數學傳播　40卷3期, pp. 44-49

運用微微對偶不等式證明一類齊次輪換對稱不等式

徐彥輝

1. 引言

筆者最近發現五個形似不等式, 即:

命題 1: 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $a+b+c\le \dfrac{a^4+b^4+c^4}{abc}$.

命題 2([1]): 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $\dfrac{a+b+c}{abc}\le \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

命題 3([2]): 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\le \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

命題 4: 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $a^{10}+b^{10}+c^{10}\le \dfrac{a^{12}}{bc}+\dfrac{b^{12}}{ca}+\dfrac{c^{12}}{ab}$.

命題 5: 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $a^2+b^2+c^2\le \dfrac{a^5+b^5+c^5}{abc}$.

其中, 命題 1 可由 $\dfrac{a^3}{bc}+b+c\ge 3a$, $\dfrac{b^3}{ac}+a+c\ge 3b$, $\dfrac{c^3}{ab}+a+b\ge 3c$, 三式相加即證得, 文 [1] 給出了命題 2 的一種證法, 文 [2] 給出了命題 3 一種巧妙而不簡單的證法。筆者由這五個不等式的相似性, 總覺得可以找到一種統一的方法證明這五個不等式。最後, 筆者終於找到了運用微微對偶不等式可以統一證明這五個形似不等式, 並且還可以對這五個不等式進行推廣。爲此, 先給出微微對偶不等式。

2. 微微對偶不等式

定理：設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $A'=\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$, 其中, $0\le a_{i1}\le a_{i2}\le \cdots\le a_{in}$, a'_{i1}, a'_{i2}, $\ldots$, a'_{in} 是 a_{i1}, a_{i2}, $\ldots$, a_{in} 的一個排列 (即 A' 的第 i 行是 A 的第 i 行的一個重排列), $i=1,2,\ldots,m$, $S(A)=\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\prod\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\Big)$, $S(A')=\sum\limits_{j=1}^{n}\Big(\prod\limits_{i=1}^{m}a'_{ij}\Big)$, 則 $S(A')\le S(A)$。

這個定理即爲微微對偶不等式. 爲了敘述方便起見, 稱 A 爲同序陣 (A 的各行元素不一定完全相同, 但各行元素的大小順序必須相同), A' 爲 A 的亂序陣 (即要求 A' 每一行中的元素分別是 A 中對應行元素的一個重排), 則有 A' 的列積和 $\le A$ 的列積和。當行數 $m=2$ 時, 微微對偶不等式即爲排序不等式。可見, 微微對偶不等式是排序不等式的推廣。爲了證明微微對偶不等式, 先證明一個排序原理 (不等式)。

排序原理：(a) 表非負數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, (b) 表非負數 $b_1,b_2,\ldots,b_n$, (a) 與 (b) 一對一相乘後相加, 同序數最大, 倒序數最小。

證明: 先假定只對換 i,j 兩個位置上的數, 其餘位置上的數不變。即若 $a_i<a_j$, $b_i<b_j$, 則 $a_ib_i+a_jb_j-(a_ib_j+a_jb_i)=(a_i-a_j)(b_j-b_j)>0$。可見, 在 i 和 j 兩個位置上, 將同序改爲倒序時, 和值將減小。再運用逐步調整法即可得證排序不等式。

微微對偶不等式的證明 [3]：考慮兩項 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 與 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}$, 不妨設 $a_{1i_1}\le a_{1j_1}$, $a_{2i_2}\le a_{2j_2}$, $\ldots$, $a_{ki_k}\le a_{kj_k}$, $a_{k+1i_{k+1}}\ge a_{k+1j_{k+1}}$, $\ldots$, $a_{mi_m}\ge a_{mj_m}$, 則 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\le a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}$, $a_{k+1i_{k+1}}\cdots a_{m,i_m}\ge a_{k+1j_{k+1}}\cdots a_{mi_m}$, 由排序原理有 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}a_{k+1j_{k+1}}\cdots a_{m,j_m}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{kj_k}a_{k+1i_{k+1}}\cdots a_{m,i_m}\ge a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{m,i_m}+a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{m,j_m}$, 即在此兩項中把倒序改爲同序後和不減少。經有限次改變後必可使 n 項中任兩項均無倒序, 此和變爲 $a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$。因若不然, 則必還有兩項有倒序在, 又每次改變和不減少, 所以, $a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}$ 爲最大, 即證畢。

微微對偶不等式是許多重要不等式的來源, 微微對偶不等式在追溯老不等式、製造新不等式、處理高難競賽題方面都具有特殊的效力, 微微對偶不等式的經典是積和 S 與和積 T 的矩陣形式, 精華是把一些不等式的證明歸結爲巧妙地構造一個矩陣, 恰當地排出一個矩陣. [4] 微

微對偶不等式尤其在處理齊次輪換對稱不等式時, 更是有著特殊的效力。爲此, 筆者先舉一個運用微微對偶不等式證明齊次輪換對稱不等式的簡單例子, 以說明筆者想到運用微微對偶不等式統一證明這五個形似不等式的來由。

例1: 設 $a, b, c \in R^+$, 求證: $a^3+b^3+c^3 \le a^2b+b^2c+c^2a$.

證明: 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。由對稱性, 不妨設 $a \ge b \ge c > 0$, 則 $a^2 \ge b^2 \ge c^2 > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \end{bmatrix}$. 即證畢。

可見, 若要證的不等式是齊次輪換對稱不等式, 就可考慮運用微微對偶不等式。在運用微微對偶不等式時, 先不妨假定變元之間一個大小順序關係, 然後構造一個矩陣。正如葉軍 (1992) 還指出: 運用微微對偶不等式的關鍵是巧妙地設計一個矩陣, 再恰當變換構造一個新矩陣。值得注意的是, 這種設計與變換, 常常與所證不等式本身的特點有關, 只要深入領會, 就能得其要領。[5]

3. 運用微微對偶不等式統一證明五個形似不等式及其推廣

命題 1 的證明: 即只要證 $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c) = a^2bc+b^2ca+c^2ab$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。由對稱性, 不妨設 $a \ge b \ge c > 0$, 則 $a^2 \ge b^2 \ge c^2 > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣, $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, 即證畢。

命題 2 的證明: 即只要證 $\dfrac{a+b+c}{abc} \le \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$, 即只要證 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c) = a^2bc+b^2ca+c^2ab$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。由對稱性, 不妨設 $a \ge b \ge c > 0$, 則 $ab \ge ac \ge bc > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} ab & bc & ca \\ ab & bc & ca \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} ab & bc & ca \\ ca & ab & bc \end{bmatrix}$, 即證畢。

命題 3 的證明: 即只要證 $a^8+b^8+c^8 \ge a^2b^2c^2(ab+bc+ca) = a^3b^3c^2+b^3c^3a^2+c^3a^3b^2$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性可設 $a \geq b \geq c > 0$, 則 $a^3 \geq b^3 \geq c^3 > 0$, $a^2 \geq b^2 \geq c^2 > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ b^3 & c^3 & a^3 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}$, 即證畢。

命題 4 **的證明**：即只要證 $\dfrac{a^{13}+b^{13}+c^{13}}{abc} \geq a^{10}+b^{10}+c^{10}$, 即只要證 $a^{13}+b^{13}+c^{13} \geq abc(a^{10}+b^{10}+c^{10}) = a^{11}bc+b^{11}ca+c^{11}ab$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性, 不妨設 $a \geq b \geq c > 0$, 則 $a^{11} \geq b^{11} \geq c^{11} > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} a^{11} & b^{11} & c^{11} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^{11} & b^{11} & c^{11} \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, 即證畢。

命題 5 **的證明**：即只要證 $a^5+b^5+c^5 \geq abc(a^2+b^2+c^2) = a^3bc+b^3ca+c^3ab$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性, 不妨設 $a \geq b \geq c > 0$, 則 $a^3 \geq b^3 \geq c^3 > 0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, 即證畢。

在此, 不難得出這五個形似不等式的幾個推廣命題。即:

推廣 1：設 $a_i \in R^+$, $i=1,2,\ldots,n$, 求證: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$.

推廣 2：設 $a_i \in R^+$, $i=1,2,\ldots,n$, $p,q \in R^+$, 求證: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^q \leq \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{3p+q}}{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^p}$.

推廣 3：設 $a_i \in R^+$, $i=1,2,\ldots,n$, 求證: $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i^{n-1}} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j\neq i} \dfrac{1}{a_j}$.

推廣 4：設 $a_i \in R^+$, $i=1,2,\ldots,n$, $m \geq 1$, 求證: $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{nm-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^m} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}$.

同理, 可運用微微對偶不等式證以上幾個推廣命題, 請讀者自證, 此處從略。

4. 運用微微對偶不等式證明其他的齊次輪換對稱不等式

其實, 葉軍先生 (1989) 就舉了八個不等式證明的例子來說明微微對偶不等式的運用。[6] 張運籌 (2014) 在《微微對偶不等式及其應用》這本書中用全新方法處理了 30 個簡單不等式、25 個高難競賽題、40 個書刊征解題、16 個著名不等式, 並製造了 10 個新不等式, 處理了 4 個高考不等式, 推廣了 4 個著名不等式, 留下了 25 個練習題。[4] 爲了突出強調微微對偶不等式在證明齊次輪換對稱不等式中的作用與效力, 筆者還想就此運用微微對偶不等式來證明其他幾個與前面五個形似不等式相似的齊次輪換對稱不等式。

例 2: 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $a+b+c\le\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}$.

證明: 即只要證 $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}\ge a+b+c$, 即只要證
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)=a^2bc+b^2ca+c^2ab$, 以下證明同命題 2。

例3(第31屆 IMO 預選試題): 已知 $x\ge y\ge z>0$, 求證: $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$.

證明: 即只要證 $\dfrac{x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2}{xyz}\ge x^2+y^2+z^2$, 即只要證 $x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\ge x^3yz+y^3xz+z^3xy$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由 $x\ge y\ge z>0$, 則 $xy\ge xz\ge yz>0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} xy & xz & yz\\ xy & xz & yz\\ x & z & y\end{bmatrix}\ge\begin{bmatrix} xy & xz & yz\\ xz & yz & xy\\ x & z & y\end{bmatrix}$, 即證畢。

例 4: 設 $a,b,c\in R^+$, 求證: $a+b+c\le\dfrac{a^3b+b^3c+c^3a}{abc}$.

證明: 即只要證 $a^3b+b^3c+c^3a\ge abc(a+b+c)=a^2bc+b^2ca+c^2ab$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性, 設 $a\ge b\ge c>0$, 則 $a^2\ge b^2\ge c^2>0$, $ab>ac\ge bc>0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2\\ ab & bc & ca\end{bmatrix}\ge\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2\\ bc & ca & ab\end{bmatrix}$, 即證畢。

例 5：已知 $x,y,z\in R^{+}$, 求證: $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}\geq\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$.

證明：即只要證 $\dfrac{x^4z^2+y^4x^2+z^4y^2}{x^2y^2z^2}\geq\dfrac{x^2z+y^2x+z^2y}{xyz}$, 即只要證 $x^4z^2+y^4x^2+z^4y^2\geq xyz(x^2z+y^2x+z^2y)=x^3z^2y+y^3x^2z+z^3y^2x$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性, 可設 $x\geq y\geq z>0$, 則 $xy\geq xz\geq yz>0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣 $\begin{bmatrix} xy & xz & yz\\ xy & xz & yz\\ y^2 & x^2 & z^2\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix} xz & yz & xy\\ xy & xz & yz\\ y^2 & x^2 & z^2\end{bmatrix}$, 即證畢。

例 6：設 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in R^{+}$, 且 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 證明: $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}\geq\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}$.

證明：由已知條件即只要證 $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1}\geq x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1}$, 這是一個齊次輪換對稱不等式, 可考慮運用微微對偶不等式。

由對稱性, 不妨設 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n>0$, 則由微微對偶不等式可構造矩陣

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_1\\ x_3 & x_4 & \cdots & x_2\\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1}\end{bmatrix},$$ 即證畢。

(致謝: 感謝審稿人對本文所提出的寶貴的修改意見!)

參考文獻

1. [德]亞瑟 · 恩格爾著, 舒五昌, 馮志剛譯。解決問題的策略 [M]。上海: 上海教育出版社, 244, 2005。
2. 蘇勇, 熊斌編著。不等式的解題方法與技巧(第二版)[M]。上海: 華東師範大學出版社, 135-136, 2012。
3. 葉宗泗。排序原理的推廣及其應用[J]。數學通報, 2, 31, 1981。
4. 張運籌編著。微微對偶不等式及其應用(第2版)[M]。合肥: 中國科學技術大學出版社, 再版前言, 內容簡介, 2014。
5. 葉軍。用微微對偶不等式推廣四個著名不等式[J]。數學的實踐與認識, 1, 80, 1992。
6. 葉軍。《微微對偶不等式》 設計八例[J]。數學通報, 6, 27-30, 1989。

—本文作者任教浙江溫州大學數信學院—