text{個}6}4\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}1-1\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}3}4\underbrace{66\cdots6}_{n+1\text{個}6}79\\
&=84\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{個}6}52, 987\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{個}6}54\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{個}3}21-12\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{個}3}45\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{個}6}789\\
&=864\underbrace{33\cdots3}_{n-2\text{個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{n-2\text{個}6}532\\
&987\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{個}6}54\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{個}3}21-12\underbrace{33\cdots3}_{n-1\text{個}3}45\underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{個}6}789\\
&=864\underbrace{33\cdots3}_{n-2\text{個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{n-2\text{個}6}532
\end{aligned}$$

例如: 五十位數的單圈黑洞圈: $6\underbrace{33\cdots3}_{23\text{個}3}17\underbrace{66\cdots6}_{23\text{個}6}4$

一百零五位數的單圈黑洞圈:$864\underbrace{33\cdots3}_{48\text{個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{48\text{個}6}532$

一億零四位數的單圈黑洞圈:$6\underbrace{33\cdots3}_{\text{五千萬個}3}17\underbrace{66\cdots6}_{\text{五千萬個}6}4$

一億零九位數的單圈黑洞圈:$864\underbrace{33\cdots3}_{\text{五千萬個}3}197\underbrace{66\cdots6}_{\text{五千萬個}6}532$

構造產生的根源, 我們尋找母數, 從低位數的黑洞數進行拼湊, “$27\to 45\to 9\to 81\to 63\to 27$”

例如, $3n$ 位數, $\underbrace{44\cdots4}_{n個4}\underbrace{55\cdots5}_{n個5}\underbrace{99\cdots9}_{n個9}$ 準黑洞數。

證明: $\underbrace{99\cdots9}_{n個9}\underbrace{55\cdots5}_{n個5}\underbrace{44\cdots4}_{n個4}-\underbrace{44\cdots4}_{n個4}\underbrace{55\cdots5}_{n個5}\underbrace{99\cdots9}_{n個9}$

$\underbrace{55\cdots5}_{n-1個5}4\underbrace{99\cdots9}_{n個9}\underbrace{44\cdots4}_{n-1個4}5$

定理 2, $3n$ 位數, $\underbrace{55\cdots5}_{n-1個5}4\underbrace{99\cdots9}_{n個9}\underbrace{44\cdots4}_{n-1個4}5$ 是黑洞數。

三、黃金比與黑洞圈

我們在尋找黑洞圈中, 考慮長度問題發現與黃金分割中的黃金比有聯繫, 我們從一些資料中看到了規律。

四位數中總共有 9999 個, 一般來說, 若把 0看作 “0000”, 0000 明顯是黑洞圈, 而且是單圈黑洞圈 (1-cycle), 而 “1111、2222、...、9999” 這九個數皆是准黑洞數。而 6174 也是單圈黑洞圈。五位數中, 有三個黑洞圈, 其中 00000 是單圈, 53955 是雙圈 (2-cycle), 74943是四圈 (4-cycle), 61974 也是四圈。我們觀察上面的結果, 考慮 9990 個四位數, 我們發現

$$9990\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=9990\times 0.618033988\cdots=6174.159548\cdots\approx 6174$$

這是巧合還是隱含著某種規律; 於是我們進行研究, 經過大量工作, 我們找到了規律。

(1) 三位數, 611, $611-116=495$, $954-459=495$, 所以 495 是三位數的黑洞數, 611 是準黑洞數, $990\times 0.618\approx 611$。$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\times 990\approx 378$, $873-378=495$, 378 是準黑洞數。

(2) 五位數, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times 99990\approx 61794$

$$61794\to 82962\to 75933\to 63954\to 61974$$

61974 是黑洞圈; $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\times 99990\approx 38192.78$

$$38192\to 85932\to 74943\to 62964\to 71973\to 83952\to 74943$$

38192 是黑洞友好數。

$$38193\to 84942\to 73953\to 63954\to 61974\to 82962\to 75933\to 63954,$$

第 3 步進入黑洞圈。

(3) 六位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \times 999990 \approx 381962$

$$381962 \to 862632 \to 642654 \to 420876 \to 851742 \to 750843 \to 840852 \\ \to 860832 \to 862632$$

381962是準黑洞數。

(4) 七位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \times 9999990 \approx 3819656$

$$3819656 \to 8509842 \to 9639531 \to 8629632 \to 7629633 \to 7429653 \to 7419753 \\ \to 8429652 \to 7169732 \to 8539542 \to 7509843 \to 9840852 \to 9639531$$

3819656是黑洞友好數。

(5) 八位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \times 99999990 \approx 38196597$

$$38196597 \to 86308632 \to 86326632 \to 64326654 \to 43208766 \to 85317642 \\ \to 75308643 \to 84308652 \to 86308632$$

38196597是準黑洞數。.

(6) 九位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 \times 999999990 \approx 236067975.14$, 如果取過剩近似值 $236067976 \to 953999541 \to 865395432 \to 763197633 \to 844296552 \to 762098733 \to 964395531 \to 863098632 \to 965296431 \to 873197622 \to 865395432 \to 753098643 \to 954197541 \to 883098612 \to 976494321 \to 874197522 \to 865296432$, 也就是 236067976 是黑洞友好數。

(7) 十位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 \times 9999999990 \approx 2360679772$

$2360679773 \to 9543995541 \to 8650998432 \to 9754085421 \to 9751088421 \to 9775084221 \to 9755084421 \to 9751088421$, 第 4 步進入黑洞圈; $2360679772 \to 9553995441 \to 8650998432 \to 9754085421$——, 第4步進入黑洞圈。

但是, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 \times 9999999990 \approx 1458980336.0447$

$1458980336 \to 9753086421 \to 9753086421$, 1458980336 是準黑洞數。

$1458980337 \to 9754085421 \to 9751088421 \to 9775084221 \to 9755084421 \to 9751088421$, 145898033747 是黑洞友好數。

(8) 十一位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 \times 99999999990 \approx 14589803373.57$

$14589803374 \to 97540985421 \to 98630986311 \to 98752964211 \to 88651974312 \to$

$87641975322 \to 8654975432 \to 86420987532 \to 96641975331 \to 88431976512 \to$ 87641975322, 第 5 步進入黑洞圈;

$14589803373 \to 97541975421 \to 88530986412 \to 97651975412 \to 97651974321 \to$ $88541975412 \to 87630986322 \to 96642965331 \to 87331976622 \to 86542965432 \to$ $76320987633 \to 96442965531 \to 87320987622 \to 86330986632 \to 96532966431 \to$ 87331976622, 第 7 步進入黑洞圈。

$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 \times 9999999990 \approx 23606797747.6183$, 通過檢驗 23606797748 也是第 7 步進入黑洞圈;

(9) 十二位數, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 \times 999999999990 \approx 145898033748$

$145898033748 \to 975530864421 \to 975310886421 \to 977530864221 \to 975530864421$, 145898033748 是準黑洞數。

於是, 我們提出猜想:

$(10^{3n}-10)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ 四捨五入得到的整數或者過剩近似值整數中有 $3n$ 位的一個準黑洞數; $(10^{3n+1}-10)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ 四捨五入得到的整數或者過剩近似值整數中有 $3n+1$ 位的單黑洞圈或者黑洞友好數; $(10^{3n+2}-10)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$ 四捨五入得到的整數或者過剩近似值整數中有 $3n+2$ 位的准黑洞數或者不超過 7 步進入黑洞圈。

我們知道位數比較大的話, 通過有限次運算就能夠進入黑洞圈, 這也是比較有意思的工作, 因此, 我們通過乘以黃金比前後的數位前後找, 爲黑洞圈研究提供一種想法, 有興趣的同行可以進一步研究。

參考文獻

1. 楊之。初等數學研究的問題與課題。湖南教育出版社, 第1版, 28-35, 1993.5。

—本文作者任教江蘇省無錫市碩放中學—