數學傳播 40卷2期, pp. 75-83

分數數列與勾股數

賴昱維

摘要: 史帝費爾曾將一個帶分數數列轉換成假分數數列, 使假分數中分母與分子各等於勾與股, 由此產生畢達哥拉斯勾股數家族; 奧撒南也以類似的方法, 由另一個帶分數數列產生柏拉圖勾股數家族。本研究則以分子與分母成等差的最簡眞分數數列產生歐幾里得勾股數家族。

關鍵詞: 勾股數、分數數列、等差。

緒論

勾股數又名商高數或畢氏三元數, 也就是符合畢氏定理 ($a^2+b^2=c^2$) 的整數解 $[a,b,c]$。許多學者曾經研究勾股數的生成公式, 其中以畢達哥拉斯 (Pythagoras)、柏拉圖 (Plato) 和歐幾里得 (Euclid) 等爲最重要 (蔡聰明, 2010)。在1544年, 史帝費爾 (Michael Stifel) 首先將一個帶分數數列轉換成假分數數列, 再使假分數中分母與分子各等於勾與股, 由此產生了畢達哥拉斯勾股數家族 (the Pythagoras family) (Wikipedia, the free encyclopedia, 2014); 在1844年, 奧撒南 (Jacques Ozanam) 也以類似的方法, 由另一個帶分數數列產生柏拉圖勾股數家族 (the Plato family) (Ozanam, Jacques, 1844)。因此, 我猜想「由分數數列可以產生歐幾里得勾股數家族 (the Euclid family) 」。本研究嘗試以分子與分母成等差的最簡真分數數列來證明我的猜想。

預備知識

以整數數列產生勾股數家族

不同的整數數列可產生不同的勾股數家族 $[a_n,b_n,c_n]$ (蔡聰明, 2010) (表1) :

(1) 畢達哥拉斯以整數數列 $\langle n\rangle, \forall\, n\in N$, 由 $[2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1]$ 產生 $[a_n,b_n,c_n]$。

(2) 柏拉圖以整數數列 $\langle n\rangle$, $\forall\, n\in N$,$n>1$, 由 $[n^2-1, 2n, n^2+1]$ 產生 $[a_n,b_n,c_n]$。

(3) 歐幾里得以整數數列 $\langle u\rangle$ 與 $\langle v\rangle$, $\forall\, u,v\in N$, $u>v$, $(u,v)=1$, u,v一爲奇數, 一爲偶數, 由 $[u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2]$ 產生 $[a_n,b_n,c_n]$。

表 1: 以不同的數列產生不同的勾股數家族 ($n \in N$)。

勾股數家族	數列→勾股數家族	例子
畢達哥拉斯	$\langle n\rangle \to [a_n, b_n, c_n]$	$n=1 \to [3,4,5]$, $n=2 \to [5,12,13]$, $n=3 \to [7,24,25], \cdots$。
柏拉圖	$\langle n\rangle \to [a_n, b_n, c_n]$	$n=2 \to [3,4,5]$, $n=3 \to [8,6,10]$, $n=4 \to [15,8,17], \cdots$。
歐幾里得	$\begin{cases}\langle u\rangle \\ \langle v\rangle\end{cases} \to [a_n, b_n, c_n]$	$\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases} \to [3,4,5]$, $\begin{cases}u=3\\v=2\end{cases} \to [5,12,13]$, $\begin{cases}u=4\\v=1\end{cases} \to [15,8,17], \cdots$。
史帝費爾	$\langle \frac{b_n}{a_n}\rangle \to [a_n, b_n, c_n]$	$\frac{b_1}{a_1}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \to [3,4,5]$, $\frac{b_2}{a_2}=2\frac{2}{5}=\frac{12}{5} \to [5,12,13]$ $\frac{b_3}{a_3}=3\frac{3}{7}=\frac{24}{7} \to [7,24,25]$
奧撒南	$\langle \frac{a_n}{b_n}\rangle \to [a_n, b_n, c_n]$	$\frac{a_1}{b_1}=1\frac{7}{8}=\frac{15}{8} \to [15,8,17]$, $\frac{a_2}{b_2}=2\frac{11}{12}=\frac{35}{12} \to [35,12,37]$ $\frac{a_3}{b_3}=3\frac{15}{16}=\frac{63}{16} \to [63,16,65]$

以分數數列產生勾股數家族

不同的分數數列也可以產生不同的勾股數家族 $[a_n, b_n, c_n]$ (Ozanam, Jacques, 1844)(表1):

(1) 史帝費爾以畢達哥拉斯勾股數家族 $[a_n, b_n, c_n]$ 中的 $\begin{cases}a_n=2n+1\\ b_n=2n^2+2n\end{cases}$ 構成分數數列 $\langle \frac{b_n}{a_n}\rangle$, 再由 $\langle \frac{b_n}{a_n}\rangle = \frac{2n^2+2n}{2n+1} = \langle n+\frac{n}{2n+1}\rangle$ 產生畢達哥拉斯勾股數家族。

(2) 奧撒南先將柏拉圖公式的 n 轉換成 $2n+2$:

$$\begin{cases}a_n=n^2-1\\ b_n=2n\\ c_n=n^2+1\end{cases} \xrightarrow{n\to 2n+2} \begin{cases}a_n=(2n+2)^2-1\\ b_n=2(2n+2)\\ c_n=(2n+2)^2+1\end{cases},$$

再以 $[a_n, b_n, c_n]$ 中的 $\begin{cases}a_n=(2n+2)^2-1\\ b_n=2(2n+2)\end{cases}$ 構成分數數列 $\langle \frac{a_n}{b_n}\rangle$, 再由 $\langle \frac{a_n}{b_n}\rangle = \langle \frac{(2n+2)^2-1}{2(2n+2)}\rangle = \langle \frac{4n^2+8n+3}{4n+4}\rangle = \langle n+\frac{4n+3}{4n+4}\rangle$ 產生柏拉圖勾股數家族。

主要結果與證明

分數

(1) 由於歐幾里得勾股數家族中 u 與 v 具有「$\forall\ u, v \in N$, $u > v$, $(u, v) = 1$, u, v, 一爲奇數, 一爲偶數。」的性質, 所以分數 $\dfrac{v}{u}$ 既是最簡分數, 也是真分數 (表2)。

(2) 當 $u = n+1$, $v = n$ 時, 歐幾里得勾股數家族轉換成 (a) 畢達哥拉斯勾股數家族和 (b) 史帝費爾勾股數家族 (the Stifel family)。

表 2: 歐幾里得勾股數家族中 u與 v 所構成分數 v/u。

$u \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$	n
2	$\frac{1}{2}$																				
3		$\frac{2}{3}$																			
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$																		
5		$\frac{2}{5}$		$\frac{4}{5}$																	
6	$\frac{1}{6}$				$\frac{5}{6}$																
7		$\frac{2}{7}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{6}{7}$															
8	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{7}{8}$														
9		$\frac{2}{9}$		$\frac{4}{9}$				$\frac{8}{9}$													
10	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$				$\frac{7}{10}$		$\frac{9}{10}$												
11		$\frac{2}{11}$		$\frac{4}{11}$		$\frac{6}{11}$		$\frac{8}{11}$		$\frac{10}{11}$											
12	$\frac{1}{12}$				$\frac{5}{12}$		$\frac{7}{12}$				$\frac{11}{12}$										
13		$\frac{2}{13}$		$\frac{4}{13}$		$\frac{6}{13}$		$\frac{8}{13}$		$\frac{10}{13}$		$\frac{12}{13}$									
14	$\frac{1}{14}$		$\frac{3}{14}$		$\frac{5}{14}$				$\frac{9}{14}$		$\frac{11}{14}$		$\frac{13}{14}$								
15		$\frac{2}{15}$		$\frac{4}{15}$				$\frac{8}{15}$						$\frac{14}{15}$							
16	$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{7}{16}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{11}{16}$		$\frac{13}{16}$		$\frac{15}{16}$						
17		$\frac{2}{17}$		$\frac{4}{17}$		$\frac{6}{17}$		$\frac{8}{17}$		$\frac{10}{17}$		$\frac{12}{17}$		$\frac{14}{17}$		$\frac{16}{17}$					
18	$\frac{1}{18}$				$\frac{5}{18}$		$\frac{7}{18}$				$\frac{11}{18}$		$\frac{13}{18}$				$\frac{17}{18}$				
19		$\frac{2}{19}$		$\frac{4}{19}$		$\frac{6}{19}$		$\frac{8}{19}$		$\frac{10}{19}$		$\frac{12}{19}$		$\frac{14}{19}$		$\frac{16}{19}$		$\frac{18}{19}$			
20	$\frac{1}{20}$		$\frac{3}{20}$				$\frac{7}{20}$		$\frac{9}{20}$		$\frac{11}{20}$		$\frac{13}{20}$				$\frac{17}{20}$		$\frac{19}{20}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$n+1$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{n}{n+1}$

$$\text{(a)}\ \begin{cases} a_n=u^2-v^2 \\ b_n=2uv \\ c_n=u^2+v^2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} u=n+1 \\ v=n \end{cases}} \begin{cases} a_n=(n+1)^2-n^2 \\ b_n=2n(n+1) \\ c_n=(n+1)^2+n^2 \end{cases} \to \begin{cases} a_n=2n+1 \\ b_n=2n^2+2n \\ c_n=2n^2+2n+1 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ \begin{cases} a_n=u^2-v^2 \\ b_n=2uv \\ c_n=u^2+v^2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} u=n+1 \\ v=n \end{cases}} \begin{cases} a_n=(n+1)^2-n^2 \\ b_n=2n(n+1) \\ c_n=(n+1)^2+n^2 \end{cases} \to \frac{b_n}{a_n}=\frac{2n(n+1)}{(n+1)^2-n^2}=\frac{2n^2+2n}{2n+1}=n+\frac{n}{2n+1}$$

所以, 由 $\dfrac{v}{u}=\dfrac{n}{n+1}$ 得到畢達哥拉斯勾股數家族和史帝費爾勾股數家族 (表3)。

表 3: 畢達哥拉斯勾股數家族和史帝費爾勾股數家族 ($n\in N$)。

n	$n+\frac{n}{2n+1}$	$\frac{2n^2+2n}{2n+1}$	u	v	$\frac{v}{u}$	$[a_n,b_n,c_n]$
1	$1\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$[3,4,5]$
2	$2\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	3	2	$\frac{2}{3}$	$[5,12,13]$
3	$3\frac{3}{7}$	$\frac{24}{7}$	4	3	$\frac{3}{4}$	$[7,24,25]$
4	$4\frac{4}{9}$	$\frac{40}{9}$	5	4	$\frac{4}{5}$	$[9,40,41]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n+\frac{n}{2n+1}$	$\frac{2n^2+2n}{2n+1}$	$n+1$	n	$\frac{n}{n+1}$	$[2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1]$

(3) 當 $u=2n+2$, $v=1$ 時, 歐幾里得勾股數家族轉換成奧撒南勾股數家族 (the Ozanam family)。

$$\begin{cases}a_n=u^2-v^2\\ b_n=2uv\\ c_n=u^2+v^2\end{cases}\xrightarrow{\begin{cases}u=2n+2\\ v=1\end{cases}}\begin{cases}a_n=(2n+2)^2-1^2\\ b_n=2(2n+2)\\ c_n=(2n+2)^2+1^2\end{cases}\to\frac{a_n}{b_n}=\frac{(n^2+2-1^2)}{2(2n+2)}=\frac{4n^2+8n+3}{4n+4}=n+\frac{4n+3}{4n+4}$$

所以, 由 $\frac{v}{u}=\frac{1}{2n+2}$ 得到奧撒南勾股數家族 (表4)。

表 4: 奧撒南勾股數家族 ($n\in N$)。

n	$n+\frac{4n+3}{4n+4}$	$\frac{4n^2+8n+3}{4n+4}$	u	v	$\frac{v}{u}$	$[a_n,b_n,c_n]$
1	$1\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	4	1	$\frac{1}{4}$	$[15,8,17]$
2	$2\frac{11}{12}$	$\frac{35}{12}$	6	1	$\frac{1}{6}$	$[35,12,37]$
3	$3\frac{15}{16}$	$\frac{63}{16}$	8	1	$\frac{1}{8}$	$[63,12,65]$
4	$4\frac{19}{20}$	$\frac{99}{20}$	10	1	$\frac{1}{10}$	$[99,20,101]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n+\frac{4n+3}{4n+4}$	$\frac{4n^2+8n+3}{4n+4}$	$2n+2$	1	$\frac{1}{2n+2}$	$[4n^2+8n+3,4n+4,4n^2+8n+5]$

(4) 當 $u=2n$, $v=1$ 時, 歐幾里得勾股數家族轉換成柏拉圖勾股數家族。

$$\begin{cases} a_n = u^2 - v^2 \\ b_n = 2uv \\ c_n = u^2 + v^2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{cases} u = 2n \\ v = 1 \end{cases}} \begin{cases} a_n = (2n)^2 - 1^2 \\ b_n = 2(2n) \\ c_n = (2n)^2 + 1^2 \end{cases} \to \begin{cases} a_n = 4n^2 - 1 \\ b_n = 4n \\ c_n = 4n^2 + 1 \end{cases}$$

所以, 由 $\frac{v}{u} = \frac{1}{2n}$ 得到柏拉圖勾股數家族 (表5)。

表 5: 柏拉圖勾股數家族 ($n \in N$)。

n	u	v	$\frac{v}{u}$	$[a_n, b_n, c_n]$
1	2	1	$\frac{1}{2}$	$[3, 4, 5]$
2	4	1	$\frac{1}{4}$	$[15, 8, 17]$
3	6	1	$\frac{1}{6}$	$[35, 12, 37]$
4	8	1	$\frac{1}{8}$	$[63, 12, 65]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2n$	1	$\frac{1}{2n}$	$[4n^2-1, 4n, 4n^2+1]$

分數數列

以勾股數中的勾與股構成分數中的分母與分子, 或是以歐幾里得勾股數家族中 u 與 v 構成分數中的分母與分子, 都可以形成不同的分數數列, 再由此產生不同的勾股數家族 (表6)。

表 6: 由不同的分數數列產生不同的勾股數家族 ($n \in N$)。

勾股數家族	分數數列	勾股數
史帝費爾	$\langle \frac{b_n}{a_n} \rangle = \langle n + \frac{n}{2n+1} \rangle = \langle \frac{2n^2+2n}{2n+1} \rangle$	$[2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1]$
奧撒南	$\langle \frac{a_n}{b_n} \rangle = \langle n + \frac{4n+3}{4n+4} \rangle = \langle \frac{4n^2+8n+3}{4n+4} \rangle$	$[4n^2+8n+3, 4n+4, 4n^2+8n+5]$
本研究	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{n}{n+1} \rangle$	$[2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1]$
本研究	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{1}{2n+2} \rangle$	$[4n^2+8n+3, 4n+4, 4n^2+8n+5]$
本研究	$\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{1}{2n} \rangle$	$[4n^2-1, 4n, 4n^2+1]$

調和數列

我由數列 $\langle u_n \rangle = \langle 2n \rangle$ 與 $v_n = 1$ 構成調和數列 $\langle \frac{v_n}{u_n} \rangle = \langle \frac{1}{2n} \rangle$, 再由此產生柏拉圖勾股數家族。因爲數列 $\langle u_n \rangle$ 是等差數列, 公差爲 2, 且 v_n 爲常數, 所以由此延伸成不同的調和數

列 (表7), 並得到不同的勾股數家族, 但是所得到的 $\frac{v_n}{u_n}$ 卻無法涵蓋所有歐幾里得的分數 $\frac{v}{u}$ (表2)。

表 7: 由不同的調和數列產生不同的勾股數家族 $(k, n \in N)$。

$\frac{v_1}{u_1}$	$\frac{v_n}{u_n}$	$[a_1, b_1, c_1]$	$[a_n, b_n, c_n]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2n}$	$[3, 4, 5]$	$[4n^2-1, 4n, 4n^2+1]$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{2n+1}$	$[5, 12, 13]$	$[4n^2+4n-3, 8n+4, 4n^2+4n+5]$
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{2n+3}$	$[9, 40, 41]$	$[4n^2+12n-7, 16n+24, 4n^2+12n+25]$
$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{2n+7}$	$[17, 144, 145]$	$[4n^2+28n-15, 32n+112, 4n^2+28n+113]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}$	$\frac{2^{k-1}}{2n+2^{k-1}-1}$	$[a_1, b_1, c_1]$(註一)	$[a_n, b_n, c_n]$(註二)

註一:$[a_1, b_1, c_1] = [2^k+1, 2^{2k-1}+2^k, 2^{2k-1}+2^k+1]$

註二:$[a_n, b_n, c_n] = [4n^2+2^{k+1}n-4n-2^k+1, 2^{k+1}n+2^{2k-1}-2^k, 4n^2+2^{k+1}n-4n+2^{2k-1}-2^k+1]$

等差數列

(1) 數列 $\langle u_n\rangle = \langle n+1\rangle$ 與數列 $\langle v_n\rangle = \langle n\rangle$ 構成了的分數數列 $\langle \frac{v_n}{u_n}\rangle = \langle \frac{n}{n+1}\rangle$, 再由此分數數列產生了畢達哥拉斯勾股數家族。因爲數列 $\langle u_n\rangle$ 與 $\langle v_n\rangle$ 都是等差數列, 公差皆爲1, 且 $u_{n-1} = v_n$, 所以延伸公差 1 爲不同的奇數, 如 $3, 5, 7, \ldots, d$, 得到不同的分子與分母成等差之最簡真分數數列: $\langle \frac{3n-2}{3n+1}\rangle$, $\langle \frac{5n-4}{5n+1}\rangle$, $\langle \frac{7n-6}{7n+1}\rangle$, $\ldots$, $\langle \frac{1+(n-1)d}{1+nd}\rangle$, 並由此得到不同的勾股數家族 (表8)。但是, 所得到的 $\frac{v_n}{u_n}$ 卻無法涵蓋所有歐幾里得的分數 $\frac{v}{u}$ (表2)。

(2) 因爲數列 $\langle u_n\rangle = \langle 1+nd\rangle$ 與數列 $\langle v_n\rangle = \langle 1+(n-1)d\rangle$ 的常數爲 1, 所以延伸常數 1 爲不同的正整數, 如 $2, 3, 4, \ldots, k$, 得到不同的分子與分母成等差之最簡真分數分數數列: $\langle \frac{2+(n-1)d}{2+nd}\rangle$, $\langle \frac{3+(n-1)d}{3+nd}\rangle$, $\langle \frac{4+(n-1)d}{4+nd}\rangle, \ldots, \langle \frac{k+(n-1)d}{k+nd}\rangle$, 並由此得到不同的勾股數家族 (表8)。分數數列 $\langle \frac{v_n}{u_n}\rangle = \langle \frac{k+(n-1)d}{k+nd}\rangle$ 涵蓋了所有歐幾里得的分數 $\frac{v}{u}$ (表2)。

遞迴關係式

(1) 分子與分母成等差 d 的最簡真分數數列 $\langle \frac{v_n}{u_n}\rangle$, 如 $u_n = k+nd$ 與 $v_n = k+(n-1)d$, 皆具有 $u_n = v_n + d$, $u_{n-1} = v_n$ 的特性。

(2) $\forall\ d, k, n, u_n, v_n \in N$, $n > 1$, $(u_n, v_n) = 1$, $v_1 = k$, $u_n = v_n + d$, $u_{n-1} = v_n$, d 爲奇數, 存在遞迴關係式: $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$

表 8: 由分子與分母成等差的最簡真分數數列產生不同的勾股數家族 ($d,k,n\in N$, d 爲奇數)。

$\frac{v_1}{u_1}$	$\frac{v_n}{u_n}$	$[a_1,b_1,c_1]$	$[a_n,b_n,c_n]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{n}{n+1}$	$[3,4,5]$	$[2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1]$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3n-2}{3n+1}$	$[15,8,17]$	$[18n-3,18n^2-6n-4,18n^2-6n+5]$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5n-4}{5n+1}$	[35,12,37]	$[50n-15,50n^2-30n-8,50n^2-30n+17]$
$\frac{1}{8}$	$\frac{7n-6}{7n+1}$	$[63,16,65]$	$[98n-35,98n^2-70n-12,98n^2-70n+37]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{1+d}$	$\frac{1+(n-1)d}{1+nd}$	$[d^2+2d,2d+2,d^2+2d+2]$	$[a_n,b_n,c_n]$(註三)
$\frac{2}{2+d}$	$\frac{2+(n-1)d}{2+nd}$	$[d^2+4d,4d+8,d^2+4d+8]$	$[a_n,b_n,c_n]$(註四)
$\frac{3}{3+d}$	$\frac{3+(n-1)d}{3+nd}$	$[d^2+6d,6d+18,d^2+6d+18]$	$[a_n,b_n,c_n]$(註五)
$\frac{4}{4+d}$	$\frac{4+(n-1)d}{4+nd}$	$[d^2+8d,8d+32,d^2+8d+32]$	$[a_n,b_n,c_n]$(註六)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{k}{k+d}$	$\frac{k+(n-1)d}{k+nd}$	$[d^2+2kd,2kd+2k^2,d^2+2kd+2k^2]$	$[a_n,b_n,c_n]$(註七)

註三:$[a_n,b_n,c_n]=[2nd^2-d^2+2d,2n^2d^2-2nd^2+4nd-2d+2,2n^2d^2-2nd^2+4nd+d^2-2d+2]$

註四:$[a_n,b_n,c_n]=[2nd^2-d^2+4d,2n^2d^2-2nd^2+8nd-4d+8,2n^2d^2-2nd^2+8nd+d^2-4d+8]$

註五:$[a_n,b_n,c_n]=[2nd^2-d^2+6d,2n^2d^2-2nd^2+12nd-6d+18,2n^2d^2-2nd^2+12nd+d^2-6d+18]$

註六:$[a_n,b_n,c_n]=[2nd^2-d^2+8d,2n^2d^2-2nd^2+16nd-8d+32,2n^2d^2-2nd^2+16nd+d^2-8d+32]$

註七:$[a_n,b_n,c_n]=[2nd^2-d^2+2kd,2n^2d^2-2nd^2+4knd-2kd+2k^2,2n^2d^2-2nd^2+4knd+d^2-2kd+2k^2]$

證明:

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{u_n} &= \frac{v_n}{v_n+d} && (\because\ u_n=v_n+d)\\
&= \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}+d} && (\because\ u_{n-1}=v_n)\\
&= \frac{1}{1+\frac{d}{u_{n-1}}}\\
&= \frac{1}{2+\frac{d-u_{n-1}}{u_{n-1}}}\\
&= \frac{1}{2+\left(\frac{-v_{n-1}}{u_{n-1}}\right)} && (\because\ d-u_{n-1}=-v_{n-1})\\
&= \frac{1}{2-\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}
\end{aligned}$$

表 9: 由最簡真分數數列產生歐幾里得勾股數家族 ($d,k,n,u_n,v_n\in N$, d 爲奇數)。

$\frac{v_1}{u_1}$	$\frac{v_n}{u_n}$	$\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$	$[a_n,b_n,c_n]$
$\frac{1}{2}$	$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1}$	$[3,4,5],[5,12,13],[7,24,25],[9,40,41],\ldots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3n-2}{3n+1}$	$\frac{1}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{10},\frac{10}{13},\ldots,\frac{3n-2}{3n+1}$	$[15,8,17],[33,56,65],[51,140,149],[69,260,269],\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{1+d}$	$\frac{1+(n-1)d}{1+nd}$	$\frac{1}{1+d},\frac{1+d}{1+2d},\ldots,\frac{1+(n-1)d}{1+nd}$	$[a_1,b_1,c_1],[a_2,b_2,c_2],[a_3,b_3,c_3],[a_4,b_4,c_4],\ldots$(註八)
$\frac{2}{3}$	$\frac{n+1}{n+2}$	$\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\ldots,\frac{n+1}{n+2}$	$[5,12,13],[7,24,25],[9,40,41],[11,60,61],\ldots$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3n-1}{3n+2}$	$\frac{2}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{11},\frac{11}{14},\ldots,\frac{3n-1}{3n+2}$	$[21,20,29],[39,80,89],[57,176,185],[75,308,317],\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{2}{2+d}$	$\frac{2+(n-1)d}{2+nd}$	$\frac{2}{2+d},\frac{2+d}{2+2d},\ldots,\frac{2+(n-1)d}{2+nd}$	$[a_1,b_1,c_1],[a_2,b_2,c_2],[a_3,b_3,c_3],[a_4,b_4,c_4],\ldots$(註九)
$\frac{3}{4}$	$\frac{n+2}{n+3}$	$\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\ldots,\frac{n+2}{n+3}$	$[7,24,25],[9,40,41],[11,60,61],[13,84,85],\ldots$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5n-2}{5n+3}$	$\frac{3}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{18},\frac{18}{23},\ldots,\frac{5n-2}{5n+3}$	$[55,48,73],[105,208,233],[155,468,493],[205,828,853],\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{k}{k+d}$	$\frac{k+(n-1)d}{k+nd}$	$\frac{k}{k+d},\frac{k+d}{k+2d},\ldots,\frac{k+(n-1)d}{k+nd}$	$[a_1,b_1,c_1],[a_2,b_2,c_2],[a_3,b_3,c_3],[a_4,b_4,c_4],\ldots$(註十)

註八: 即 $[d^2+2d,2d+2,d^2+2d+2],[3d^2+2d,4d^2+6d+2,5d^2+6d+2],[5d^2+2d,12d^2+10d+2,13d^2+10d+2],[7d^2+2d,24d^2+14d+2,25d^2+14d+2],\ldots$

註九: 即 $[d^2+4d,4d+8,d^2+4d+8],[3d^2+4d,4d^2+12d+8,5d^2+12d+8],[5d^2+4d,12d^2+20d+8,13d^2+20d+8],[7d^2+4d,24d^2+28d+8,25d^2+28d+8],\ldots$

註十: 即 $[d^2+2kd,2kd+2k^2,d^2+2kd+2k^2],[3d^2+2kd,4d^2+6kd+2k^2,5d^2+6kd+2k^2],[5d^2+2kd,12d^2+10kd+2k^2,13d^2+10kd+2k^2],[7d^2+2kd,24d^2+14kd+2k^2,25d^2+14kd+2k^2],\ldots$

(3) 利用遞迴關係式 $\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{1}{2-\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$, 分數數列 $\langle\frac{v_n}{u_n}\rangle$ 中一般項 $\frac{v_n}{u_n}$ 皆可由首項 $\frac{v_1}{u_1}$ 求得。

$$\frac{v_n}{u_n}=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{v_1}{u_1}}}}}}}}$$

(4) $\forall\ u_1,v_1\in N$, $u_1>v_1$, $(u_1,v_1)=1$, u_1,v_1 一爲奇數, 一爲偶數, 可由首項 $\frac{v_1}{u_1}$ 利用遞迴

關係式 $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{2-\dfrac{v_{n-1}}{u_{n-1}}}$ 產生分數數列 $\langle\frac{u_n}{v_n}\rangle$ 的一般項 $\frac{v_n}{u_n}$, 再生成歐幾里得勾股數家族:

$\frac{v_1}{u_1} \to \frac{v_n}{u_n} \to \langle\frac{v_n}{u_n}\rangle \to [a_n, b_n, c_n] = [u_n^2 - v_n^2, 2u_nv_n, u_n^2 + v_n^2]$ (表9)。

結論

本研究的靈感來自於近代數學家史帝費爾由分數數列產生畢達哥拉斯勾股數家族, 以及奧撒南也由分數數列產生柏拉圖勾股數家族, 本文透過最簡真分數數列的探討, 觀察與比較各種分子與分母成等差的最簡真分數數列的特性, 最後由遞迴關係式產生最簡真分數數列, 接著生成了歐幾里得勾股數家族。整個研究探索數列的規律性, 推演出不同以往的結果。

誌謝

由衷感謝彰化師範大學數學系施皓耀教授, 因爲在施教授的鼓勵與指導下, 這一篇文章才能完成。此外, 更感謝編審老師對文章的指正。

參考資料

1. 蔡聰明 (2010)。數學拾貝。台北市: 三民。
2. From "Wikipedia, the free encyclopedia": Formulas for generating Pythagorean triples. (12 May 2014). Retrieved 12 May 2014, from http://en.wikipedia.org/wiki/Formulas_for_generating_Pythagorean_triples.
3. Ozanam, Jacques, (1844). Science and Natural Philosophy: Dr. Hutton's Translation of Montucla's edition of Ozanam, revised by Edward Riddle, Thomas Tegg, London (2014) . Retrieved 2014, from http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/pageviewer-idx?c=math;cc=math;q1=ozanam;rgn=full%20text;idno=07160001;didno=07160001;view=image;seq=7;page=root;size=50

—本文作者就讀台中市立居仁國中 —