數學傳播 40卷2期, pp. 94-96

教師應該敢於直接面對學生的“質疑”

趙國瑞

學完《畢氏定理》, 筆者引導學生對《畢氏定理》章節的內容進行了復習。復習完畢, 例行佈置了一組練習題, 其中一道題目如下:

如圖1, 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90°$, $AC=6$cm, $BC=8$cm, CD是斜邊上的高, 求 CD 的長。

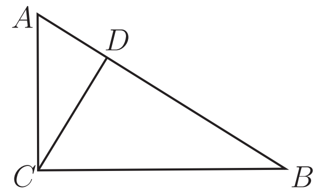

圖1

解答此題顯然要用到畢氏定理和三角形的面積公式, 即先由畢氏定理求出 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$, 然後由三角形的面積公式利用等積思想, 得 $\dfrac{1}{2}AC{\cdot}BC=\dfrac{1}{2}AB{\cdot}CD$, 即 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$。

於是 $6\times 8=10\times CD$, 所以 $CD=4.8$cm。

講完此題, 一位學生突然提出這樣一個問題:

如圖1, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 是高, 且 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$, 能不能判斷 $\triangle ABC$ 是直角三角形?

提出這個問題的學生數學成績並不突出, 只是班上的一位中等生。但說實在話, 這個問題卻有點讓我始料未及。我對這個問題進行了短暫的思考, 想到如果應用三角形的面積公式 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$ (其中 a, b 表示三角形的兩邊, α 表示這兩邊的夾角, 即三角形的面積等於兩邊的長與其夾角的正弦值的乘積的一半), 這個問題不難回答, 可這個公式屬於高中內容, 用這個公式給學生講解顯然不合適。除了應用這種方法, 我也對這個問題進行了深思, 不過確實想不出其他可以讓初中生易明白快接受的方法。

在聽其他老師講課時我也見到過類似的情形：一次學校數學組聽一位年輕教師講“畢氏定理的逆定理”, 課堂上一位學生提出這樣一個問題 若一個三角形的三邊長分別爲 120, 3599, 3601, 那麼這個三角形是否爲直角三角形? (事後知道這道題出自一本數學教輔資料)。可能由於數字較大, 加上那位年輕教師教學經驗不足 (他認爲要先計算 $120^2, 3599^2, 3601^2$, 然後再看 120^2+3599^2 與 3601^2 是否相等, 其實可以先利用平方差公式計算 3601^2-3599^2, 然後再看 3601^2-3599^2 與 120^2 是否相等, 這樣問題就變得簡單多了), 一時半會不能給出解答, 於

是年輕教師就以“給出的數字太大, 平時測驗或大型考試不會出現這樣大的數字, 提出的問題沒有什麼價值” 爲由, 搪塞過去, 並微有怒色 (年輕教師認爲學生在刁難他, 當著衆多學生和老師的面讓他出醜)。課後在點評時, 數學組同仁認爲, 學生能夠提出問題, 說明學生在認真聽講並積極思考問題, 即使本題要通過計算 120^2+3599^2 與 3601^2 是否相等的方法來做, 也不能說學生提出的問題沒有價值, 最起碼可以培養學生的計算能力, 而不能挫傷學生的積極性, 應該對提出問題的學生進行表揚和適當鼓勵, 即使自己未能及時想出好的方法來, 也要敢於承認, 同時也可以發揮集體的力量, 讓學生們一起來討論研究是否有更好的方法解決。

想到這裏, 我和聲細語地問那個學生爲什麼會提出這個問題, 學生說《畢氏定理》一章中學習了逆命題和逆定理這樣的內容, 於是就想到了交換原命題的題設和結論, 看看所得命題是否是真命題。我當著全班學生的面對他現學現用、敢於質疑的精神進行了表揚和鼓勵。不過我也告訴這個學生, 這道題用高中知識解答比較簡單, 運用初中知識解答, 我還沒有想出來, 課後我再想一下, 然後再答覆他。

課後, 我對這個問題進行了深入研究。首先可以斷定這個三角形是直角三角形 (因爲只有直角三角形才有這個性質, 即兩邊乘積等於第三邊與該邊上的高的乘積), 而且 AC、BC 是直角三角形的高。首先我想到的是幾何方法, 即“同一”法。即先過點 A (或 B) 作對邊的垂線段, 然後看這條垂線段是否與 AC(或BC) 重合。

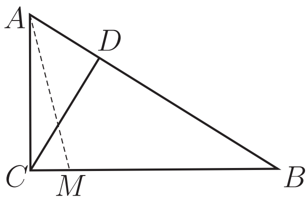

圖2

經過嘗試, 我用“同一” 法解決了該題。

如圖2, 過點 A 作 BC 的垂線段 AM,

則 $\frac{1}{2}AM\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$,

即 $AM\cdot BC=AB\cdot CD$。而 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$,

$\therefore AM=AC$。由垂線段最短 (唯一性) 可知, AM 與 AC 重合。

$\therefore AC$ 就是點 A 到 BC 的垂線段。$\therefore \angle ACB=90°$。

“同一” 法教材雖然未作介紹, 但這種方法學生容易看懂, 相對容易接受。

對於該題, 我也曾想過能否運用代數方法解決, 即運用畢氏定理的逆定理解決。我的思路非常明確, 分別用字母 a, b, c 表示出三角形的三邊 (a, b, c 分別是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊), 利用三角形的面積不變可以表示出 CD, 然後利用畢氏定理分別表示出 AD 和 BD, 最後根據 $AD+BD=AB$ 得到一個含有 a, b, c 的式子, 從這個式子看看能不能推出 $a^2+b^2=c^2$。

經過反復嘗試, 終於解決, 過程如下:

設 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, 由 $AC\cdot BC=AB\cdot CD$ 得 $CD=\dfrac{ab}{c}$,

在 Rt$\triangle ADC$ 中, 由畢氏定理, 得 $AD^2=AC^2-CD^2$,

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}$。同理, $BD=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}$,

$\therefore \sqrt{b^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}+\sqrt{a^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}=c$, 即 $\sqrt{b^2c^2-a^2b^2}+\sqrt{a^2c^2-a^2b^2}=c^2$,

即 $\sqrt{b^2c^2-a^2b^2}=c^2-\sqrt{a^2c^2-a^2b^2}$,

兩邊平方, 得 $b^2c^2-a^2b^2=c^4+a^2c^2-a^2b^2-2c^2\sqrt{a^2c^2-a^2b^2}$,

整理, 得 $c^2+a^2-b^2=2\sqrt{a^2c^2-a^2b^2}$,

兩邊平方, 得 $c^4+a^4+b^4+2a^2c^2-2b^2c^2-2a^2b^2=4a^2c^2-4a^2b^2$,

即 $c^4-2a^2c^2-2b^2c^2+a^4+2a^2b^2+b^4=0$, $\therefore c^4-2c^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2=0$,

$\therefore [c^2-(a^2+b^2)]^2=0$, $\therefore c^2-(a^2+b^2)=0$, $\therefore a^2+b^2=c^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形。

這種方法思路比較清晰, 但過程相對複雜, 對學生來說有較大的挑戰性, 學生不易想到, 但是學生可以聽懂。

在用幾何、代數兩種方法解答完此題, 我總算鬆了一口氣, 因爲該題無論對學生還是對我都是一個挑戰。我抽時間將兩種方法的解答過程寫到了教室後面的黑板上, 供學有餘力的學生學習參考, 同時也是對那位提出問題的學生的一個交待。

感悟: 無論在數學課堂上, 還是在課堂外, 學生可能會提出形形色色的問題, 甚至是“古怪” 的問題。面對學生的質疑, 作爲教師要認真、平等對待每位學生提出的問題, 即使這個問題用現階段的知識難以回答。

要給學生一碗水, 教師首先要有一桶水。作爲教師, 要敢於面對學生的“質疑”, 敢於面對學生的“難題”, 通過不斷學習和鑽研, 不斷給自己充電, 盡自己最大努力解答學生的“質疑”和“難題”, 努力提高自己的素養。

—本文作者任教湖北省襄陽市襄州區黃集鎮初級中學—