數學傳播　40卷3期, pp. 22-27

n 元算幾不等式的一個幾何證明

周伯欣

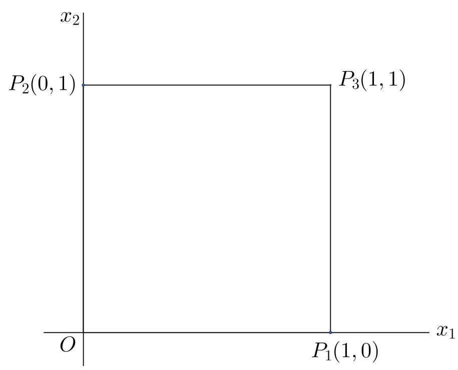
一、引言

關於 n 元算幾不等式的證明, 在 $n=2$ 的情況, 具有數種的無字證明 (proof without words), 主要利用平面幾何圖形特性, 以面積或是線段長度表示出算術平均數 $\dfrac{a_1+a_2}{2}$ 以及幾何平均數 $\sqrt{a_1\cdot a_2}$, 從圖形可輕易觀察兩者間的不等關係。楊瓊茹在科技部高瞻自然科學教學資源平台的文章彙整了 6 種無字證明[1]。而 Roger B. Nelsen 在其名著 "*Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*"[2]也列舉了數種無字證明。我在參考文獻 [1] 中提出了一個新無字證明, 所需的先備數學知識或許是目前無字證明中最少的。而關於 $n=3$ 的情況, 目前筆者僅在蔡宗佑先生所著《按圖索驥 — 無字的證明》[3]一書中見到, 然而其證明略嫌迂迴, 尚須引入一條引理始能論證。

我在參考文獻 [1] 中所提出的證明, 略經修改, 可以推廣至任意 n 維的情況, 而且不須援用任何引理。本文以下先從 $n=2$, 3 的情況討論起, 繪製出無字證明的圖形, 以做爲後半段推廣至一般 n 維 Euclid 空間的討論基礎。

二、$n=2,3$ 的情況

如圖一所示, 考慮 $\mathbb{R}^2$ 上的單位正方形 $I^2=\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_i\le 1, i=1,2\}$ 。



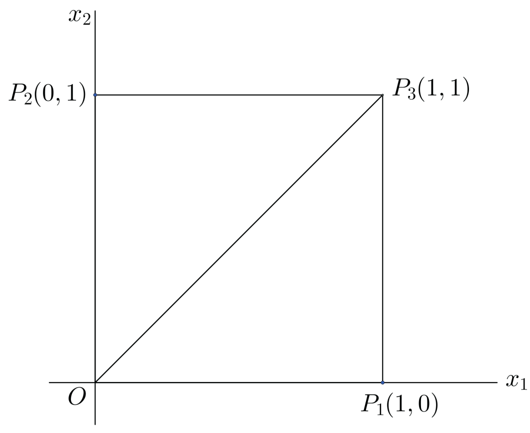
圖一

[1] http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=15748

[2] 肖占魁、徐沙鳳 (譯)。尼爾森: 數學寫真集 (第 1 季) 無須語言的證明。北京: 機械工業出版社,2014。(Roger B. Nelsen, 1993); 肖占魁、符穩聯 (譯)。尼爾森: 數學寫真集 (第 2 季) 無須語言的證明。北京: 機械工業出版社, 2014。(Roger B. Nelsen, 1993)。

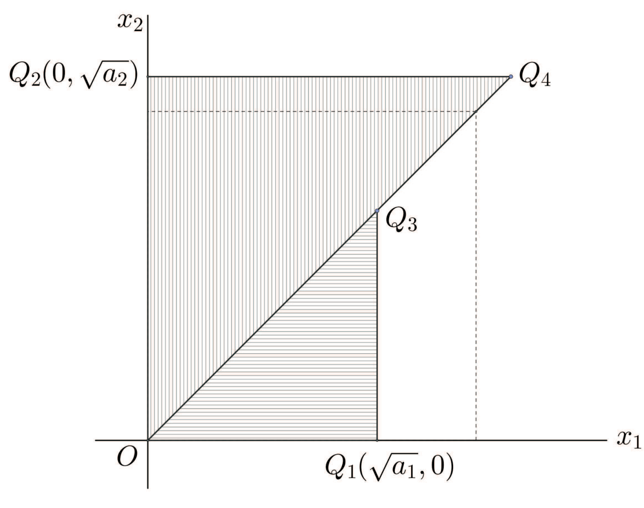
[3] 蔡宗佑。按圖索驥 — 無字的證明。臺北市: 三民書局股份有限公司, 2016。

接下來自原點作射線, 將單位正方形 I^2 切割爲兩個全等的三角形。如圖二所示。



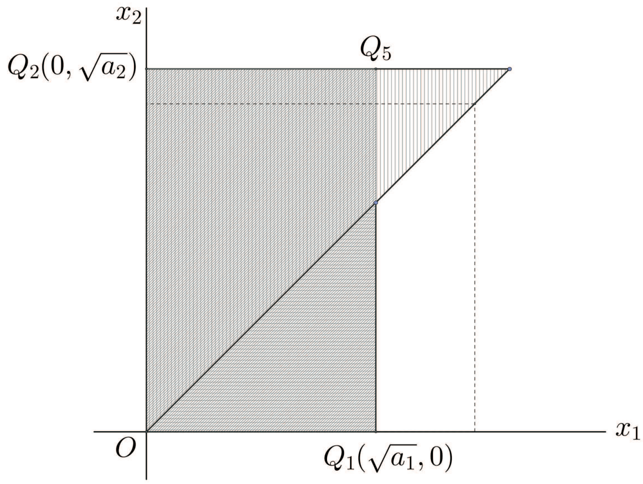
圖二

設 a_1, a_2 爲 2 個正實數。對於 $\triangle OP_1P_3$, 將其各邊伸縮 $\sqrt{a_1}$ 倍; 對於 $\triangle OP_2P_3$, 將其各邊伸縮 $\sqrt{a_2}$ 倍。如圖三所示。此地我們假定了 $a_1 \leq a_2$, 這樣的假定僅僅只是爲了討論方便, 完全不影響論證對於另一種情況 $(a_1 > a_2)$ 的有效性, 因爲我們總是可以將有限個實數按大小排序, 交換文字順序事實上對於算幾不等式並無影響。換句話說, 算幾不等式在對稱群下具備不變性。



圖三

觀察可知, 在 $\triangle OQ_1Q_3 \bigcup \triangle OQ_2Q_4$ 中, 包含著一塊長方形 $OQ_1Q_5Q_2$, 其長寬分別爲 $\sqrt{a_1}$ 與 $\sqrt{a_2}$, 而面積爲 $\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$。如圖四所示。



圖四

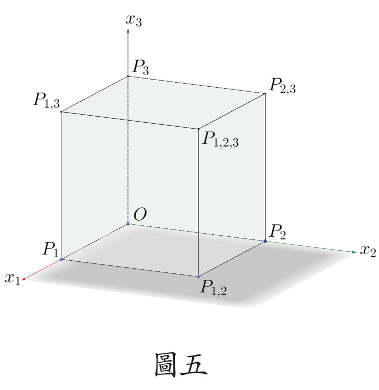
既然

$$長方形\, OQ_1Q_5Q_2 \ \subseteq\ \triangle OQ_1Q_3 \cup \triangle OQ_2Q_4,$$

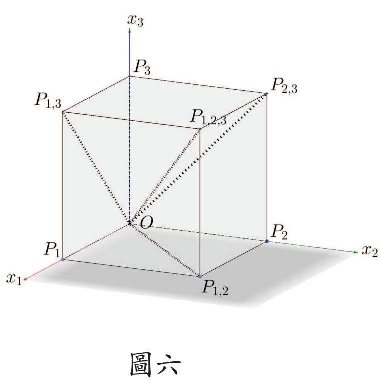
所以當然有

$$\sqrt{a_1\cdot a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}\ 。$$

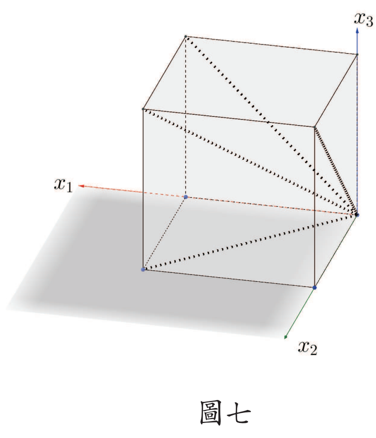
下面再看 $n=3$ 的情況。一樣首先考慮 $\mathbb{R}^3$ 中的單位立方體 I^3, 然後自原點 O 向各面頂點作射線, 此時可將單位立方體 I^3 分割爲 3 個全等的金字塔 (square pyramid)。每個金字塔的體積都正好是 $\dfrac{1}{3}$。如圖五、圖六、圖七所示。



圖五



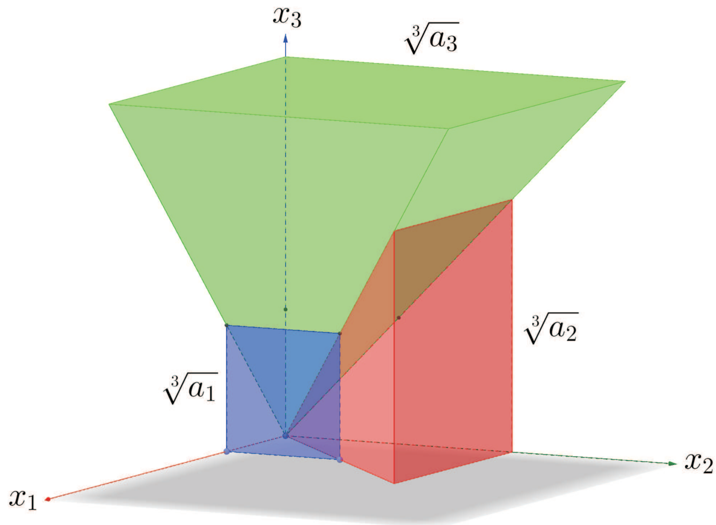
圖六



圖七

設 a_1, a_2, a_3 爲 3 個正實數, 分別對 3 個金字塔進行伸縮, 伸縮倍數分別爲 $\sqrt[3]{a_1}$, $\sqrt[3]{a_2}$, $\sqrt[3]{a_3}$。如圖八所示。經過伸縮後的金字塔, 體積分別爲 $\dfrac{a_1}{3}, \dfrac{a_2}{3}, \dfrac{a_3}{3}$。此地我們假定了 $a_1 \le a_2 \le a_3$,

這樣的假定僅僅只是爲了討論方便, 完全不影響論證對於其他情況的有效性, 老話一句, 算幾不等式在對稱群下具備不變性。

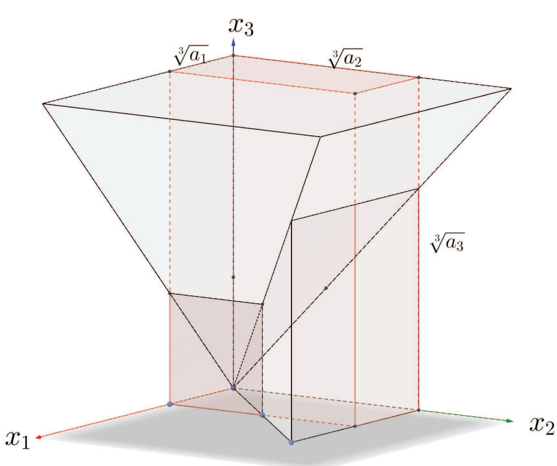


圖八

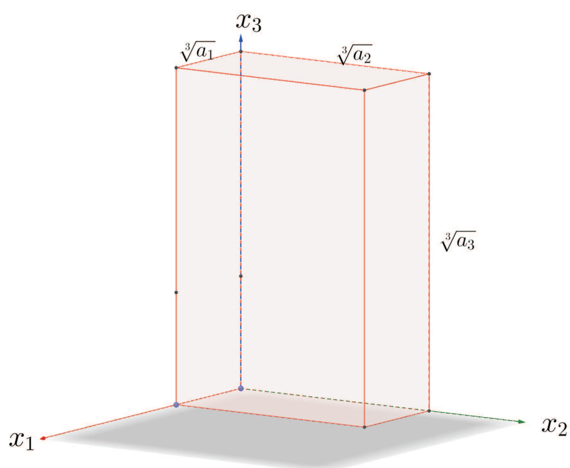
將這 3 個經伸縮過後的金字塔拼在一起, 所得到的新圖形體積爲 $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$。觀察知, 在此新圖形之中, 包含了一個長方體盒子, 長、寬、高分別爲 $\sqrt[3]{a_1}$, $\sqrt[3]{a_2}$, $\sqrt[3]{a_3}$, 因而體積爲 $\sqrt[3]{a_1}\cdot\sqrt[3]{a_2}\cdot\sqrt[3]{a_1}=\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}$。如圖九、圖十所示。

由於長方體盒子包含在三個大小不一的金字塔構成的新圖形之中, 因此從體積關係自然可得三元算幾不等式

$$\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot a_3}\leq\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ 。$$



圖九



圖十

三、任意 n 維的情況

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 考慮單位方塊 $I^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid 0\le x_i\le 1, i=1,\ldots,n\}$。如同我們在 $n=2,3$ 一般, 由原點 O 向各點作射線, 將單位方塊 I^n 分割爲 n 個超金字塔 (Hyper square pyramid), 記此 n 個超金字塔爲 $\mathrm{HSP}_i=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid 0\le x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\le x_i, 0\le x_i\le 1\}$, $i=1,\ldots,n$。顯然有 $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{HSP}_i=I^n$。又任意兩個超金字塔 HSP_i 與 HSP_j 形狀必是全等的 (亦即 $\mathrm{HSP}_i\simeq\mathrm{HSP}_j, 1\le i,j\le n$)。而任意兩個相異超金字塔的交集必然包含於 $n-1$ 維子空間之中, 所以有 $\mathrm{vol}(\mathrm{HSP}_i\bigcap \mathrm{HSP}_j)=0$, $i\ne j$。既然單位方塊係由 n 個全等的超金字塔所構成, 且彼此交集的體積爲零, 所以得到 $\mathrm{vol}(\mathrm{HSP}_i)=\dfrac{1}{n}$, $i=1,\ldots,n$。

考慮任意 n 個正實數 $a_1,\ldots,a_n$, 不失一般性, 我們假設 $a_1\le\cdots\le a_n$。對於第 i 個數 a_i, 定義矩陣

$$A_i=\begin{bmatrix}\sqrt[n]{a_i} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sqrt[n]{a_i}\end{bmatrix},$$

並由此誘導出 $\mathbb{R}^n$ 中的伸縮變換 $T_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $T_i(\vec{x})=A_i\vec{x}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$。對於第 i 個超金字塔 HSP_i, 應用伸縮變換 T_i, 定義 $\Omega_i=T_i(\mathrm{HSP}_i)=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid 0\le x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\le x_i,\ 0\le x_i\le \sqrt[n]{a_i}\}$, 此舉之幾何意義正是將 HSP_i 各邊伸縮 $\sqrt[n]{a_i}$ 倍。所以可知

$$\mathrm{vol}(\Omega_i)=\frac{1}{n}\cdot(\sqrt[n]{a_i})^n=\frac{a_i}{n}\ 。$$

將所有經伸縮過的超金字塔拼在一起, 即考慮集合 $\bigcup_{i=1}^n\Omega_i$。由於任兩個伸縮過後的金字塔的交集的體積還是 0, 所以我們可知

$$\mathrm{vol}\Big(\bigcup_{i=1}^n\Omega_i\Big)=\sum_{i=1}^n\mathrm{vol}(\Omega_i)=\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{n}=\frac{a_1+\cdot+a_n}{n}\ 。$$

我們再考慮超盒 $K=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid 0\le x_i\le\sqrt[n]{a_i}, i=1,\ldots,n\}$, 其體積 $\mathrm{vol}(K)=\sqrt[n]{a_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_n}$。任取 K 中一點 $P=(x_1,\ldots,x_n)$, 命 $x_M=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$, 則有 $0\le x_j\le x_M$, $0\le x_M\le\sqrt[n]{a_M}$, $j=1,\ldots,n$, $j\ne M$, 由此得 $P\in\Omega_M$, 也就是有 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^n\Omega_i$。考慮兩集合的體積關係, 我們立即得到

$$\mathrm{vol}(K)\le\mathrm{vol}\Big(\bigcup_{i=1}^n\Omega_i\Big). \tag{1}$$

也就有以下定理:

定理 (算幾不等式): 設 $a_1,\ldots,a_n$ 是任意 n 個正實數, 則有

$$\sqrt[n]{a_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_n}\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\text{ 。}$$

一般所見到的算幾不等式的敘述, 都是以非負實數爲討論範疇。而我們這裡僅侷限於正實數的情況, 不過非負實數的情況與此地相較也只不過是增加討論某幾數爲 0 的可能性, 而且不難看出, 只要有一數爲 0, 不等式顯然成立。真正有意思的部分應該是全部 n 個數皆爲正實數的情況。

下面我們來討論不等式等號成立的充要條件。當 $a_1=\cdots=a_n$ 時, 不等式的等號顯然成立。反過來, 如果已知不等式的等號成立, 也就是有

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_n},$$

這意味著 $\operatorname{vol}\big(\bigcup_{i=1}^n\Omega_i\big)=\operatorname{vol}(K)$。倘若 $a_1,\ldots,a_n$ 這 n 個數並未完全相等, 我們選取其中最大者, 假定是 a_M。此時觀察截面 $\{(x_1,\ldots,x_n)\mid 0\leq x_1,\ldots,x_{M-1},x_{M+1},\ldots,x_n\leq x_M, x_M=\sqrt[n]{a_M}\}$, 可以發現該面比超盒 K 的任一面都大, 就幾何眼光看來, 此意味著在 $\bigcup_{i=1}^n\Omega_i$ 之中, Ω_M 將會「凸」出來一角, 這將使得超盒 K 的體積必小於 $\bigcup_{i=1}^n\Omega_i$ 的體積, 此與我們假定的前提矛盾, 因此 $a_1,\ldots,a_n$ 必完全相等。

致謝

本文之完成, 得到中央研究院數學研究所張清煇研究員的悉心指導, 才讓作者有機會繼續在《數學傳播》上野人獻曝, 在此致上最高謝意。另外作者感謝審稿人的細心審閱, 提出了相當多有益的建議。此外感謝台北鵬展補習班的李家源主任提供作者寬鬆的工作環境, 讓作者在課餘之暇還能進行一些小小研究。

參考文獻

1. 周伯欣。二元算幾不等式的一個無字證明 — 附記一段學思歷程。數學傳播季刊, 40(2), 35-38, 2016。

—本文作者現任教台北鵬展補習班, 並主持「宇宙數學教室」數學部落格—