數學傳播 40卷3期, pp. 56-64

2016 年第 57 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2016 年第 57 屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 在香港舉行。本屆共有 109 個國家 (另加 2 個觀察國) 與會、合計 602 位學生 (含 71 位女學生) 代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕。除了確認各項議題外, 評審會議的主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出 30 道左右的預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。

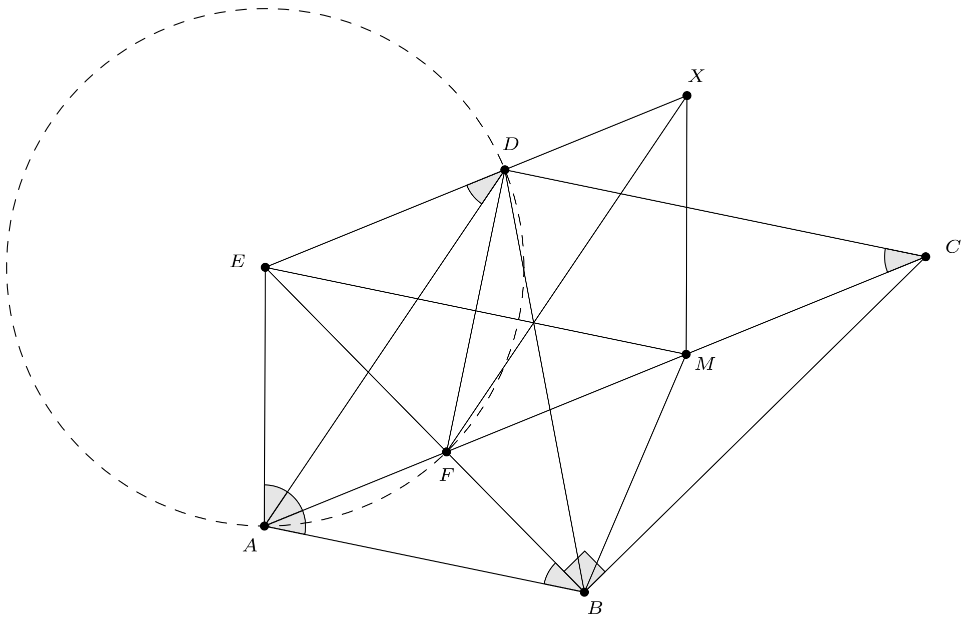
本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認爲較適當的試題, 再由各國領隊組成的評審會議經過四天的討論票選出 6 道正式試題, 其中第一題的領域爲幾何、第二題爲組合、第三、四題爲數論, 第五題爲代數, 第六題爲組合。對此次我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

問題 1: 三角形 BCF 中, $\angle B$ 是直角。設點 A 在直線 CF 上, 滿足 $FA=FB$、且 F 位於 A 和 C 之間。選取點 D 使得 $DA=DC$、且 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分線。再選點 E 使得 $EA=ED$、且 AD 是 $\angle EAC$ 的角平分線。設點 M 爲 CF 的中點, 另有一點 X 滿足 $AMXE$ 爲平行四邊形 (其中 $AM\,/\!/\,EX$、$AE\,/\!/\,MX$)。

證明: 直線 BD、FX、ME 三線共點。

試題委員會公布的參考答案:

由題設知 $\angle FBA=\angle FAB=\angle DAC=\angle DCA=\angle EAD=\angle EDA$, 將此共同角記爲 θ。由於 $\triangle ABF\sim\triangle ACD$ (等腰三角形, 對應底角相等), 知 $\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AD}$, 於是有



$\triangle ABC \sim \triangle AFD$。由 $EA = ED$, 可得

$$\angle AFD = \angle ABC = 90^\circ + \theta = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AED.$$

所以 F 落在以 E 爲圓心、以 EA 爲半徑的圓上, 也由此有 $EF = EA = ED$。因爲 $\angle EFA = \angle EAF = 2\theta = \angle BFC$, 可得 E、F、B 三點共線。

因爲 $\angle EDA = \angle MAD$, 可知 $ED /\!/ AM$ (內錯角相等), 故 E、D、X 三點共線。又 M 爲 CF 的中點, 且 $\angle CBF = 90^\circ$, 得 $MF = MB$。在等腰三角形 EFA 與 MFB 中, 有 $\angle EFA = \angle MFB$ 以及 $AF = BF$。因此, 這兩個等腰三角形全等, 於是得到 $BM = AE = XM$, 與 $BE = BF + FE = AF + FM = AM = EX$。由此得 $\triangle EMB \simeq \triangle EMX$。由於 F 與 D 這兩點分別落在直線 EB 及 EX 上, 並且 $EF = ED$, 得知直線 BD 與 XF 對 EM 對稱。故知此三線共點, 證明完畢。 $\square$

評註: 本題是今年唯一的純幾何題, 難度不高, 作法也有許多種。圖形中有許多共圓、平行、等腰的條件, 只要能看出來都可得證。官方另提供一種解法, 把 BD、FX、ME 視爲三個圓兩兩的根軸, 於是可由圓冪定理得證。有興趣的讀者可以試試看。

問題 2: 找出所有的正整數 n, 使得我們可以在 $n \times n$ 表格的每一方格中各填入字母 I、M、O 其中之一, 並且符合下列條件:

- 在任一行及任一列中, 有三分之一的方格填入字母 I、三分之一的方格填入 M、三分之一

的方格填入 O; 並且

- 對任一條對角線而言, 如果它的格子數是三的倍數, 則在該對角線中有三分之一的方格填入字母 I、三分之一的方格填入 M、三分之一的方格填入 O。

註: 一個 $n\times n$ 表格的各行各列, 可以按自然順序用 1 至 n 標號。由此, 任一方格可對應到一組正整數 (i,j), 其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$。當 $n>1$ 時, 表格會有 $4n-2$ 條對角線, 分成兩類: 第一類對角線係由 $i+j$ 爲定值的所有方格 (i,j) 所組成; 而第二類是由 $i-j$ 爲定值的所有方格 (i,j) 所組成。

試題委員會公布的參考答案: n 可以是 9 的任何倍數。

我們首先給一個 9×9 的表格如下:

I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M
I	I	I	M	M	M	O	O	O
M	M	M	O	O	O	I	I	I
O	O	O	I	I	I	M	M	M

直接檢查可知上表滿足題設。當 $n=9k$, k 爲正整數時, 我們可以將上表重複 $k\times k$ 次來得到 $n\times n$ 的表格。易知所得到的 $n\times n$ 表格的每一行及每一列中, I、M、O 出現的數目都相同。而對長度爲 3 的倍數的對角線而言, 該對角線會與如上的任一個 9×9 表格交於長度爲 3 的倍數的對角線上 (也可能完全不交); 由此, 在每一條這樣的對角線上, I、M、O 出現的數目也都相同。至此完成 $(9k)\times(9k)$ 表格的建構。

接下來證明必要性。因爲每一列的格子數必須爲 3 的倍數, 所以可設 $n=3k$, 其中 k 爲正整數。所以我們把 $n\times n$ 的表格分割成 $k\times k$ 個 3×3 的小表格。我們將每一個小表格的

中心格稱爲關鍵格; 並稱任一個至少包含一個關鍵格的列、行、對角線爲關鍵線。以下計算有序對 (ℓ, c) 的數量, 其中 ℓ 爲關鍵線、c 爲 ℓ 上含有字母 M 的方格。將此數量記爲 N。

首先, 由於每一行、每一列都包含相同數量的 I、M、O, 所以每一條關鍵行與每一條關鍵列都包含 k 個 M。接著對任一類的關鍵對角線計數: M 出現的個數是:

$$1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1=k^2.$$

加總起來, 可知 $N=4k^2$。

另一方面, 表格中共有 $3k^2$ 個 M, 每一個 M 會落在 1 或 4 條關鍵線上。所以 N 與 $3k^2$ 對模 3 同餘。

由這兩種計數方式, 可知 $4k^2 \equiv 3k^2 \pmod 3$。所以 k 必爲 3 的倍數, 亦即 n 必須是 9 的倍數。證明完畢。 □

評註: 本題爲組合中常見的建構問題, 要猜出答案後才能往正確的方向前進。本題的主要技巧, 其實就是組合學中常見的「數兩次」的方法: 將同一個集合以兩種不同的方法計數, 就能得到滿足題敘情形的必要條件。

問題 3: 設 $P=A_1A_2\ldots A_k$ 爲平面上的凸多邊形。頂點 A_1、A_2、$\cdots$、A_k 坐標中的所有數字都是整數, 並且都落在一個圓上。令 P 的面積爲 S。給一個正奇數 n, 使得 P 的每一條邊之長度平方皆爲整數, 並且可被 n 整除。

證明: $2S$ 爲整數, 並且可被 n 整除。

試題委員會公布的參考答案:

對所有 $i \geqslant 1$, 令 $A_{k+i}=A_i$。由鞋帶公式 (Shoelace formula)[1], 立知 $2S$ 爲正整數。以下我們將利用數學歸納法證明, 在 $k \geqslant 3$ 時, $2S$ 可被 n 整除。易知我們只需證明 n 是某質數的完全次方的情況, 即 $n=p^t$, 其中 p 爲奇質數, t 爲正整數。

當 $k=3$ 時, 設 P 的三邊長分別爲 $\sqrt{na}$、$\sqrt{nb}$、$\sqrt{nc}$, 其中 a, b, c 爲正整數。由海龍公式 (Heron's formula):

$$16S^2=n^2(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2).$$

所以 $16S^2$ 是 n^2 的倍數。因爲 n 是奇數, 所以 $2S$ 是 n 的倍數。

現設 $k \geqslant 4$。萬一 P 有某一條對角線的長度平方是 n 的倍數, 則該對角線可將 P 分割成兩個滿足題設的、邊數較少的圓內接多邊形, 由歸納法假設得證。因此, 我們只需處理任一條

[1]設三角形頂點分別爲 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 則其面積爲 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ 的絕對值; 更多邊形亦有類似的公式, 此即爲鞋帶公式 Shoelace formula。

對角線的長度平方都不是 n 的倍數的情形。令 $\nu_p(r)$ 代表正有理數 r 的質因數分解式中 p 出現的次數。吾人宣稱下列敘述成立:

引理: 對 $2\leqslant m\leqslant k-1$, 都有 $\nu_p(A_1A_m^2)>\nu_p(A_1A_{m+1}^2)$。

引理證明: 由假設, $\nu_p(A_1A_2^2)\geqslant t>\nu_p(A_1A_3^2)$, 故 $m=2$ 的情形成立。

設不等式 $\nu_p(A_1A_2^2)>\nu_p(A_1A_3^2)>\cdots>\nu_p(A_1A_m^2)$ 成立, 其中 $3\leqslant m\leqslant k-1$。在歸納過程中, 對圓內接四邊形 $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$ 使用托勒密 (Ptolemy) 定理:

$$A_1A_{m+1}\times A_{m-1}A_m+A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}=A_1A_m\times A_{m-1}A_{m+1}.$$

移項平方可得

$$\begin{aligned}A_1A_{m+1}^2\times A_{m-1}A_m^2 =&A_1A_{m-1}^2\times A_mA_{m+1}^2+A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2\\&-2A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}\times A_1A_m\times A_{m-1}A_{m+1}.\end{aligned}\tag{1}$$

由此式知 $2A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}\times A_1A_m\times A_{m-1}A_{m+1}$ 爲整數。我們來考慮 (1) 式每一項中, 質數 p 出現的次數。由歸納法假設, 有 $\nu_p(A_1A_{m-1}^2)>\nu_p(A_1A_m^2)$。而且 $\nu_p(A_mA_{m+1}^2)\geqslant t>\nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$ 亦成立。所以有

$$\nu_p(A_1A_{m-1}^2\times A_mA_{m+1}^2)>\nu_p(A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2).\tag{2}$$

接下來, 我們由 (2) 式可得

$$\begin{aligned}&\nu_p(4A_1A_{m-1}^2\times A_mA_{m+1}^2\times A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2)\\&=\nu_p(A_1A_{m-1}^2\times A_mA_{m+1}^2)+\nu_p(A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2)\\&>2\nu_p(A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2).\end{aligned}$$

由此知

$$\nu_p(2A_1A_{m-1}\times A_mA_{m+1}\times A_1A_m\times A_{m-1}A_{m+1})>\nu_p(A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2).\tag{3}$$

綜合 (1)、(2)、(3) 三式, 可知

$$\nu_p(A_1A_{m+1}^2\times A_{m-1}A_m^2)=\nu_p(A_1A_m^2\times A_{m-1}A_{m+1}^2).$$

由於 $\nu_p(A_{m-1}A_m^2)\geqslant t>\nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$, 我們得到 $\nu_p(A_1A_{m+1}^2)<\nu_p(A_1A_m^2)$。於是引理由數學歸納法得證。 ♡

回到原題。由引理知

$$t>\nu_p(A_1A_3^2)>\nu_p(A_1A_4^2)>\cdots>\nu_p(A_1A_k^2)\geqslant t,$$

顯然矛盾! 故原命題成立, 即 $2S$ 爲 n 的倍數。證明完畢。 □

評註: 此題數論題是本屆最難的試題。官方解極爲巧妙, 利用圓內接四邊形的托勒密定理, 設計出由某點出發的諸條對角線對質因數次數遞降的性質, 從而得到矛盾。注意到如果對任一奇質數 p 都能證出題敘對 p^2 成立, 那麼整個圖形可以縮小成 $\frac{1}{p}$ 倍, 於是可以一路遞降證畢, 也是極爲漂亮的證法。本題另外還可以利用複數系內的高斯整數 (Gaussian integer) 的性質來證明, 其間需要對形如 $4k+1$ 與 $4k+3$ 的質數作不一樣的討論, 是值得接觸過高等數學的人士學習的。

問題 4: 對一個由正整數所組成的集合而言, 如果它至少包含兩個元素, 且每一個元素至少與另一個元素有共同的質因數, 則稱此集合爲一個 芳香集。設 $P(n)=n^2+n+1$。請找出最小的正整數 b, 使得我們可以找到非負整數 a, 讓集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

成爲一個芳香集。

試題委員會公布的參考答案: 本題 b 的最小可能值爲 6。

易知對所有的正整數 n, $P(n)$ 總是奇數。先有以下幾個簡單的觀察:

(i) 對任意正整數 n, 有 $\big(P(n), P(n+1)\big)=1$。
持續利用輾轉相除法, 知 $\big(P(n), P(n+1)\big)=(n^2+n+1, n^2+3n+3)=(n^2+n+1, 2n+2)=(n^2+n+1, n+1)=(1, n+1)=1$。

(ii) 對任意正整數 n, 當 $n \not\equiv 2 \pmod 7$ 時, $\big(P(n), P(n+2)\big)=1$; 當 $n \equiv 2 \pmod 7$ 時, $\big(P(n), P(n+2)\big)=7$。
證: 由於 $(2n+7)P(n)-(2n-1)P(n+2)=14$ 且 $P(n)$ 總爲奇數, 知 $\big(P(n), P(n+2)\big)$ 必爲 7 的因數。直接對 $n \equiv 0, 1, \ldots, 6 \pmod 7$ 逐一檢查即得。

(iii) 對任意正整數 n, 當 $n \not\equiv 1 \pmod 3$ 時, $\big(P(n), P(n+3)\big)=1$; 當 $n \equiv 1 \pmod 3$ 時, $3 \mid \big(P(n), P(n+3)\big)$。
證: 由於 $(n+5)P(n)-(n-1)P(n+3)=18$ 且 $P(n)$ 總爲奇數, 知 $\big(P(n), P(n+3)\big)$ 必爲 9 的因數。直接對 $n \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ 逐一檢查即可。

首先論證 $b \geqslant 6$。由 (i) 立知不存在 2 或 3 個元素的芳香集。當 $b=4$ 時, 由條件 (i) 知必須 $P(a+1)$ 與 $P(a+3)$ 不互質、且 $P(a+2)$ 與 $P(a+4)$ 不互質; 但根據 (ii) 此兩者不可能同時成立, 故 $b \neq 4$。現在考慮 $P(a+1)$ 到 $P(a+5)$ 等 5 個數字。由 (i)(ii), $P(a+3)$ 必須與 $P(a+1)$、$P(a+5)$ 其中之一不互質, 由對稱性可設此數爲 $P(a+1)$。由 (ii) 知 $a \equiv 1 \pmod 7$, 並得 $\big(P(a+2), P(a+4)\big)=1$。若這五個數字組成芳香集的話, $\big(P(a+1), P(a+4)\big)$ 與 $\big(P(a+2), P(a+5)\big)$ 必須同時大於 1, 但由 (iii) 此爲不可能。綜

上所述, 知 $b \geqslant 6$。

以下建構一個 6 元素的芳香集。由中國剩餘定理, 可取到正整數 a 同時滿足同餘式

$$a+1 \equiv 7 \pmod{19}, \quad a+2 \equiv 2 \pmod{7}, \quad a+3 \equiv 1 \pmod{3}.$$

例如, $a=196$ 同時滿足上列三式。由 (ii), $P(a+2)$ 與 $P(a+4)$ 都是 7 的倍數。由 (iii), $P(a+3)$ 與 $P(a+6)$ 都是 3 的倍數。直接計算知 $19 \mid P(7)=57$、$19 \mid P(11)=133$, 所以 $P(a+1)$ 與 $P(a+5)$ 都是 19 的倍數。所以 $\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+6)\}$ 是一個芳香集。證明完畢。 $\square$

評註: 本題是十分直接的數論題, 同學們可以從小的數目 n 出發, 看看 $P(n)$ 有哪些質因數, 觀察其規律性就知道需要證明哪些同餘式了。在我國現行的課綱中已將相關的數論知識略去, 但這是數學競賽的初等公式, 還是希望有志於此的同學能多加強這些古典的結果。

問題 5: 黑板上寫著方程式

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

其中等號兩邊各有 2016 個一次因式。請找出最小的正整數 k, 使得: 在這 4032 個一次因式中, 我們能夠恰好擦掉 k 個, 讓等號兩邊至少各留下一個一次因式, 且所得到的方程式沒有實數解。

試題委員會公布的參考答案: k 的最小值爲 2016。

因爲等號兩邊有 2016 個相同的一次因式, 所以我們至少得擦掉 2016 個因式。以下證明: 如果我們把等號左邊的一次因式中, 擦掉所有形如 $x-\ell$ ($\ell \equiv 2, 3 \pmod{4}$) 的因式, 同時在等號右邊的一次因式中, 擦掉所有形如 $x-m$ ($m \equiv 0, 1 \pmod{4}$) 的因式; 亦即, 考慮下面的方程式:

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4)=\prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3). \tag{4}$$

我們宣稱 (4) 式沒有實數解。以下分區討論。

- 第一種情形: $x=1, 2, \ldots, 2016$。

  在此情形下, 等號的某一邊等於 0 而另一邊不是 0, 所以這些 x 都不是 (4) 式的解。

- 第二種情形: $4i+1<x<4i+2$ 或者 $4i+3<x<4i+4$, 其中 $i \in \{0, 1, \ldots, 503\}$。

  對於 $j \in \{0, 1, \ldots, 503\}$ 且 $j \neq k$, 乘積 $(x-4j-1)(x-4j-4)$ 爲正; 而乘積 $(x-4k-1)(x-4k-4)$ 爲負。所以等號的左邊小於 0。但是等號右邊的每一組乘積 $(x-4j-2)(x-4j-3)$ ($j \in \{0, 1, \ldots, 503\}$) 都爲正, 故等號的右邊大於 0。因此, 這些範圍的實數 x 都不是 (4) 的解。

- 第三種情形: $x<1$ 或 $x>2016$, 或者 $4i<x<4i+1$, 其中 $i\in\{0,1,\ldots,503\}$。

  將 (4) 式改寫爲:

$$1=\prod_{j=0}^{503}\frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)}=\prod_{j=0}^{503}\Big(1-\frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\Big). \tag{5}$$

注意到在這些範圍的實數 x, 對所有 $0\leqslant j\leqslant 503$, 都有 $(x-4j-2)(x-4j-3)>2$。於是 (5) 式的等號右邊的每一個因子都介於 0 與 1 之間, 乘積必嚴格小於 1; 但等號的左邊是 1。所以這些範圍的 x 也都不是 (4) 的解。

- 第四種情形: $4i+2<x<4i+3$, 其中 $i\in\{0,1,\ldots,503\}$。

  這次我們將 (4) 式改寫成

$$\begin{aligned}1&=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2016}{x-2015}\cdot\prod_{j=1}^{503}\frac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\\&=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2016}{x-2015}\cdot\prod_{j=1}^{503}\Big(1+\frac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\Big).\end{aligned}\tag{6}$$

在這些範圍的 x, 會使得 $\frac{x-1}{x-2}$ 以及 $\frac{x-2016}{x-2015}$ 大於 1, 也會讓連乘積中的每一個括號都大於 1, 所以乘起來必定大於 1; 但等號左邊是 1。所以這些範圍的 x 也都不是 (4) 式的解。

綜合上面四種情形, 我們已經把所有實數都討論完畢了。所以 (4) 式確定沒有實數解, 證明完畢。 □

評註: 本題是困難的代數題。在領隊會議中, 此題以其多項式的形式而雀屏中選, 而暫時不採用代數領域中的不等式或函數方程的問題。此題與第 2 題相當, 一樣是得先猜中答案的形式, 才能加以論證; 而證明的過程中又分成幾個分類, 各自以不同程度的手法來論證。顯示出這道題目的深度。

問題 6: 平面上有 $n\geqslant 2$ 條線段, 其中任兩條線段都交叉, 並且任三條線段不共點。小杰要對每條線段各選一個端點放一隻青蛙, 並且讓青蛙面對另一個端點。然後他會拍 $n-1$ 次手; 他每拍一次手, 每隻青蛙都馬上向前跳到它所在的線段上的下一個交點。青蛙永遠不改變它前進的方向。小杰的願望是存在某種擺放青蛙的方法, 使得任意兩隻青蛙總是不會同時停在同一個交點上。

(a) 證明: 如果 n 是奇數, 小杰一定可以實現他的願望。

(b) 證明: 如果 n 是偶數, 小杰一定無法實現他的願望。

試題委員會公布的參考答案:

我們畫一個很大的圓將所有線段圍在內部。將每條線段向兩頭延伸成爲直線 $\ell_i\,(1 \leq i \leq n)$, 並設直線 ℓ_i 交圓於 A_i、B_i 兩點。

(a) 設 n 爲奇數。我們依某方向將圓上的所有交點 A_i、B_i 交錯標上「入」及「出」兩種符號。由於所有線段的交點都在圓的內部, 對任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i 與 B_i 之間剛好會有$n-1$ 個點。因爲 n 是奇數, 所以 A_i、B_i 這兩點必定其一被標爲「入」、而另一被標爲「出」。於是小杰可以將每一個線段上的青蛙擺在比較靠近「入」的端點; 我們宣稱: 這樣的擺法可以達成他的願望, 亦即: 對任意的 $i \neq j$, ℓ_i 與 ℓ_j 上的青蛙不會同時到達這兩條線段的交點。不失一般性, 我們可設 ℓ_i、ℓ_j 上的青蛙分別由 A_i、A_j 兩點出發。令 ℓ_i 與 ℓ_j 的交點爲 P。由「入」、「出」點的設計, 我們知道: 在 A_i 與 A_j 之間的圓弧上有奇點個點, 每一個點都屬於某條線段 ℓ_k。因爲 ℓ_k 只會和 A_iP 與 A_jP 這兩條線段的其中之一相交, 所以這裡共產生奇數個交點。對於其他的任一線段, 與 A_iP、A_jP 兩條線段的交點數必爲 0 或 2。所以除了 P 之外, 落在線段 A_iP 及 A_jP 的交點數目必爲奇數。但是, 如果兩隻青蛙同時到達 P 點, 線段 A_iP 與 A_jP 上的交點數目要相等, 故其和爲偶數: 此爲矛盾。故 (a) 小題得證。

(b) 當 n 爲偶數時, 不論小杰如何擺放青蛙, 在 A_i、B_i 中, 我們將背對青蛙前進方向位置的點標爲「入」, 另一則標爲「出」。由奇偶性的考慮, 易知圓上會有兩相鄰點同時被標爲「入」; 不失一般性設此兩點爲 A_i 及 A_j。令 Q 爲線段 A_iB_i 與 A_jB_j 的交點。因爲 A_i、A_j 中間沒有圓與直線的交點, 所以線段 A_iQ 與 A_jQ (除了 Q 之外) 必有相同數目的線段交點, 於是兩條線段上的青蛙就會同時停在 Q 點。故 (b) 得證。 □

評註: 本題爲漂亮的組合題, 由 n 的奇偶性來判別某種特列的配置是否存在。畫大圓將所有交點圍起來的想法, 曾經在 2015 年的亞太數學奧林匹亞競賽中出現過。後面的證明其實不會太複雜, 畫幾個小的情形就可猜出一般狀況, 是近年來較爲容易的第 6 題。

—本工作小組係由教育部委託國立中央大學, 於「中華民國參加 2016 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者爲林延輯助理教授, 任教國立台灣師範大學數學系—