數學傳播　40卷3期, pp. 14-21

曲面幾何與廣義相對論*

王慕道

1. 前言

在這個演講中我要談談兩個關於三維空間 $\mathbf{R}^3$ 中曲面的古典定理, 以及它們在 Minkowski 時空空間 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中的推廣。這些推廣與廣義相對論中一些基本的問題緊密相關, 例如: 重力能量 (gravitational energy) 以及宇宙審查 (cosmic censorship)。所以我們討論它們不僅是對上面的數學感興趣, 更是因爲它們與物理的關連。

本文中我們假設所有的2維曲面都和球面有相同拓樸型態 (也就是二者之間有一個可逆的連續映射)。

2. 回顧 $\mathbf{R}^3$ 與 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中的曲面幾何

考慮一個經由 $X : \Sigma \hookrightarrow \mathbf{R}^3$ 嵌入 $\mathbf{R}^3$ 的曲面 Σ, $X = (X^1, X^2, X^3)$ 代表嵌入 (embedding) 的座標函數。令 u^a, $a = 1, 2$ 代表 Σ 上的局部座標系統, 所以每個 X^i, $i = 1, 2, 3$ 都看成在局部定義的 u^a 的函數。由此導出此嵌入的度量或其第一基本形式 (first fundamental form) 如下:

$$\sigma_{ab} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X^i}{\partial u^a}\frac{\partial X^i}{\partial u^b}$$

這是曲面上正定的對稱 2-張量, 這個度量決定了曲面所有的內在幾何。

以 S^2 爲例

取 $u^1 = \theta$, $u^2 = \phi$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, $X^1(\theta,\phi) = \sin\theta\sin\phi$, $X^2(\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi$, $X^3(\theta,\phi) = \cos\theta$, 則 $\sigma_{11} = 1$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, $\sigma_{22} = \sin^2\theta$.

所以是正定的對稱2-張量。

對於 $\mathbf{R}^3$ 裡的曲面 Σ, 最重要的外在幾何量是均曲率 H, 它與面積的變動有關。假設 Σ 是一個閉嵌入曲面, $|\Sigma| = \int_\Sigma d\mu$ 代表它的面積, 如果沿著這個曲面的向外法線方向, 以 s (s

---

*本文爲作者在 2013 數學年會大會演講 Surface Geometry and General Relativity 的講稿中譯。

是 Σ 上的函數) 爲速度將 Σ 變形, 面積的變化是

$$\int_\Sigma sH \ d\mu$$

這裡 $d\mu$ 是 Σ 上的度量導出的面積元素。$H=0$ 對應到最小曲面, $H=$常數對應到均曲率曲面 (CMC), 這是面積泛函的臨界點。

對於嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ Minkowski 時空中的曲面 $X:\Sigma\hookrightarrow\mathbf{R}^{3,1}$, $X=(X^0,X^1,X^2,X^3)$ 由此導出的度量爲

$$-\frac{\partial X^0}{\partial u^a}\frac{\partial X^0}{\partial u^b}+\sum_{i=1}^3\frac{\partial X^i}{\partial u^a}\frac{\partial X^i}{\partial u^b}$$

當上面的度量爲正定時, 我們稱 Σ 爲類空間 (spacelike) 曲面。

另外還有均曲率向量場 $\vec{H}$, 這是一個法向量場, 量度曲面變形時面積的變化。明確地說, 對於任意法變分場 $\vec{V}$ (normal variational field), 均曲率向量場滿足第一變分公式 (first variational formula)

$$\delta_{\vec{V}}|\Sigma|=-\int_\Sigma <\vec{H},\vec{V}> \ d\mu.$$

$\delta_{\vec{V}}|\Sigma|$ 代表曲面沿著方向 $\vec{V}$ 的面積變化, 而 $d\mu$ 是 Σ 上的度量導出的面積元素。

在相對論中, 光在虛空中行進, 從時空中的曲面發射出來的光束可以發散也可以匯聚。在廣義時空中存在所謂的囚陷曲面 (trapped surface), 所有發出的光束都會收斂, 顯示在這個曲面附近有很強的重力場。Penrose 奇異點定理 [10, 18, 23] 主張囚陷曲面的存在可引致未來時空奇異點的形成。

所以科學家們希望可以用均曲率向量場得到好的重力能量的測量。事實上, 有數個已知的想法, 如 Hawking 能量, Brown-York 能量 [5] 以及 Liu-Yau [13], Wang-Yau [24] 能量, 都是以均曲率向量來定義的準局部能量 (quasilocal energy)。

3. 等度量的曲面嵌入

讓我們先回顧 $\mathbf{R}^3$ 的 Weyl 等度量嵌入問題: 在2維球面 Σ 上給定一個正定的對稱 2-張量 σ_{ab}, 是否存在一個嵌入 $X:\Sigma\to\mathbf{R}^3$ 使其導出的度量 $\sum_{i=1}^3\frac{\partial X^i}{\partial u^a}\frac{\partial X^i}{\partial u^b}$ 和 σ_{ab} 一樣? 這裡有三個未知的座標函數 X^1, X^2, X^3, 是 u^1, u^2 的函數, 還有對應於 σ_{ab} 分量的三個方程。

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$$

注意 $\sigma_{12}=\sigma_{21}$。

$$\begin{cases}\sigma_{11} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial u^1}\frac{\partial X^i}{\partial u^1}\\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial u^1}\frac{\partial X^i}{\partial u^2}\\ \sigma_{22} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial u^2}\frac{\partial X^i}{\partial u^2}\end{cases}$$

當 σ_{ab} 的高斯曲率爲正時, 這是一個非線性橢圓偏微分方程組, 由 Nirenberg [17] 和 Pogorelov [21] 解決。解集合在剛體運動的對稱之下不變, 也就是曲面在 $\mathbf{R}^3$ 中經旋轉、反射或平移, 其解集合不變。將此方程線性化, 對於變量 δX^i 其線性化的方程爲

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \delta X^i}{\partial u^a}\frac{\partial X^i}{\partial u^b}+\sum_{i=1}^3 \frac{\partial X^i}{\partial u^a}\frac{\partial \delta X^i}{\partial u^b}=0.$$

顯然, $\delta X^1=\Sigma_{j=1}^3 a_j^i X^j,\quad a_j^i=-a_i^j$ 是對應於旋轉的解。

但當我們試著將曲面經映射等度量嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ 時, 立即面臨方程是「不足決定」系統 (underdetermined system) 的問題, 有四個未知座標函數卻只有三個方程, 要得到任何形式的解的唯一性, 必須加上至少一個條件, 我們將加上從考量廣義相對論中準局部能量, 自然而來的一個條件。

在牛頓重力學中 $\Delta\Phi=4\pi\rho$, 其中 Φ 是位勢 (potential), 而 ρ 是質量密度, 總質量可以由積分 ρ 得到, 即 $\int_\Omega \rho$。但是廣義相對論中的重力有個根本的難題, 它與其它物理理論不同的是, 沒有質量或能量密度。想當然耳的將質量密度積分得到質量, 這個式子對廣義相對論的重力而言沒有意義。另一方面, 由散度定理(divergence theorem), 牛頓重力中的總質量等於邊界曲面 $\partial\Omega$ 上的流量積分。因此推想在類空間的域 Ω 上的重力或能量可以經由邊界 $\partial\Omega$, 這個二維的曲面上的積分來估算。1982 年 Penrose [20] 將廣義相對論中未解決的主要問題列表, 第一個問題就是, 爲廣義時空中的曲面 $\Sigma=\partial\Omega$ 恰當地定義出準局部的能量 — 動量 (質量) (quasi-local energy-momentum(mass))。

Einstein-Hilbert 作用的 Hamilton-Jacobi 分析暗示了下面的作法 (Brown-York [5], Hawking-Horowitz [11]): 對於廣義時空 N 中的 Σ 找一個基地狀態(ground state), 即最能與 Σ 在 N 中的幾何「匹配」將 Σ 嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ 的等度量嵌入。這個嵌入在 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中的像稱爲參考曲面, 目的在於希望能經由等度量嵌入來操控內具的幾何, 從物理曲面及參考曲面兩種外在幾何的差異, 判讀出「重力能量」。

Wang-Yau [24] 的作法是考慮廣義時空 N 中的2維類空間閉曲面 Σ 上的幾何數據, 這些數據包括其上由 N 上度量導出的度量 σ_{ab} 以及均曲率向量 $\vec{H}$, 針對每一個將 Σ 等度量嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ 所導出的 σ_{ab} 定義其準局部能量。這個定義滿足重要的正質量及剛性的性質, 並且與一般爲人接受的其它觀念一致。

至於準局部質量, 我們知道在特殊相對論中, 能量取決於觀測者, 而質量則是所有觀測到

的能量的最小值。類比於此, 在定義準局部質量時, 我們對所有等度量嵌入所得的準局部能量取其最小。這個 Euler-Lagrange 方程就是「最佳嵌入方程 (optimal embedding equation)」, 這是一個對時間座標的四階偏微分方程, 再加上等度量嵌入的方程, 最後我們得到四個方程, 四個未知的偏微分方程組。

4. 晚近的應用

我們在這一節討論廣義相對論中守恆量的應用。Penrose 列出來的問題中, 第二個問題是: 爲準局部角動量下一個恰當的定義。在特殊相對論中, 守恆量是由 Killing 場導出 (Killing 場是黎曼流形或擬黎曼流形上, 保持度量的向量場, 以德國數學家 Wilhelm Killing(1847-1923) 命名), 這些場對應於 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中的連續對稱 (等度量)。舉例來說, 旋轉 Killing 場 $X^1\frac{\partial}{\partial x^2}-X^2\frac{\partial}{\partial x^1}$ 定出對 X^3 軸的角動量。但是, 在廣義時空中沒有連續對稱也沒有 Killing 場。

對於物理時空中的曲面 Σ, Chen-Wang-Yau [6] 的想法是藉助 Σ 嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ 的最佳等度量嵌入將 $\mathbf{R}^{3,1}$ 上的 Killing 場帶回 Σ 上, 所有守恆量如能量, 線性動量, 角動量和重心都可以如此定義, 更重要的是探討了這些守恆量的動力以及愛因斯坦方程的關係。

愛因斯坦方程是時空中 Lorentzian 度量 $g_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 的二階偏微分方程組。最簡單的真空愛因斯坦方程爲 $R_{\mu\nu} = 0, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 其中 $R_{\mu\nu}$ 爲 $g_{\mu\nu}$ 的 Ricci 張量。

愛因斯坦方程可以寫成雙曲偏微分方程組的初始值問題。給定初始值 $(M,\ g(0),\ k(0))$ 其中 M 爲流形, $g(0)$ 代表其上導出的度量, $k(0)$ 表第二基本型(second fundamental form), 對於每一個愛因斯坦方程的解 $(M,\ g(t),\ k(t))$ 我們賦予守恆量 $e(t)$, $p^i(t)$, $J_i(t)$ 和 $C^i(t)$ 分別對應能量, 線性動量, 角動量和重心。[6] 中證明在愛因斯坦演化方程的非線性脈絡之下, 下式成立

$$e(\partial_t C^i(t)) = p^i$$

以及

$$\partial_t J_i(t) = 0$$

第一式是熟悉的古典公式 $m\dot{x} = p$ 的相對論版本, 就我們所知這是第一次證明出它與愛因斯坦方程一致。

5. Minkowski 不等式和 Penrose 不等式

在下半部的講演中我要討論和 Brendle, Hung 合作的 [3, 4]中的二個不等式: 古典微分幾何的 Minkowski 不等式以及廣義相對論中的 Penrose 不等式。

令 Σ 爲嵌入 $\mathbf{R^3}$ 中的閉曲面。前面提到 $\int_\Sigma H\, d\mu$ 對應面積在單位速度 $(s = 1)$ 之下的

改變, 對於 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面 Minkowski 不等式 [16] 敘述如下:

$$\text{對於}\mathbf{R}^3 \text{ 中的閉凸曲面 } \Sigma, \quad \int_\Sigma H\ d\mu \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|},$$

$|\Sigma|$ 代表 Σ 的面積。這個定理在高維也成立, 而且由 Huisken, Guan-Li [9] 推廣到均凸, 星形的超曲面。對於 $\mathbf{R}^3$ 中以 R 爲半徑的 2-維球面, 上式左手邊爲

$$\int H\ d\mu = \frac{d}{dR}(4\pi R^2) = 8\pi R.$$

另一方面, 上式右手邊爲 $\sqrt{16\pi\cdot 4\pi R^2} = 8\pi R$。此時不等式是等式, 若且唯若 Σ 是圓球面, 不論半徑爲何。

現在考慮時空中的類空間2維曲面, 我們曾定義均曲率向量場 $\vec{H}$ 如下:

$$\delta_{\vec{V}}|\Sigma| = -\int_\Sigma < \vec{H}, \vec{V} >\ d\mu.$$

就如前面提到的, 在廣義相對論的脈絡下, 人們感興趣的是量度從 Σ 上射出的光線發散的程度。我們可以取 Σ 上的兩個零法向量場 (null normal vector field) L 及 $\underline{L}$ 即 $< L, L >= 0$, $< \underline{L}, \underline{L} >= 0$, $< L, \underline{L} >= -2$。我們稱 $-\int_\Sigma < \vec{H}, L >\ d\mu$ 及 $-\int_\Sigma < \vec{H}, \underline{L} >\ d\mu$ 爲 2-維曲面 Σ 在廣義時空中的零展開 (null expansion)。

舉例來說, 對於曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^{3,1}$, 若 ν 爲 Σ 指向外部的單位法向量, 可以取 $L = \frac{\partial}{\partial t} + \nu$ (向外), $\underline{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu$ (向內), 在這個情況一個 (向外) 展開爲正, 另一 (向內) 則爲負。對於彎曲時空中的囚陷曲面, 兩種展開都是負的。

Penrose 在他原先關於宇宙審查 (亦即時空的每一個奇異點都隱身在黑洞之後, 因此看不到) 的論文中提出下面的猜想:

猜想 1 (Penrose [19])**.** 對於一個 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中「過去零凸的」閉嵌入類空間 *2*-維曲面 Σ, 經過正規化使得 $< \frac{\partial}{\partial t}, \underline{L} >= -1$, 則

$$\int_\Sigma < \vec{H}, \underline{L} >\ d\mu \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|} \qquad (*)$$

在此「過去零凸的」是指 Σ 的過去光錐*(past null cone, or past light cone)* 可以沿著 $-\underline{L}$ 的方向平滑地延伸到無窮遠。而在 *Minkowski* 時空中的光錐爲 $\{(t,x,y,z)|-t^2+x^2+y^2+z^2 = 0\}$.

Minkowski 不等式給出曲面面積變化率和曲面面積的關係。Penrose 不等式原來是給出黑洞質量和黑洞面積的關係。在特別的 null dust 時空中, 黑洞可爲 Minkowski 時空中的一般曲面, 而黑洞質量可與面積變化率 (或均曲率積分) 聯結, 因此有了上面的不等式。

Gibbons [8] 觀察到若 $\Sigma \subset \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{R}^{3,1}$, 且選擇上述的 L, $\underline{L}$, 那麼 (*) 就是古典的 Minkowski 不等式。

黎曼幾何中在漸近平坦的情形下有 Penrose 不等式 (Huisken-Ilmanen [12],Bray)

$$16\pi(ADMmass) \geq \sqrt{16\pi|\Sigma|}$$

的確, 在漸近零的情形之下, (*) 對應於上式。

Tod [22] 證明 (*) 對於 $\mathbf{R}^{3,1}$ 中(一點的) 光錐上的曲面成立。另外也有些推廣, 見 Mars [14] 和 Mars-Soria [15]。但是對於 Minkowski 時空中的一般曲面, (*) 仍只是一個猜想。

回到 Minkowski 不等式, 微分幾何學家對於將不等式推廣到其它空間形式 (space form) 的曲面極感興趣。其中 Gallego 和 Solanes [7] 研究雙曲空間的情形, 證明對於 $\mathbf{H}^3$ 中的凸曲面

$$\int_\Sigma H \; d\mu \geq 2|\Sigma|$$

在此, $\mathbf{H}^3$ 代表三維常負曲率 -1 的雙曲空間, 其黎曼度量爲 $dr^2+\sinh^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)$。在 $\mathbf{H^3}$ 中, 半徑爲 r 的測地球其面積爲 $4\pi\sinh^2 r$, 所以 $\int_\Sigma H \; d\mu = \frac{d}{dr}(4\pi\sinh^2 r) = 8\pi\sinh r\cosh r$, 而右手邊則是 $2|\Sigma| = 8\pi\sinh^2 r$。這是一個漂亮的不等式, 但等號永遠無法企及。

另一方面, 我們可以將雙曲空間 $\mathbf{H^3}$ 等度量地嵌入 $\mathbf{R}^{3,1}$ 成爲 $\{(t,x,y,z)|t>0\ ,-t^2+x^2+y^2+z^2=-1\}$。但是對於 $\mathbf{H^3}$ 中的 2-維曲面, 甚至連 $\int_\Sigma < \vec{H}, L > \; d\mu$ 爲什麼應該爲正都不清楚, 不過 Penrose 不等式可以爲 Σ 預測一個 Minkowski 類型的最佳不等式 (sharp inequality)。

更一般以及高維的不等式見 [3]。其證明涉及「反均曲率流 (inverse mean curvature flow)」, 一個新的在靜止真空時空的單調公式 (monotonicity formula), Brendle [2] 的一個 Heintze-Karcher 類型的不等式, 以及 Beckner [1] 在球面上的最佳 Sobolev 不等式。

這個證明讓我們可以將不等式推廣到更有物理意涵的時空, 並且做出下面的猜測:

猜想 2 ([4])**.** 對於在 *Schwarzschild* 時空中的任意類空間過去零凸的*2*-維曲面 Σ*,* 下列不等式成立*:*

$$-\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma < \vec{H}, L > \;\; d\mu \; + \; m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}}$$

這裡 m 是 *Schwarzschild* 時空的總質量。L 則是經過選取使其對偶零法線 *(dual null normal)* $\underline{L}$ 滿足 $< \underline{L}, \frac{\partial}{\partial t} >= -1$*,* $\frac{\partial}{\partial t}$ 是 *Killing* 場。

Schwarzschild 時空是以德國物理學家及天文學家 Karl Schwarzschild (1873～1916) 命名的時空。他在愛因斯坦發表廣義相對論後不久, 發表現在所稱的 Schwarzschild 度量, 這

是愛因斯坦方程的解, 描述在一個球形的質量外部真空狀態 (即電荷、角動量及宇宙常數均爲零) 下的重力場。它能用來描述緩慢轉動的天文物體, 例如許多星球包括地球和太陽。

[4] 裡證明了這個猜測在數個重要的情形成立, 但是一般的情形仍有待證明。總之, $\mathbf{R^3}$ 的曲面幾何與時空中 (餘維爲2) 的曲面關係密切。物理的預測啟發了數學上的成果, 另一方面, 數學的結果又自然地賦予物理新的樣貌。

参考資料

1. W. Beckner, Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality, *Ann. of Math.*, 138, 213-242, 1993.
2. S. Brendle, Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds, *Publ. Math. IHÉS*, 117, 247-269, 2013.
3. S. Brendle, P.-K. Hung, and M.-T. Wang, A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Anti-deSitter-Schwarzschild manifold, to appear in *Comm. Pure Appl. Math.*
4. S. Brendle and M.T. Wang, A Gibbons-Penrose inequality for surfaces in Schwarzschild spacetime, *Comm. Math. Phys.*, 330, 33-43, 2014.
5. J. D. Brown and J. W. York, Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action, *Phys. Rev. D* (3), 47, no.4, 1407-1419, 1993.
6. P.-N. Chen, M.-T. Wang, and S.-T. Yau, Conserved quantities in general relativity: from the quasi-local level to spatial infinity, *Comm. Math. Phys.*, 338, no. 1, 31-80, 2015.
7. E. Gallego and G. Solanes, Integral geometry and geometric inequalities in hyperbolic space, *Differential Geom. Appl.*, 22, 315-325, 2005.
8. G.W. Gibbons, Collapsing shells and the isoperimetric inequality for black holes, *Class. Quantum Grav.* 14, 2905-2915, 1997.
9. P. Guan and J. Li, The quermassintegral inequalities for k-convex starshaped domains, *Adv. Math.*, 221, 1725-1732, 2009.
10. S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The large scale structure of space-time, *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, No. 1. Cambridge University Press, London-New York, 1973. xi+391 pp.
11. S. W. Hawking and G. T. Horowitz, The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms, *Classical Quantum Gravity*, 13, no.6, 1487-1498, 1996.
12. G. Huisken and T. Ilmanen, The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, *J. Diff. Geom.*, 59, 353-437, 2001.
13. C. C. Liu and S. T. Yau, Positivity of quasilocal mass, *Phys. Rev. Lett.*, 90, 231102, 2003.
14. M. Mars, Present status of the Penrose inequality, *Class. Quantum Grav.* 26, 193001, 59 pp., 2009.
15. M. Mars and A. Soria, On the Penrose inequality for dust null shells in the Minkowski spacetime of arbitrary dimension, *Class. Quantum Grav.*, 29, 135005, 2012.

16. H. Minkowski, Volumen und Oberfläche, *Math. Ann.* 57, 447-495, 1903.
17. L. Nirenberg, The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6, 337-394, 1953.
18. R. Penrose, Gravitational collapse and space-time singularities, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 57-59, 1965.
19. R. Penrose, Naked singularities, *Ann. New York Acad. Sci.*, 224, 125-134, 1973.
20. R. Penrose, Some unsolved problems in classical general relativity, *Seminar on Differential Geometry*, 631-668, *Ann. of Math. Stud.*, 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.
21. A. V. Pogorelov, Regularity of a convex surface with given Gaussian curvature. (Russian) *Mat. Sbornik N.S.*, 31 (73), 88-103, 1952.
22. K.P. Tod, Penrose quasilocal mass and the isoperimetric inequality for static black holes, *Class, Quantum Grav.*, 2, L65-L68, 1985.
23. R. M. Wald, General relativity, University of Chicago Press, Chicago, IL, xiii+491 pp., 1984.
24. M.-T. Wang and S.-T. Yau, Quasilocal mass in general relativity, *Phys. Rev. Lett.*, 102, no. 2, no. 021101, 2009.

—本文作者任教美國哥倫比亞大學數學系—