數學傳播 40卷3期, pp. 65-77

優化幻方的構作

梁培基

社會在發展, 人類在進化, 幻方也增加了「新品種」。本文介紹一種「優化幻方」, 爲幻方家族增添更加迷人的斑爛色彩。

本文給出了用「方陣定位法」[1] 構作 $n=3k\pm 1$ $(k=2,4,\ldots)$、$n=3k$ ($k\geq 3$ 的奇數) 階、$n=4k$ $(k\geq 2)$ 階優化幻方及 $n=4k+2$ $(k=1,2,\ldots)$ 階「廣義優化幻方」的方法。

1. 基本定義

定義1: 自然數方陣。把 n^2 個自然數填入 n 行 n 列的正方形中, 這個填滿數字的正方形就叫「自然數方陣」。簡稱 Z 陣, $Z=(z_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$。一個方陣的每行、每列有 n個元素就叫 n 階方陣。與幻方中所稱的「階」相同。在圖 1 中, Z 與 H 分別是 4 階幻方的自然數方陣和全對稱幻方。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Z

1	15	10	8
12	6	3	13
7	9	16	2
14	4	5	11

$S_4=34$　H

圖 1

定義2: 幻方。把連續自然數 $1,2,\ldots,n^2$ 排成 n 行、n 列的方陣, 使得這個方陣的每行、每列及兩條對角線上 n 個元素之和都等於定值, 這個方陣稱爲幻方。古代稱爲「洛書」, 又叫「縱橫圖」。幻方的定值叫「幻和」, n 階幻方的幻和記作 S_n。

定義3: 優化方陣。由 $1,2,\ldots,n$ 各 n 個元素構成的 n 階方陣, 若每行、每列及每條對角線 (包括折斷對角線) 上 n 個元素之和都等於定值, 並且關於中心對稱的兩元素之和都相等, 稱爲

「優化方陣」。應當説明的是, 優化方陣的各行、各列及對角線上允許有相同元素。

定義 4: 優化幻方。在一個幻方中, 同時具有下列兩個性質, 則稱爲「優化幻方」:

在 n 階方陣 $A=(a_{ij})$ 中, 我們分別稱

$$\sum_{j=1}^{n-p} a_{j+p,j}+\sum_{j=n+1-p}^{n} a_{j+p-n,j} \quad 與 \quad \sum_{j=1}^{n-p} a_{n+1-p-j,j}+\sum_{j=n+1-p}^{n} a_{2n+1-p-j,j} \quad (p=1,2,\ldots)$$

爲 A 的左與右折斷對角線元素和。

1. 在一個幻方中, 每條對角線 (包括折斷對角線) 上 n 個元素之和都等於幻和, 稱爲「全對稱幻方」[2]。
2. 關於中心對稱的兩個元素之和都相等。

定義5: 正交方陣。設兩個 n 階方陣 $A=(a_{ij})$ 與 $B=(b_{ij})$、$(i,j=1,2,\ldots,n)$, 將取自 A、B 相同位置的 (i,j) 處的二元素構作有序偶 (a_{ij},b_{ij}), 若 $n\times n$ 個有序偶 (a_{ij},b_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots,n)$ 兩兩不同, 則稱 A 與 B 相互正交。在方陣 A 與 B 的各行、各列及對角線上允許有相同元素。

定義 6: 廣義幻方。如果一個幻方的元素不是由連續自然數 $1,2,\ldots,n^2$ 所組成, 就叫「廣義幻方」。如果一個廣義幻方具有每行、每列及每條對角線 (包括折斷對角線) 上 n 個元素之和都等於廣義幻方的定值, 並且關於中心對稱的兩元素之和都相等, 則稱爲「優化廣義幻方」。

定義 7: 方陣定位法。用兩個正交方陣 A 與 B 的有序偶 (a_{ij},b_{ij}) 爲行、列座標, 來確定幻方 H 陣的元素, 稱爲「方陣定位法」。又叫「座標定位法」。

定義 8: 循環方陣。當設定方陣的第 1 行元素之後, 確定一個 x 列爲「循環點」。以圖 2A 爲例, 循環點是每行的第 3 列。首先把第 1 行的 5,2,4 依次填入第 2 行的第 $1\sim 3$ 列的位置上, 再把循環點前面的 1, 3 依次填入第 2 行第 4, 5 列的位置上。用上述方法填寫第 $3,4,\ldots,n$ 行的元素, 完成 n 階方陣。這個方法是把一行數字看作是一個閉合圓環, 從循環點開始依次填入一行, 循環而生成的, 所以叫「循環方陣」。圖 2A 就是一個 5 階循環方陣, 循環點是每行的第 3 列。圖 2B 也是一個循環方陣, 其循環點是每行的第 4 列。循環方陣在構作奇數階幻方時非常方便[1]。

2. 構作方法

對於 n 階幻方, 根據構作方法可劃分爲: $n=2k+1$、$n=4k$、$n=4k+2$ $(k=1,2,\ldots)$

階, 三種形式。

已經有人證明不存在由連續自然數構成的 $n = 4k+2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ 階「全對稱幻方」[3], 因之, 也不存在由連續自然數構成的 $n = 4k + 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ 階「優化幻方」。

今將 $2k + 1$ (≥ 1)、$4k$ $(k \geq 2)$ 階優化幻方及 $4k + 2$ $(k \geq 1)$ 階「廣義優化幻方」的構作方法分述如下。

我們把奇數階幻方分爲 $3k \pm 1$ $(k = 2, 4, \ldots)$ 階與 $3k$ $(k \geq 3$ 的奇數$)$ 階來討論:

2.1. $3k \pm 1$ 階優化幻方的構作

當 $n = 3k \pm 1$ $(k = 2, 4, \ldots)$ 用方陣定位法構造一個循環方陣 A, 循環點是 $(n + 1)/2$ 列, 這個方陣符合優化方陣的條件, 再將 A 陣左右旋轉 180 度, 得到 B 陣, A 與 B 是正交方陣,

構成的方陣 $H = (h_{ij})$ 是一個優化幻方。

也可以經過計算得出優化幻方,

令 $h_{ij} = n(a_{ij} - 1) + b_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $H = (h_{ij})$ 是優化幻方。

圖 2 分別是 $n = 5$ 的 A、B、Z 與 H 陣。

1	3	5	2	4
5	2	4	1	3
4	1	3	5	2
3	5	2	4	1
2	4	1	3	5

A

4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4
1	4	2	5	3
5	3	1	4	2

B

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Z

4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
17	5	13	21	9
11	24	7	20	3
10	18	1	14	22

H $S_5 = 65$

圖 2

由於 B 陣是 A 陣的列變換方陣, 所以構造 A 陣是關鍵, $3k \pm 1$ $(k = 2, 4, \ldots)$ 階 A 陣的構造可用兩種方法。

方法一: 按如下步驟進行:

步驟 1. 先作第 1 行, 令 $a_{1,j} = 2j - 1 \pmod n$ $(1 \leq a_{1j} \leq n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$。

步驟 2. 選取 $(n + 1)/2$ 列 (又叫「中列」) 爲循環點, 按照循環方陣的方法, 向第 2 行、第 3 行, 至第 n 行循環, 完成循環方陣 A。

方法二:

先把奇數 $1, 3, \ldots, n$ 直接填入第 1 行的第 1 列至第 $(n + 1)/2$ 列(中列), 把偶數

$2, 4, \ldots, n-1$ 填入中列 $+1$ 列至第 n 列, 完成第 1 行。

取第 1 行的「中列」爲循環點, 按照循環方陣的方法, 向下循環填寫, 完成循環方陣 A。

無論使用方法一或方法二, 都可以得到同樣的結果, 殊途而同歸。這兩種方法都可以得到任意奇數 $(n=3,5,\ldots)$ 階的幻方。只不過, 當 n 是 3 的倍數時, 得到的幻方不能滿足折斷對角線之和等於定值, 只能得到普通幻方而不能滿足優化幻方的性質, 請讀者自己探索。本構造方法及定理的證明參閱[1]。

2.2. 當 $n=3k$ ($k \geq 3$ 的奇數) 階優化幻方的構作

當 $n=3k$ ($k \geq 3$ 的奇數) 時, 用方陣定位法構造出符合「優化方陣」條件的兩個正交方陣 $A=(a_{ij})$ 與 $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$。圖 3 是 9 階優化幻方的 A 與 H, $h_{ij}=n(a_{ij}-1)+b_{ij}$ (H爲幻方, 下同)。

$b_{ij}=a_{i,n-j+1}$ 略。

1	4	5	6	9	7	8	2	3
9	7	8	2	3	1	4	5	6
3	1	4	5	6	9	7	8	2
6	9	7	8	2	3	1	4	5
2	**3**	**1**	**4**	**5**	**6**	**9**	**7**	**8**
5	6	9	7	8	2	3	1	4
8	2	3	1	4	5	6	9	7
4	5	6	9	7	8	2	3	1
7	8	2	3	1	4	5	6	9

A

3	29	44	52	81	60	68	13	19
78	59	67	10	21	2	35	43	54
20	8	34	45	51	77	58	64	12
50	76	55	66	11	26	7	36	42
17	25	9	33	41	49	73	57	65
40	46	75	56	71	16	27	6	32
70	18	24	5	31	37	48	74	62
28	39	47	80	61	72	15	23	4
63	69	14	22	1	30	38	53	79

H $S_9=369$

圖 3

容易發現, 圖 3 的 A 陣具有優化方陣的性質, 由於A 與 B 是正交方陣, 故得到的 H 是一個優化幻方。構造 A 陣的關鍵環節在於 A 陣的中間行。當 $k=3$ 時, 中間行的元素設計(當然, 有多種設計) 爲:

$$2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 7,\ 8$$

在中間行中, 它們的第 1, 4, 7 列、第 2, 5, 8 列及第 3, 6, 9 列上的3個元素之和都等於15, 並且關於中心對稱的兩元素之和相等。

當 $k \geq 5$ 的奇數時, 把 $1,2,\ldots,3k$ 構成一個 3 行 k 列的矩陣 $E=(e_{ij})$ $(i=1,2,3;$

$j=1,2,\ldots,k)$

$$e_{ij}=\begin{cases} i+1, & i=1,2,\ j=1.\\ 1, & i=3,\ j=1.\\ 3(j-1)+i, & i=1,2,3,\ j=2,4,\ldots,k-1.\\ 3j-i+1, & i=1,2,3,\ j=3,5,\ldots,k-2.\\ n, & i=1,\ j=k.\\ n+i-4, & i=2,3,\ j=k.\end{cases}$$

令 E 陣的 $1,2,\ldots,k$ 列上的元素, 依次爲 A 陣中間行的第 $1,2,\ldots,n$ 列上的元素。

這裡給出 $k=3$、5、7、9、11 的 3 行 k 列 E 陣的實例, 以饗幻友。

$k=3$	2	4	9
	3	5	7
	1	6	8

$k=5$	2	4	9	10	15
	3	5	8	11	13
	1	6	7	12	14

$k=7$	2	4	9	10	15	16	21
	3	5	8	11	14	17	19
	1	6	7	12	13	18	20

$k=9$	2	4	9	10	15	16	21	22	27
	3	5	8	11	14	17	20	23	25
	1	6	7	12	13	18	19	24	26

$k=11$	2	4	9	10	15	16	21	22	27	28	33
	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	31
	1	6	7	12	13	18	19	24	25	30	32

構造 E 陣的方法是, 首先確定第 1 列和第 k 列上的 3 個元素。第 1 列的 3 個元素從第 1 行 $\sim$ 第 3 行分別是 2, 3, 1; 第 k 列的 3 個元素從第 1 行 $\sim$ 第 3 行分別是 n, $n-2$, $n-1$。

再從第 2 列開始, 按照由小到大、從上到下的順序排列, 第 2 列與第 3 列兩個相連數字在底部呈 $\cup$ 形連接, 第 3 列與第 4 列兩個相連數字在頂部呈顛倒的「$\cap$」形連接。這樣輾轉連接的規律是: 在同列的 3 個數中, 凡是大偶數在下面的與下一列相連數呈 $\cup$ 形連接, 凡是大奇數在上面的與下一列相連數呈 $\cap$ 形連接, 直到第 $k-1$ 列。也就是說, 第 $2, 4, \ldots, k-1$ 列是按照小數在上、大數在下的順序排列; 第 $3, 5, \ldots, k-2$ 列是按照小數在下、大數在上的順序排列。從第 2 列至第 $k-1$ 列 (粗實線所圍部分) 好像一個迴形針一樣, 把「芸芸衆數」上通下達、左聯右合, 維繫在一起, 雖然經過了蜿蜒曲折的行程, 終究還是組合在一起完成了構造 E 陣的大業。又像古籍中的「尺蠖之屈」, 也好像我國傳統的「富貴不斷頭」圖案一樣美麗漂亮。其規律一目了然。

完成了3行、k 列的 E 陣之後, 再把 D 陣生成 A 陣, 以 $k=3$ 爲例, 按照下列步驟進行;

第一步, 把 E 陣生成 A 陣的中間行:

把 D 陣第一列上的 2、3、1, 依次填入圖 3A 中間行的第 1, 2, 3 列的位置上;
把 D 陣第二列上的 4、5、6, 依次填入圖 3A 中間行的第 4, 5, 6, 列的位置上;
把 D 陣第三列上的 9、7、8, 依次填入圖 3A 中間行的第 7, 8, 9, 列的位置上。

(圖 3A 中間行所示的粗體字)

這個方法好像小朋友玩的「多米諾骨牌」。不妨把 D 陣每列上的 3 個元素看作是一個豎直的多米諾骨牌, 從後方 (右) 加力, 使骨牌 (列元素) 向前 (左) 傾倒。把這些平鋪在地面上的數字, 按照從左到右的順序直接填寫到 A 陣中間行的第 $1, 2, \ldots, n$ 列的位置上。當然, 不能重疊。

第二步: 由 A 陣的中間行生成完整的 A 陣

(1) 利用循環方陣的方法, 以中間行的「中列」爲循環點, 向下循環, 完成中間行以下部分。

(2) 中間行以上部分, 可以用中間行的「中列+1列」爲循環點, 從中間行向中間行 -1 行, 中間行 -2 行, ..., 第 1 行, 逐行向上反循環, 得到 A 陣。也可以利用關於中心對稱的兩元素之和等於 $n+1$ 的關係, 計算出 A 陣的上部分, 來完成 A 陣。

第三步: 由 A 生成優化幻方 H

令 $h_{ij} = n(a_{ij}-1) + a_{i,n-j+1}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $H = (h_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ 是 $3k$ 階優化幻方。

3. $4k$ 階優化幻方的構作

容易證明不存在 4 階優化幻方。當 $n = 4k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ 時, 不妨分爲 $k \geq 2$ 的偶數及 $k \geq 3$ 的奇數兩種情形來討論:

3.1. 當 $k \geq 2$ 的偶數時

我們先給出一個 $n = 8$ 的實例 (圖4)。

在圖 4 中, 優化幻方 H 是由 A 陣經過計算得到的, 計算公式爲 $h_{ij} = n(a_{ij} - 1) + a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$。

1	7	6	4	4	6	7	1
8	2	3	5	5	3	2	8
1	7	6	4	4	6	7	1
8	2	3	5	5	3	2	8
1	7	6	4	4	6	7	1
8	2	3	5	5	3	2	8
1	7	6	4	4	6	7	1
8	2	3	5	5	3	2	8

A

1	56	41	32	25	48	49	8
63	10	23	34	39	18	15	58
6	51	46	27	30	43	54	3
60	13	20	37	36	21	12	61
4	53	44	29	28	45	52	5
62	11	22	35	38	19	14	59
7	50	47	26	31	42	55	2
57	16	17	40	33	24	9	64

H $S_8 = 260$

圖 4

上例表明, 要造出 A 陣, 只需要作出一個 2 行, $2k$ 列的矩陣 $D = (d_{ij})$ $(i = 1, 2;$ $j = 1, 2, \ldots, 2k)$ 即可, 並將其排列在 A 陣的第 1 行與第 2 行的第 $1, 2, \ldots, 2k$ 列的位置上。A 陣左半部其餘各行 $(3 \sim n)$ 上的元素是第 1 行與第 2 行上諸元素的重復; 右半部是左半部的反射, 利用這些性質, 可以很快造出 A 陣, 再按照上述計算公式由 A 陣生成優化幻方。

當 $k \geq 2$ 的偶數時, 設 $t = k/2$, D 陣的造法如下:

$$d_{ij} = \begin{cases} j & \begin{cases} i = 1,\ j = 1, 2, \ldots, t;\ 3t+1, 3t+2, \ldots, 4t \\ i = 2,\ j = t+1, t+2, \ldots, 3t \end{cases} \\ n - j + 1 & \begin{cases} i = 1,\ j = t+1, t+2, \ldots, 3t \\ i = 2,\ j = 1, 2, \ldots, t;\ 3t+1, 3t+2, \ldots, 4t \end{cases} \end{cases}$$

又由於 D 陣第 2 行上諸元素與第 1 行相對應的兩個元素關於 $n+1$ 互補, 所以作出 D 陣的第 1 行, 即可生成 D 陣, 再由 D 陣生成 A 陣。

我們給出 $k = 2, 4, 6, 8, 10$, D 陣的實例:

$k=2$	1	7	6	4				
	8	2	3	5				

$k=4$	1	2	14	13	12	11	7	8
	16	15	3	4	5	6	10	9

$k=6$	1	2	3	21	20	19	18	17	16	10	11	12
	24	23	22	4	5	6	7	8	9	15	14	13

$k=8$	1	2	3	4	28	27	26	25	24	23	22	21	13	14	15	16
	32	31	30	29	5	6	7	8	9	10	11	12	20	19	18	17

$k=10$	1	2	3	4	5	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	16	17	18	19	20
	40	39	38	37	36	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	25	24	23	22	21

我們觀察這些 D 陣中的大、小數字 (粗實線所圍) 之排列, 好像兩個碗和盤子, 一仰、一合, 整齊有序。看到這個圖像, 不禁想起《周易》中的「艮仰盂, 震覆碗」的卦象。不料想, 八卦的優美圖形竟然在這裡展現, 有趣!

3.2. 當 $k\geq 3$ 的奇數時

A 陣的構作仍然按照 $k\geq 2$ 的偶數的方法進行, 先作出一個 2 行, $2k$ 列的矩陣 $D=(d_{ij})$ $(i=1,2;\ j=1,2,\ldots,2k)$, 再由 D 陣生成 A 陣 (方法同上)。

當 $k=3$ 時,

$$D=\begin{pmatrix}1,\ 11,\ 3,\ 9,8,7\\ \\ 12,\ 2,\ 10,4,5,6\end{pmatrix}$$

當 $k\geq 5$ 的奇數時, $t=(k-3)/2$, D 陣的造法如下

$$d_{ij}=\begin{cases}j & \begin{cases}i=1,\ j=1,2,\ldots,t;\ 3t+1,\ 3t+2,\ldots,4t+1;4t+3.\\ i=2,\ j=t+1,t+2,\ldots,3t;\ 4t+2,\ 4t+4,\ 4t+5,\ 4t+6.\end{cases}\\ \\ n-j+1 & \begin{cases}i=1,\ j=t+1,t+2,\ldots,3t;\ 4t+2,\ 4t+4,\ 4t+5,\ 4t+6.\\ i=2,\ j=1,2,\ldots,t;\ 3t+1,3t+2,\ldots,4t+1;\ 4t+3.\end{cases}\end{cases}$$

當 $k \geq 3$ 的奇數時, $k = 3, 5, 7, 9$ 的 D 陣實例如下:

$k = 3$	1	11	3	9	8	7
	12	2	10	4	5	6

$k = 5$	1	19	18	4	5	15	7	13	12	11
	20	2	3	17	16	6	14	8	9	10

$k = 7$	1	2	26	25	24	23	7	8	9	10	11	17	16	15
	28	27	3	4	5	6	22	21	29	10	18	12	13	14

$k = 9$	1	2	3	33	32	31	30	29	28	10	11	12	13	23	15	21	20	19
	36	35	34	4	5	6	7	8	9	27	26	25	24	14	22	16	17	18

這些 D 陣的特點是, 前部分的大、小數, 像「艮仰盂, 震覆碗」的圖像; 後部分 (粗實線所圍的長方形) 的 6 列是 $k = 3$ 的傳承, 當 $k > 3$ 時, 後邊的 6 列只是在 $k = 3$ 的基礎上依次加 4 所得。

4. $4k + 2$ 階廣義優化幻方的構作

$4k + 2$ 階廣義優化幻方的構作, 仍然按分爲兩種情形討論:

4.1. 當 k 爲奇數時

如果把 $1, 2, \ldots, 4k + 2$ 分爲其和相等的兩組, 顯然是不可能的[3]。但, 我們可以用擴大元素值的方法, 將 $1, 2, \ldots, 2k + 1$ 與 $2k + 3, 2k + 4, \ldots, 4k + 3$ 分爲其和相等的兩組。

$k = 1$ 的例:

$$\text{把} \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 7, 6, 5 \end{pmatrix} \qquad \text{變換爲} \quad \begin{pmatrix} 1, 6, 5 \\ 7, 2, 3 \end{pmatrix} \text{即可。}$$

圖 5 是 $n = 6$ 的例, $H = (h_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. $h_{ij} = (a_{ij} - 1) * (n + 1) + a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$。

1	6	5	5	6	1
7	2	3	3	2	7
1	6	5	5	6	1
7	2	3	3	2	7
1	6	5	5	6	1
7	2	3	3	2	7

A

1	42	29	35	36	7
48	9	20	16	13	44
5	38	33	31	40	3
47	10	19	17	12	45
6	37	34	30	41	2
43	14	15	21	8	49

$H \quad S_6 = 150$

圖 5

當 $n \geq 3$ 的奇數時, 仍然可構造一個 2 行, $2k$ 列的矩陣 $D = (d_{ij})$ $(i = 1, 2; j = 1, 2, \ldots, 2k)$, 設 $t = (k-1)/2$, D 陣的造法如下:

$$d_{ij} = \begin{cases} j & \begin{cases} i = 1,\ j = 1, 2, \ldots, t;\ 3t+1,\ 3t+2, \ldots, 4t+1. \\ i = 2,\ j = t+1, t+2, \ldots, 3t;\ 4t+2,\ 4t+3. \end{cases} \\ n - j + 2 & \begin{cases} i = 1,\ j = t+1, t+2, \ldots, 3t;\ 4t+2,\ 4t+3. \\ i = 2,\ j = 1, 2, \ldots, t;\ 3t+1,\ 3t+2, \ldots, 4t+1. \end{cases} \end{cases}$$

當 $n = 4k+2$ $(k = 1, 3, 5, 7)$ 時, D 陣的實例如下:

$k=1$	1	6	5
	7	2	3

$k=3$	1	14	13	4	5	10	9
	15	2	3	12	11	6	7

$k=5$	1	2	21	20	19	18	7	8	9	14	13
	23	22	3	4	5	6	17	16	15	10	11

$k=7$	1	2	3	28	27	26	25	24	23	10	11	12	13	18	17
	31	30	29	4	5	6	7	8	9	22	21	20	19	14	15

這些 D 陣的前部分的大、小數仍然是「艮仰盂, 震覆碗」的圖像, 可說是「以不變應萬變」; 後部分(粗實線所圍) 3 列是 $k=1$ 的傳承, 當 $k>1$ 時, 後邊的 3 列, 只是在 $k=1$ 的基礎上依次加 4 所得。

4.2. 當 k 爲偶數時

圖 6 是 $k=2$, $n=10$ 階的 A 陣與 H 陣:

1	12	3	10	9	9	10	3	12	1
13	2	11	4	5	5	4	11	2	13
1	12	3	10	9	9	10	3	12	1
13	2	11	4	5	5	4	11	2	13
1	12	3	10	9	9	10	3	12	1
13	2	11	4	5	5	4	11	2	13
1	12	3	10	9	9	10	3	12	1
13	2	11	4	5	5	4	11	2	13
1	12	3	10	9	9	10	3	12	1
13	2	11	4	5	5	4	11	2	13

A

1	156	27	130	105	117	118	39	144	13
168	15	142	41	64	54	51	132	25	158
3	154	29	128	107	115	120	37	146	11
166	17	140	43	62	56	49	134	23	160
9	148	35	122	113	109	126	31	152	5
165	18	139	44	61	57	48	135	22	161
10	147	36	121	114	108	127	30	153	4
159	24	133	50	55	63	42	141	16	167
12	145	38	119	116	106	129	28	155	2
157	26	131	52	53	65	40	143	14	169

H $\quad S_{10}=850$

圖 6

在圖 6 中, $H=(h_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, $h_{ij}=(a_{ij}-1)*(n+3)+a_{ji}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$。

其 A 陣仍然由 2 行、$2k$ 列的 D 陣生成。

當 $k\geq 4$ 的偶數時, 設 $t=(k-1)/2$, D 陣的造法如下:

$$d_{ij}=\begin{cases} j & \begin{cases} i=1,\ j=1,2,\ldots,t;\ 3t+1,\ 3t+2,\ldots,4t+1;\ 4t+3. \\ i=2,\ j=t+1,t+2,\ldots,3t;\ 4t+2,\ 4t+4,\ 4t+5. \end{cases} \\ n-j+4 & \begin{cases} i=1,\ j=t+1,t+2,\ldots,3t;\ 4t+2,\ 4t+4,\ 4t+5. \\ i=2,\ j=1,2,\ldots,t;\ 3t+1,\ 3t+2,\ldots,4t+1;\ 4t+3. \end{cases} \end{cases}$$

當 $k\geq 2$ 的偶數時, $k=2,4,6,8$, D 陣的例子如下:

$k=2$	1	12	3	10	9
	13	2	11	4	5

$k=4$	1	20	19	4	5	16	7	14	13
	21	2	3	18	17	6	15	8	9

$k=6$	1	2	27	26	25	24	7	8	9	20	11	18	17
	29	28	3	4	5	6	23	22	21	10	19	12	13

$k=8$	1	2	3	34	33	32	31	30	29	10	11	12	13	24	15	22	21
	37	36	35	4	5	6	7	8	9	28	27	26	25	14	23	16	17

這些 D 陣的特點是, 前部分大、小數仍然像「艮仰盂, 震覆碗」; 後部分 (粗實線所圍) 是 $k=2$ 的傳承, 當 $k>2$ 時, 後邊的 5 列, 只是在 $k=2$ 的基礎上依次加 4 所得。真是一如既往的 D 陣!

完成 D 陣之後, 按照前面所提供的方法, 可以作出 A 陣, 再由 A 陣作出廣義優化幻方, 就易如反掌了。

利用電腦構作幻方, 更是「唾手可得」。

另外, 介紹一個 25 階優化幻方, 並且它還是一個平方幻方。有興趣的讀者不妨「解剖」一下, 得出這個幻方的 A 陣與 B 陣, 它可以使你解決 $n \times n$ $(n \geq 3)$ 的奇數階平方幻方以及雙重幻方。引玉之磚如下: 幻和 $S_{25} = 7825$; 平方幻方 $S_{25}^2 = 3263025$。

446	459	492	380	413	552	590	623	506	544	58	91	104	12	50	189	222	235	143	151	320	328	361	274	282
570	578	611	524	532	71	84	117	5	38	177	215	248	131	169	308	341	354	262	300	439	472	485	393	401
64	97	110	18	26	195	203	236	149	157	321	334	367	255	288	427	465	498	381	419	558	591	604	512	550
183	216	229	137	175	314	347	360	268	276	445	453	486	399	407	571	584	617	505	538	52	90	123	6	44
302	340	373	256	294	433	466	479	387	425	564	597	610	518	526	70	78	111	24	32	196	209	242	130	163
409	442	455	488	396	540	573	581	619	502	41	54	87	125	8	172	185	218	226	139	278	311	349	357	270
528	561	599	607	520	34	67	80	113	21	165	198	206	244	127	291	304	337	375	258	422	435	468	476	389
47	60	93	101	14	153	186	224	232	145	284	317	330	363	271	415	448	456	494	377	541	554	587	625	508
166	179	212	250	133	297	310	343	351	264	403	436	474	482	395	534	567	580	613	521	40	73	81	119	2
290	323	331	369	252	416	429	462	500	383	547	560	593	601	514	28	61	99	107	20	159	192	205	238	146
392	405	438	471	484	523	531	569	577	615	4	37	75	83	116	135	168	176	214	247	261	299	307	345	353
511	549	557	595	603	17	30	63	96	109	148	156	194	202	240	254	287	325	333	366	385	418	426	464	497
10	43	51	89	122	136	174	182	220	228	267	280	313	346	359	398	406	444	452	490	504	537	575	583	616
129	162	200	208	241	260	293	301	339	372	386	424	432	470	478	517	530	563	596	609	23	31	69	77	115
273	281	319	327	365	379	412	450	458	491	510	543	551	589	622	11	49	57	95	103	142	155	188	221	234
480	388	421	434	467	606	519	527	565	598	112	25	33	66	79	243	126	164	197	210	374	257	295	303	336
624	507	545	553	586	105	13	46	59	92	231	144	152	190	223	362	275	283	316	329	493	376	414	447	460
118	1	39	72	85	249	132	170	178	211	355	263	296	309	342	481	394	402	440	473	612	525	533	566	579
237	150	158	191	204	368	251	289	322	335	499	382	420	428	461	605	513	546	559	592	106	19	27	65	98
356	269	277	315	348	487	400	408	441	454	618	501	539	572	585	124	7	45	53	86	230	138	171	184	217
463	496	384	417	430	594	602	515	548	556	100	108	16	29	62	201	239	147	160	193	332	370	253	286	324
582	620	503	536	574	88	121	9	42	55	219	227	140	173	181	350	358	266	279	312	451	489	397	410	443
76	114	22	35	68	207	245	128	161	199	338	371	259	292	305	469	477	390	423	431	600	608	516	529	562
225	233	141	154	187	326	364	272	285	318	457	495	378	411	449	588	621	509	542	555	94	102	15	48	56
344	352	265	298	306	475	483	391	404	437	576	614	522	535	568	82	120	3	36	74	213	246	134	167	180

參考資料

1. 梁培基, 張航輔, 張俠輔。幻方的一種構作方法。雲南大學學報,4(1989)。
2. 梁培基, 張航輔。$4k$ 階全對稱幻方的一種快速構作方法。數學傳播季刊, 17(4), 87-92, 1993.
3. 孫榮國。關於全幻方的存在性。全國第三屆組合數學學術會議, 1987. 5.

—本文作者任職河南省封丘縣科協—