數學傳播　40卷2期, pp. 84-93

Brahmagupta 四邊形的構造方法

信步千山

摘要: 本文從三角著手並結合簡單的數論知識, 給出邊長與面積均爲有理數的圓內接四邊形的充要條件, 並由此找到了 Brahmagupta 四邊形的構造方法。

關鍵詞: Heron 三角形、 Brahmagupta 四邊形、 QBJ 四邊形、 Jiany 四邊形、無平方因子數。

1. 引言

熟知, 三邊長與面積均爲整數的三角形稱爲 Heron 三角形。三邊長互素的 Heron 三角形稱爲本原 Heron 三角形。在文 [1] 中, 我們已經給出了如下本原 Heron 數組公式 (相當於本原 Heron 三角形的構造性定義):

$$a=\frac{mn(s^2+t^2)}{d_1d_2},\quad b=\frac{st(m^2+n^2)}{d_1d_2},\quad c=\frac{(mt+ns)(ms-nt)}{d_1d_2}.$$

其中: $m,n,s,t\in\mathbf{N}^+$, $(m,n)=(s,t)=1$, $ms>nt$, $d_1=(mn,st)$, $d_2=(mt+ns,ms-nt)$。

參數的幾何意義是: $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{n}{m}$, $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{t}{s}$。

對四邊長爲 a, b, c, d 的圓內接四邊形, 有印度數學家 Brahmagupta 得到的面積公式 ([2]):

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\quad \text{其中 } 2p=a+b+c+d。$$

上述 Brahmagupta 公式與三角形面積的 Heron 公式非常相似。類似地, 人們將四邊長與面積均爲整數的圓內接四邊形稱爲 Brahmagupta 四邊形 ([3])。文 [3] 就用一種非常巧妙的方法構造了一類兩條對角線長均爲整數的 Brahmagupta 四邊形。

本文通過擴展筆者在文 [1] 中使用過的方法, 給出了邊長與面積均爲有理數的圓內接四邊形的充要條件。由此就可以構造出邊長與面積均爲有理數的圓內接四邊形。進一步將其作適當的相似放大, 我們就可以構造出 Brahmagupta 四邊形。

2. 預備定理

爲便於表述, 我們先給出若干定義和預備定理。

定義 1: 四邊長與面積均爲有理數的圓內接四邊形稱爲 QBJ 四邊形。

定義 2([4]): 如果 $e \in \mathbf{N}^+$, 且 e 沒有大於 1 的平方因數, 則稱 e 爲無平方因子數。比如 $1, 2, 3, 5, 6, \ldots$ 都是無平方因子數。

注: 按此處定義, 1 也是無平方因子數。這樣的定義便於後文的統一表述。

定義 3: 對給定的無平方因子數 e, 定義集合 $F(e) = \{k\sqrt{e} \mid k \in \mathbf{Q}\}$。

引理 1: 對非零實數 a, 存在無平方因子數 e, 使 $a \in F(e)$ 的充要條件是 $a^2 \in \mathbf{Q}^+$。

引理 2: e 爲無平方因子數。若 $a = k\sqrt{e}(k \in \mathbf{Q})$, 則 $a \in \mathbf{Q}$ 的充要條件是: $e = 1$ 或 $k = 0$。

上面這兩個引理的理解很容易, 因此略去其證明。

引理 3: e 爲無平方因子數, 則 $\cos\theta \in F(e)$, $\sin\theta \in F(e)$ 且 $\sin\theta \neq 0$ 的充要條件是: 存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{Q}$, 使得 $\tan\dfrac{\theta}{2} = -\lambda + \mu\sqrt{e}$, 其中 λ, μ 滿足 $\lambda^2 - e\mu^2 = -1$。

證明: (1) 充分性 此時 $\tan\dfrac{\theta}{2} = -\lambda + \mu\sqrt{e}$ 且 $\lambda^2 - e\mu^2 = -1$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{Q})$, 則

$$1 - \tan^2\frac{\theta}{2} = 1 - e\mu^2 - \lambda^2 + 2\lambda\mu\sqrt{e} = -2\lambda^2 + 2\lambda\mu\sqrt{e} = 2\lambda(-\lambda + \mu\sqrt{e}),$$
$$1 + \tan^2\frac{\theta}{2} = 1 + \lambda^2 + e\mu^2 - 2\lambda\mu\sqrt{e} = -2\lambda\mu\sqrt{e} + 2e\mu^2 = 2\mu\sqrt{e}(-\lambda + \mu\sqrt{e}).$$

所以

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\lambda}{\mu\sqrt{e}} = \frac{\lambda}{\mu e}\sqrt{e}, \quad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\mu\sqrt{e}} = \frac{1}{\mu e}\sqrt{e}.$$

由定義 3 即知: $\cos\theta \in F(e)$, $\sin\theta \in F(e)$ 且 $\sin\theta \neq 0$。

(2) 必要性 此時 $\cos\theta \in F(e)$, $\sin\theta \in F(e)$ 且 $\sin\theta \neq 0$。

由定義 3, 可設: $\cos\theta = m\sqrt{e}$, $\sin\theta = n\sqrt{e}$ $(m, n \in \mathbf{Q}$ 且 $n \neq 0)$.

由 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 知: $m^2e + n^2e = 1$。 (1)

且 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1 - m\sqrt{e}}{n\sqrt{e}} = -\dfrac{m}{n} + \dfrac{1}{ne}\sqrt{e}.$

令: $\dfrac{m}{n}=\lambda$, $\dfrac{1}{ne}=\mu$, 則 $\tan\dfrac{\theta}{2}=-\lambda+\mu\sqrt{e}$ 且 $\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$.

且此時有: $\lambda^2-e\mu^2=\dfrac{m^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2e}=\dfrac{m^2e-1}{n^2e}$,

而由 (1) 式知: $m^2e-1=-n^2e$。所以 $\lambda^2-e\mu^2=-1$.

即: 此時存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$ 滿足 $\lambda^2-e\mu^2=-1$, 使得 $\tan\dfrac{\theta}{2}=-\lambda+\mu\sqrt{e}$. $\square$

注: 引理 3 只保證了條件「存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$, 使得 $\tan\dfrac{\theta}{2}=-\lambda+\mu\sqrt{e}$ (其中 λ,μ 滿足 $\lambda^2-e\mu^2=-1$)」與條件「$\cos\theta\in F(e)$, $\sin\theta\in F(e)$ 且 $\sin\theta\neq 0$」的等價性, 但並沒有保證 $\lambda^2-e\mu^2=-1$ 的有理數解 (λ,μ) 一定存在!

事實上, 由初等數論知識知 (見文 [4]): 對無平方因子數 e, ey^2 (y 爲非零整數) 能表爲兩整數的平方和的充要條件是: e 沒有形如 $4n+3$ ($n\in\mathbf{N}$) 的素因數。也就是說: $ey^2=x^2+z^2$ ($y\neq 0$) 存在整數解 (x,y,z) 的充要條件是: e 沒有形如 $4n+3$ 的素因數。所以 $ey^2=x^2+1$ (即 $x^2-ey^2=-1$) 存在有理數解 (x,y) 的充要條件是: e 沒有形如 $4n+3$ 的素因數。

因此, 若要保證「存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$ 滿足 $\lambda^2-e\mu^2=-1$」, 則引理 3 中的無平方因子數 e 不能含有形如 $4n+3$ 的素因數。

又, 當 $e=1$ 時, 引理 3 結合引理 2 可得如下結論 (也容易直接證明):

引理 4 ([5]): 若 $\theta\neq k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), 則 $\sin\theta,\cos\theta\in\mathbf{Q}$ 的充要條件是 $\tan\dfrac{\theta}{2}\in\mathbf{Q}$。

引理 5:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)&=\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\&\quad+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3,\\ \cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)&=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\&\quad-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3.\end{aligned}$$

3. QBJ 四邊形的充要條件

將 QBJ 四邊形作適當放大就成爲 Brahmagupta 四邊形。因此我們先看 QBJ 四邊形的充要條件。

定理1 : 如圖 1, 圓內接四邊形 $ABCD$ 四邊所對的圓周角依次爲 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 則四邊形 $ABCD$ 是 QBJ 四邊形的充要條件是: 存在無平方因子數 e, 使得 $\cos\alpha_i,\sin\alpha_i\in F(e)$ ($i=1,2,3$), 且外接圓半徑 $R\in F(e)$ (其中 e 不能有形如 $4n+3$ 的素因數)。

證明： (1) 充分性　此時 $\cos\alpha_i, \sin\alpha_i \in F(e)$ $(i=1,2,3)$, $R \in F(e)$。注意到 $\alpha_4 = \pi-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, 則 $\sin\alpha_4 = \sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, $\cos\alpha_4 = -\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$。由引理 5 和 $\cos\alpha_i, \sin\alpha_i \in F(e)$ $(i=1,2,3)$ 及定義 3 即知: $\sin\alpha_4 \in F(e)$, $\cos\alpha_4 \in F(e)$。又結合 $R \in F(e)$ 及定義 3 知: $2R\sin\alpha_i \in \mathbf{Q}$ $(i=1,2,3,4)$。結合正弦定理, 如圖1, 這即是: $a,b,c,d \in \mathbf{Q}$。又由 $\cos\alpha_i, \sin\alpha_i \in F(e)$ $(i=1,2)$ 知:

$\sin(\alpha_1+\alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 \in \mathbf{Q}$。

則有 $\sin A = \sin(\alpha_1+\alpha_2) \in \mathbf{Q}$。

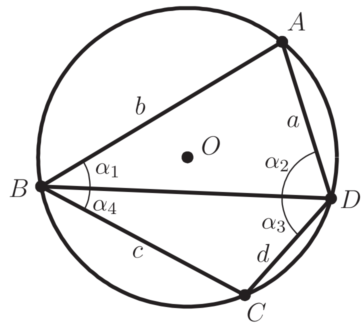

圖 1

由圖 1, 則四邊形 $ABCD$ 面積 $S=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin A \in \mathbf{Q}$。則由定義 1 知: 圓內接四邊形 $ABCD$ 是 QBJ 四邊形。

(2) 必要性　此時四邊形 $ABCD$ 四邊長 a, b, c, $d \in \mathbf{Q}$ 且面積 $S \in \mathbf{Q}$。

由圖 1 有: $a^2+b^2-2ab\cos A = |BD|^2 = c^2+d^2-2cd\cos C$。又

$$\angle A + \angle C = \pi, \quad 則\ \cos A = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \in \mathbf{Q}。$$

代回前式可知 $|BD|^2 \in \mathbf{Q}^+$。

結合引理 1 知: 存在無平方因子數 e, 使得 $|BD| \in F(e)$。 (2)

又注意到 $S=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin A$, 而 $S\in\mathbf{Q}$ 且 $a,b,c,d\in\mathbf{Q}$, 知: $\sin A \in \mathbf{Q}$。

由正弦定理得: $R=\dfrac{|BD|}{2\sin A}$, 結合 (2) 和定義 3 知: $R \in F(e)$。

又, 由正弦定理得: $\sin\alpha_1 = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{a}{2R\sqrt{e}}\sqrt{e}$。

由 $a\in\mathbf{Q}$, $R\in F(e)$ 和定義 3 知: $\sin\alpha_1 \in F(e)$。同理 $\sin\alpha_2, \sin\alpha_3, \sin\alpha_4 \in F(e)$。

如圖 1, 由餘弦定理: $\cos\alpha_1 = \dfrac{b^2+|BD|^2-a^2}{2b\cdot|BD|} = \dfrac{b^2+|BD|^2-a^2}{2b\cdot|BD|\cdot\sqrt{e}}\sqrt{e}$。

再結合 $a,b\in\mathbf{Q}$ 和 (2) 及定義 3 知: $\cos\alpha_1 \in F(e)$。同理 $\cos\alpha_2, \cos\alpha_3, \cos\alpha_4 \in F(e)$。綜上, 即有 $\cos\alpha_i, \sin\alpha_i \in F(e)$ $(i=1,2,3,4)$ 且外接圓半徑 $R\in F(e)$。但由引理 3 及其後的註, 定理 1 結論中的 e 不能含有形如 $4n+3$ 的素因數。 □

定理 1 結合引理 3 即得

定理2：圓內接四邊形 $ABCD$ 四邊所對的圓周角依次爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 則四邊形 $ABCD$ 是 QBJ 四邊形的充要條件是: 存在沒有形如 $4n+3$ 的素因數的無平方因子數 e, 使得外接圓半徑 $R \in F(e)$ 且 $\tan\dfrac{\alpha_i}{2} = -\lambda_i + \mu_i\sqrt{e}$ (其中 (λ_i, μ_i) 是 $\lambda^2 - e\mu^2 = -1$ 的有理數解, $i=1,2,3$)。

4. QBJ 數組公式

依據定理2, 我們就可初步構造 QBJ 四邊形。

如圖 1, 對 QBJ 四邊形 $ABCD$, 由定理 2, 可令: $\tan\dfrac{\alpha_i}{2} = -\lambda_i + \mu_i\sqrt{e}$ $(i=1,2,3)$。

其中: $\lambda_i^2 - e\mu_i^2 = -1$, 且 $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{Q}$ $(i=1,2,3)$。

注意到 $\lambda_i^2 - e\mu_i^2 = -1$, 由萬能公式可算得: $\sin\alpha_i = \dfrac{1}{\mu_i\sqrt{e}}$, $\cos\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i\sqrt{e}}$ $(i=1,2,3)$。

則由引理 5 可算得: $\sin\alpha_4 = \sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \dfrac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-1}{\mu_1\mu_2\mu_3 e\sqrt{e}}$,

$\cos\alpha_4 = -\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu_1\mu_2\mu_3 e\sqrt{e}}$ 。

而由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = \pi$ 知:

$\sin\alpha_i > 0$ $(i=1,2,3,4)$ 且 $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3, \cos\alpha_4$ 中至多有一個爲負。

結合上面各角的正餘弦值運算式, 則對參數 λ_i, μ_i $(i=1,2,3)$ 還應有如下限制條件:

$\mu_i > 0$ $(i=1,2,3)$, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 > 1$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 中至多有一個爲負。

需要說明的是: 在條件 $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 > 1$ 下, 容易證明 (證略):

「$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 中至多有一個爲負」與「$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 中至多有一個爲負」是等價的。

爲使得最後得到的公式形式簡潔, 由定理 2, 我們可令外接圓半徑

$$R = \frac{1}{2}k\mu_1\mu_2\mu_3 e\sqrt{e} \quad (k \in \mathbf{Q}^+).$$

則由正弦定理可算得 QBJ 四邊形 $ABCD$ 的四邊長分別爲:

$$a = 2R\sin\alpha_1 = ek\mu_2\mu_3, \quad b = 2R\sin\alpha_2 = ek\mu_3\mu_1, \quad c = 2R\sin\alpha_3 = ek\mu_1\mu_2,$$
$$d = 2R\sin\alpha_4 = k(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-1).$$

又由圖 1 有: $\sin A = \sin(\alpha_1+\alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_1\mu_2 e}$。

則四邊形 $ABCD$ 面積

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin A$$
$$=\frac{1}{2}k^2(\lambda_1+\lambda_2)(e\mu_3^2-1+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1).$$

而 $\lambda_3^2-e\mu_3^2=-1$, 則 $e\mu_3^2-1=\lambda_3^2$。

因此 $S=\frac{1}{2}k^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=\frac{1}{2}k^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)$。

結合定理 2 即得

定理 3 : 任意 QBJ 四邊形均可由如下公式給出 (QBJ 數組公式):

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a=ek\mu_2\mu_3 \\ b=ek\mu_3\mu_1 \\ c=ek\mu_1\mu_2 \\ d=k(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-1) \end{cases} 。$$

且其外接圓半徑 $R=\frac{1}{2}k\mu_1\mu_2\mu_3e\sqrt{e}$, 此時面積 $S=\frac{1}{2}k^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)$。

其中參數滿足限制條件: $k\in\mathbf{Q}^+$, e 是無平方因子數且無形如 $4n+3$ 的素因數, (λ_i,μ_i) 是 $\lambda^2-e\mu^2=-1$ 的有理數解且 $\mu_i>0$ $(i=1,2,3)$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中至多有一個爲負, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1>1$。

參數的幾何意義是: $\tan\frac{\alpha_i}{2}=-\lambda_i+\mu_i\sqrt{e}$ $(i=1,2,3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 爲圓內接四邊形 $ABCD$ 四邊依次所對的圓周角 (如圖1)。

遺憾的是: 公式 (I) 中的參數不全是自由的, 有一個很強的限制條件。

5. $x^2-ey^2=-1$ 的有理數解與 Brahmagupta 四邊形的構造

定理 3 給出的公式 (I) 中對參數限制很強的這個條件是:

(λ_i,μ_i) $(i=1,2,3)$ 是 $x^2-ey^2=-1$ 的有理數解。

要真正構造出 QBJ 四邊形就必須去求這類方程的有理數解。

對於這類方程, 一般的初等數論教材 (如文 [4]) 都介紹有求其整數解的方法 (即解Pell 方程)。但這裡只要求其有理數解, 其實是可以不必去解 Pell 方程的。

下面我們用鄭格于教授在文 [6] 中給出的方法來求這類方程的有理數解。以 $x^2-5y^2=-1$ 爲例: 當 $y=\pm 1$ 時, $x^2-5y^2=-1$ 顯然只有 $(x,y)=(\pm 2,\pm 1)$ 是它的有理數解。

下設 $y\neq\pm1$。注意到 $5=2^2+1^2$, 則 $x^2-5y^2=-1$ 可變形爲 $(x+2y)(x-2y)=(y+1)(y-1)$。則存在 $m\in\mathbf{Q}$ 且 $m\neq 0$ 使得: $x+2y=m(y-1)$, 則 $m(x-2y)=y+1$。也即:

$$\begin{cases}x+(2-m)y=-m\\ mx-(2m+1)y=1\end{cases}。$$

對 $m\in\mathbf{Q}$, 方程組係數行列式的值顯然不爲零。則可解得 $y\neq\pm1$ 時的有理數解爲:

$$\begin{cases}x=\dfrac{2(m^2+m-1)}{m^2-4m-1}\\ y=\dfrac{m^2+1}{m^2-4m-1}\end{cases}\text{其中 } m\in\mathbf{Q}。\tag{3}$$

當 m 分別取 $-\dfrac{1}{2}$, 0, 2 時, 由 (3) 式算得 (x,y) 分別爲: $(-2,1),(2,-1),(-2,-1)$;
而 $m\to\infty$ 時, 由 (3) 式可算得: $(x,y)\to(2,1)$。

這表明: (3) 式也包含了當 $y=\pm1$ 時的有理數解 $(x,y)=(\pm2,\pm1)$, 也就是說: 事實上, (3) 式就是不定方程 $x^2-5y^2=-1$ 的有理數解的通解公式 (註: 此處允許 x,y 取 $m\to\infty$ 時的極限值)。

由引理 3 的註中所述: 對無平方因子數 e, 若它沒有形如 $4n+3$ 的素因數, 則它必可表爲兩整數的平方和。因此上述方法對一般情形也適用。

現在我們就可以構造出具體的 QBJ 四邊形了。再將其適當地相似放大 (即是讓參數 k 取適當的值) 就可構造出 Brahmagupta 四邊形。比如:

(1) 對 $e=2$, 有 $\lambda_i=1$, $\mu_i=1$ $(i=1,2,3)$ 符合條件, 此時公式 (I) 即給出邊長爲有理數的全部正方形。再放大就可得到所有邊長爲整數的正方形。

(2) 對 $e=2$, 有 $\lambda_1=-1$, $\mu_1=1$; $\lambda_2=7$, $\mu_2=5$; $\lambda_3=41$, $\mu_3=29$ 符合條件, 又取 $k=\dfrac{1}{2}$, 則此時公式 (I) 即給出一個 Brahmagupta 四邊形: $a=145$, $b=29$, $c=5$, $d=119$ 且 $S=1440$。

(3) 對 $e=5$, 在 (3) 式中令 $m=5$, -2 和 $m\to\infty$ 可得 $\lambda_1=\dfrac{29}{2}$, $\mu_1=\dfrac{13}{2}$; $\lambda_2=\dfrac{2}{11}$, $\mu_1=\dfrac{5}{11}$; $\lambda_3=2$, $\mu_3=1$。

符合條件, 又取 $k=22$, 則此時公式 (I) 即給出一個 Brahmagupta 四邊形: $a=50$, $b=715$, $c=325$, $d=682$ 且 $S=127908$。

上述(3) 中的取值稍微改一下: 取 $\lambda_3=\mu_3=\dfrac{1}{2}$, $k=\dfrac{44}{5}$, 其它不變, 可得一個較小的 Brahmagupta 四邊形: $a=10$, $b=143$, $c=130$, $d=79$, 此時 $S=5814$。

有興趣的讀者可依據公式 (I) 自己去構造更多的 Brahmagupta 四邊形。

特別地, 對應於 $e=1$, 我們可以方便地構造出一大類 Brahmagupta 四邊形。

定義 4([2]):邊長、對角線長及面積均爲整數的四邊形稱爲 Heron 四邊形。

沈康身教授在文 [2] 中介紹的數學前輩們所構造的那些 Heron 四邊形都有外接圓。當然, 有外接圓的 Heron 四邊形屬於 Brahmagupta 四邊形。

顯然, 這類 Brahmagupta 四邊形可以由邊長、對角線長及面積均爲有理數的圓內接四邊形通過適當的相似放大得到。爲便於表述, 我們作如下定義:

定義 5:四邊長、對角線長及面積均爲有理數的圓內接四邊形稱爲 Jiany 四邊形。

由定義 1 知: Jiany 四邊形即是對角線長爲有理數的 QBJ 四邊形。因此, 對 Jiany 四邊形 $ABCD$, 由定理 1 證明中的結論 (2) 有: 對角線 $|BD|\in F(e)$, 同理 $|AC|\in F(e)$。

另一方面, 由定義 5 知: Jiany 四邊形 $ABCD$ 的對角線 $|BD|\in\mathbf{Q}$, $|AC|\in\mathbf{Q}$。

而對角線長不可能爲 0, 則由引理 2 知必有 $e=1$。

由此, 再結合定理 1、引理 2 和引理 4 可得

定理4:圓內接四邊形 $ABCD$ 四邊所對的圓周角依次爲 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$, 則四邊形 $ABCD$ 是 Jiany 四邊形的充要條件是:$\tan\dfrac{\alpha_i}{2}\in\mathbf{Q}$ $(i=1,2,3)$ 且外接圓半徑 $R\in\mathbf{Q}$。

因此, 對 Jiany 四邊形 $ABCD$, 我們可設: $\tan\dfrac{\alpha_i}{2}=p_i$ $(i=1,2,3)$, 其中 $p_i\in\mathbf{Q}^+$ $(i=1,2,3)$。

再令: $R=\dfrac{1}{4}k(1+p_1^2)(1+p_2^2)(1+p_3^2)$ $(k\in\mathbf{Q}^+)$

經過一系列的計算可得 (類似於定理 3 的推導, 具體過程略)

定理5:任意 Jiany 四邊形均可由如下公式給出 (Jiany 數組公式):

$$\text{(II)}\quad\begin{cases}a=kp_1(1+p_2^2)(1+p_3^2)\\ b=kp_2(1+p_3^2)(1+p_1^2)\\ c=kp_3(1+p_1^2)(1+p_2^2)\\ d=k(p_1+p_2+p_3-p_1p_2p_3)(1-p_1p_2-p_2p_3-p_3p_1)\end{cases}$$

且其外接圓半徑 $R=\dfrac{1}{4}k(1+p_1^2)(1+p_2^2)(1+p_3^2)$,

此時面積 $S=k^2(p_1+p_2)(p_2+p_3)(p_3+p_1)(1-p_1p_2)(1-p_2p_3)(1-p_3p_1)$。

其中參數的限制條件爲: $k\in\mathbf{Q}^+$, $p_i\in\mathbf{Q}^+$ $(i=1,2,3)$ 且 $p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1<1$。

參數的幾何意義是: $\tan\dfrac{\alpha_i}{2}=p_i$ $(i=1,2,3)$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 依次爲圓內接四邊形 $ABCD$ 四邊所對的圓周角 (如圖1)。

容易算得由 Jiany 數組公式所確定的 Jiany 四邊形的兩條對角線長分別爲 (如圖1):

$$l_1=|BD|=2R\sin(\alpha_1+\alpha_2)=k(p_1+p_2)(1-p_1p_2)(1+p_3^2),$$
$$l_2=|AC|=2R\sin(\alpha_2+\alpha_3)=k(p_2+p_3)(1-p_2p_3)(1+p_1^2).$$

在公式 (II) 中, 若將有理數 p_1,p_2,p_3 均改爲分數形式, 再取適當的 k 值以約掉四邊長和對角線長的運算式中的分母, 使得它們均成爲整數。我們就可以得到一個可構造出內接於圓的 Heron 四邊形的公式!

限於篇幅, 這裡就不再列出這個公式。僅舉一例:

取 $p_1=\dfrac{1}{2}$, $p_2=\dfrac{2}{5}$, $p_3=\dfrac{1}{3}$, $k=180$ 時, 由公式 (II) 就可得如下內接於圓的 Heron 四邊形: $a=116$, $b=100$, $c=87$, $d=105$, 面積 $S=10296$。其對角線長分別爲: $l_1=144$, $l_2=143$。

注意到引理 4 是引理 3 中 $e=1$ 時的推論, 公式 (II) 對應的其實是公式 (I) 中 $e=1$ 時的特例。

6. 有趣的難題

Brahmagupta 四邊形是 Heron 三角形在平面情形的推廣。而 Heron 三角形向空間推廣就是所謂 Heron 四面體 — 六條棱長、四個面面積以及體積均爲整數的四面體。

需要指出的是: 文 [7] 中「海倫四面體不存在」這個結論是不準確的。事實上, 文 [8] 作者就找到了若干 Heron 四面體 (文 [8] 中稱之爲 Perfect pyramid, 意爲「完美金字塔」)。其中最小的一個是: 以 117, 80, 53 爲邊構成的三角形作爲四面體的一個面, 且這三條棱所對棱長分別爲: 52, 51, 84。這樣構成的四面體就是一個 Heron 四面體。更多的例子請參見文 [8]。

尋找到 Heron 四面體的構造方法或公式, 這無疑是一個非常有趣而困難的問題。

參考資料

1. 吳波, 本原海倫數組公式 [J], 中學數學, 12(1999), 43-45。
2. 沈康身, 數學的魅力(二) [M], 上海: 上海辭書出版社, 2006, 44-50。

3. K. R. S. Sastry, Brahmagupta Quadrilaterals [J], Forum Geometricorum, 2(2002), 167-173.
4. 潘承洞、潘承彪, 初等數論 [M], 北京: 北京大學出版社, 1992, 55, 276, 361-366。
5. 吳波, 關於海倫三角形的一個有趣定理[J], 數學通報, 5(2006), 62。
6. 鄭格于, 一類齊次丟番圖方程的解法[M], 初等數學研究論文選, 上海: 上海教育出版社, 1992, 506-520。
7. 沈康身, 數學的魅力(一) [M], 上海: 上海辭書出版社, 2004, 294。
8. R. H. Buchholz, Perfect Pyramids [J], *Bull. Austral. Math. Soc.*, 45(1991), 353-368.

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—