數學傳播 40卷2期, pp. 45-56

王文素《算學寶鑒》幻圖的組合意義

羅見今

摘要: 明代王文素的《算學寶鑒》(1524) 中繪有輻輳、花王字、古珞錢、連環、瓔珞和三同六變共 6 種幻圖。本文重繪這些圖, 將其共同特點用統一的代數符號表示, 分析其各集合的構造方法, 推廣爲一般組合計數和設計問題; 提出「王文素問題」, 沿著他的思路, 求出原著條件下三類問題的解。

關鍵字: 明代數學家王文素, 《算學寶鑒》, 幻圖, 組合計數, 區組設計。

1. 明代珠算大師王文素和《算學寶鑒》

王文素, 字尚彬, 山西汾州 (今汾陽市) 人, 約於 1465 年出生於一位晉商的家庭中。「自幼穎悟, 涉獵書史, 諸子百家, 無不知者, 尤長於演算法, 留心通證」(寶朝珍語)。他也說自己「留心算學, 手不釋卷, 三十餘年, 頗諳乘除之路。嘗取諸家算書讀之」, 成爲那個時代成就最突出的算家。自古晉地多儒商, 對計算數學和珠算的發展, 殊多貢獻。明成化 (1465~1487) 年間, 他隨父到河北饒陽經商, 遂定居。王文素正德八年 (1513) 著成《通證古今算學寶鑒》30多卷, 有寶朝珍序。嘉靖三年 (1524) 完成巨著《新集通證古今算學寶鑒》12 本 42 卷, 近 50 萬字, 通稱《算學寶鑒》。該書努力修正刻本的舛訛,「誤者改之, 繁者刪之, 闕者補之, 亂者理之, 斷者續之」, 克紹其裘, 筆耕不輟,「鐵硯磨穿三兩個, 毛錐乏盡幾千根」, 將 1234 個問題厘爲 42 卷, 終於撰成此煌煌巨著。

但遺憾的是, 兩種稿本均未出版, 正如他在詩中所寫 :「有意刊傳財力寡, 無人成就恨嗟多」, 對於明代數學的發展, 亦是一重大損失。此後四百年間未見各收藏家及公私書目著錄, 民國年間由北京圖書館於舊書肆中發現一藍格抄本而得以入藏。1993 年王文素《算學寶鑒》書稿影印版由《中國科學技術典籍通匯・數學卷》刊出[1], 2008 年《算學寶鑒校注》由科學出版社出版[2]。數學史、珠算史家李培業認爲王文素是明代最傑出的數學家,《算學寶鑒》是中算史上第一部珠算著作[3], 得到學界認可。由於傳統數學的離散傳統, 加以珠算同計數密切相關, 該書中也有不少屬於組合數學史的內容, 即如以下縱橫圖中 5 種幻圖和「三同六變」問題。

2. 王文素構造的 5種花形幻圖

《算學寶鑿》卷首圖錄共有20幅圖: 除前 10 幅河洛、六觚、方圓、度量衡、五辰、五音、律呂之外, 還有後 10 幅縱橫圖: 洛書均數、花十六、求等、方勝、輻輳、花王字、古珞錢、連環、瓔珞和三同六異。前 4 幅方形圖歸為幻方類; 後6幅花形圖可稱為幻圖類, 兩者的構造同屬縱橫圖模式, 而條件和方法多變。輻輳圖與楊輝《續古摘奇算法》攢九圖相似而不同, 排法較簡; 連環圖楊輝用 72 數排成 9 環, 王文素用 120 數排成25環, 更為複雜。後 6 圖表達了複雜的設計思想和計數方法。末幅「三同六變」是王文素問題的代表, 辟為一節專題分析。王文素將設計縱橫圖總的原則寫成「求等口訣」:

「求寄如條首[1]尾繩, 根梢搭配便相停, 往還盤折[2]橫先等, 對換編排豎[3]亦同」。

原稿「」意為「首」, 多種寫法, 後錯抄為「鼠」; 常與「尾」連用, 並非「鼠尾」。上訣首句意為將經配置的連續自然數首尾兩數位置對換, 在構造幻方中經常用到。該訣可以概括為十六字:「首尾對調, 根梢搭配, 往還盤折, 對換編排」, 體現了均衡配置的思想。

幻圖該如何解讀? 屬於數學的哪一類? 如將其設計數據代數化, 問題一般便成為: (a) 從 $m = 2nk$ 個連續自然數 (一般從 1 開始) 中選擇 k ($k \geq 2$) 個不同的數聚為 1 組 (group), 使得每組之和皆等於 p, 共能聚成多少 (設為 S) 組? (b) 從 S 組中選擇 n ($n \geq 2$) 個互不重複的組構成 1 局 (block), 每局任兩組間可有 $j = 0, 1$ 個元重複, 共能構成多少 (設為 T) 局?

這應是在計數基礎上的一個設計 (block design) 問題。原著雖未提出, 但存在求 S 和 T 的要求, 形式紛繁複雜, 十分難解, 可稱為「王文素問題」, 具有組合學意義。另外, 如何構圖亦不易, 原著未給出構造法, 潘紅麗「王文素《算學寶鑒》縱橫圖初探」[4] (簡稱「初探」) 已做初步解釋。本文試圖從計數和設計的角度參加這一討論。

2.1. 輻輳圖

輻輳圖 (圖1) 將從 1 開始的 $m = 33$ 個連續自然數配置在呈米字形交叉的 $n = 4$ 條線段上, 每線包含 $2k + 1 = 9$ 個數, 均含共用的中心 33, 其和皆為 $p = 33 \times 4 + 33 = 165$。除中心外每線上的 8 數, 按「根梢搭配」, 均可兩兩結合成 $33: 32 + 1 = 31 + 2 = \cdots = 17 + 16$, 恰等於中心, 王文素興趣在此。視數對為 1 元, 則有不同的 16 元。從中選取 $k = 4$ 元, 均衡配置於 4 線中, 即得輻輳圖, 其構造法「初探」已詳述, 不贅。

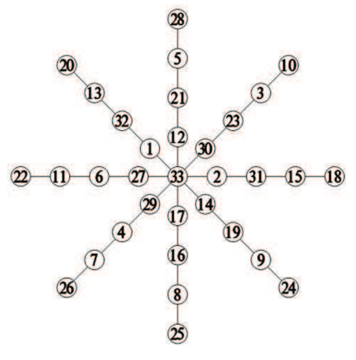

圖 1: 王文素的輻輳圖

[1]諸本將原稿中字解作「鼠」, 但其意義為「首」, 如二十三卷「首尾差分」, 可證首尾非「鼠尾」。

[2]諸本將原稿中字解作「巧」, 實應為「折」, 系原稿書誤。

[3]訣中「橫」、「豎」意義明確, 對仗工整, 原稿將「豎」字誤書為「登」。

此術已見於《續古摘奇演算法》攢九圖 (圖 2), 楊輝置 9 爲中心, $m = 33$, 不僅將 $2k+1=9$ 個數配置於 4 條線上, 其和皆爲 $p = 69\times 2+9 = 147$, 而且構成的 4 圓上 (包括中心) 的 9 數之和也等於 147, 因此 $n = 8$。

分析攢九圖的結合法。設 $a = 69/2 = 34.5$, 大元 $b > a$, 小元 $c < a$, 圖中有 6 組 (除中心外) 兩數兩數配成 4 元, 與中心聚成 1 組, 屬於 $b+c = 2a$ 型, 例如竪線組即爲 $(36+33)+(31+38) = (b_1+c_1)+(c_2+b_2) = 4a$; 僅橫線組屬 $3b+c = 4a$ 型, 內圓組屬 $b+3c = 4a$ 型。王文素熟知楊輝演算法, 輻輳每元的結合法較攢九爲簡, 不能應用於 4 圓, 故改名爲「輻輳」。

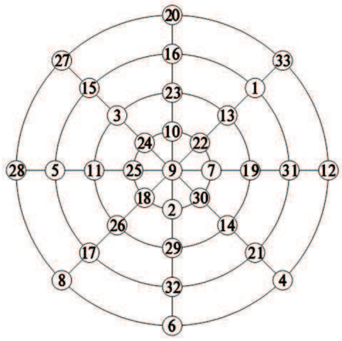

圖 2: 楊輝的攢九圖

2.2. 花王字圖

花王字圖 (圖3) 將從 1 開始的 $m = 104$ 個連續自然數巧妙配置, 構成 $n = 17$ 個圓, 每環包含 $2k = 8$ 個數, 其和皆爲 $p = 105\times 4 = 420$。將和等於 105 的兩數視爲 1 元, 利用上述十六字訣「根梢搭配」, 易知不同的元共有 52 個。王文素用左右對稱、兼顧上下、「往還盤折, 對換編排」的方法, 將各元均衡配置到 17 圓中, 每 1 環含 $k = 4$ 元。具體做法較爲複雜,「初探」也未涉及, 此不盡述。

全圖中兩圓的交集爲共用元, 即在該局相交兩組中僅有 1 元重複, 而 1 圓可與 1, 2, 3, 4 圓相交。同樣利用這 104 個自然數, 改變各數的位置, 別的條件不變, 其他花王字圖是否存在、如何構造?

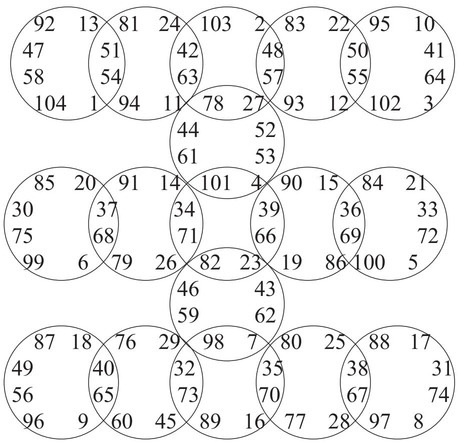

圖 3:《算學寶鑒》花王字圖

2.3. 古珞錢圖

古珞錢圖 (圖4) 將從 1 開始的 $m = 120$ 個連續自然數順序配置, 構成環環相套的 $n = 25$ 個圓, 每環包含 $k = 8$ 個數, 其和皆爲 $p = 121\times 4 = 484$。構造該圖時, 利用十六字訣, 自然數的連續性比較明顯。將和等於 121 的兩數視爲 1 元, 共有不同的 60 元, 只須追蹤 1∼60 在圖中的分佈就一目了然。構造法：將前 30 元橫向左右連續盤折往還,

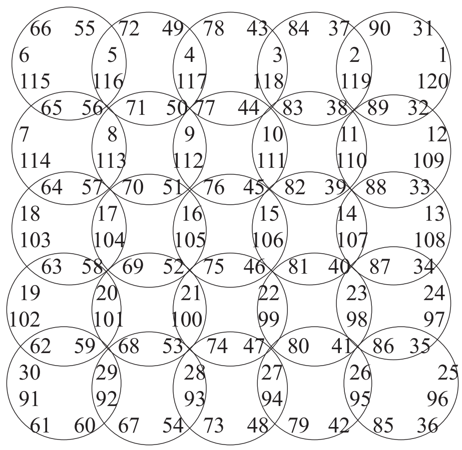

圖 4:《算學寶鑒》古珞錢圖

後 30 元縱向從下向上分段編排, 縱橫交織成圖, 使得每枚古錢所含數目皆相等。易知任兩圓如相交僅交於 1 元, 且任 1 元僅能成為兩圓交集, 但任 1 圓可與 2, 3, 4 圓相交, 構造之難, 遠超出益智圖, 自然會引起興趣: 是否還存在類似的排法? 令人吃驚的是, 王文素變換圖形, 給出了新的答案。

2.4. 連環圖

連環圖 (圖5) 與古珞錢圖都是把從 1 開始的 $m=128$ 個連續自然數順序配置, 構成環環相套的 $n=25$ 個圓, 每環包含 $2k=8$ 個數, 但其配置的方式不同, 每個圓的和皆為 $p=129\times 4=516$。原著每個數都用小圓圈套住, 本文為便於觀察計算, 將其省去, 而把每 8 個數所在的圓繪出, 這正是原圖本意, 而且與花王字、古珞錢圖畫法保持一致。

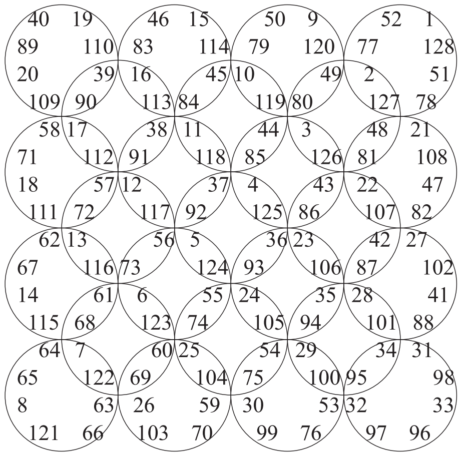

圖 5:《算學寶鑒》連環圖

將和等於 129 的兩數視為 1 元, 共有不同的 64 元, 1∼64 可作為每元的標號。該圖自然數的連續性比較明顯, 只須看 1∼64 的分佈就可以了。構造法: 將前 32 元左斜、後 32 元右斜編排, 交叉成圖, 使得每圓所含 $k=4$ 元皆相等: 如右上第 1 環 $1+128=2+127=52+77=51+78$。任 1 圓可與 2, 3, 4 圓相交, 任兩圓僅交於 1 元, 且任 1 元僅能成為兩圓交集。

2.5. 瓔珞圖

瓔珞圖 (圖6) 將從 1 開始的 $m=42$ 個連續自然數巧妙配置, 構成環環疊加的 $n=13$ 個圓, 每環包含 $2k=6$ 個數, 其和皆為 $p=43\times 3=129$。此圖妙在外 7 圓之內, 又形成內 7 圓 (中心之圓重複), 每圓利用劃在內部的 6 數, 其和也恰為 129。

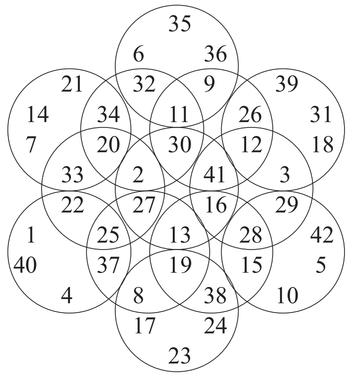

圖 6: 瓔珞圖

將和接近或等於 43 的兩數視為 1 元, $b>43$ 為大元, $a=43$, $c<43$ 為小元。每圓各有 $k=3$ 元, 從結合法看, 除中央 1 圓 3 元為 $3a=43\times 3$ 外, 其餘 12 圓就是和為 $3a$ 的 $a+b+c$, $b+2c$, $2b+c$ 三種類型。例如圖中最上 1 圓: $b=35+9$, $a=32+11$, $c=36+6$, 屬於 $a+b+c$ 型。

瓔珞圖的結合法較為複雜, 這是王文素排列配置的結果。分析各元的結合法有便於認識任一圓何以能夠滿足其和皆為 129 的條件。事實上結合法越複雜, 圖的功能越特異。

1～21 可作爲每元的標號, 追蹤其在圖中的分佈。原著的配置方法「初探」已有解析。設計出新的瓔珞圖需要極高數字悟性, 親自試驗一下, 就會對王文素的構造技巧讚歎不已。

當然, 王文素並不是從組合論角度考慮的, 但構造這樣複雜的幻圖也並非就是爲了消遣。這些圖具有的數學意義需要深入發掘, 不獨是數學史的任務。作爲縱橫圖的分支, 幻方已隨數學投入的增多而逐漸被學界接受, 幻圖研究也會因認識深化而找到更多的應用。


三同六變之圖

假令二十四老人長者壽高一百次者遞減一歲止於七十七共積總壽二千一百二十有四卜會三社八老相令七百八歲蓋因人情逸順散而復令更換六次其換六次其積仍均七百有八此見連用之道

求積法曰併首尾共一百七十七以二十四老乘之得四千二百四十八折半得總積二千一百二十四

求等法曰依求圖列數得積三行先等第一圖是也餘圖列求其變尤多不及備載

圖 7: 王文素《算學寶鑑》圖錄「三同六變」圖文

3. 王文素問題「三同六變」

3.1. 王文素問題的提出

《算學寶鑑》卷首圖錄的最後一個問題是「三同六變」:

「假令二十四老人, 長者壽高一百, 次者遞減一歲, 止於七十七。共積總壽二千一百二十有四。卜[4]會三社, 八老相令 (會) 七百八歲, 蓋因人情逸順, 散而復令 (會), 更換六次, (其換六次, 衍文) 其積仍均七百有八, 此見連用之道。」

該題意即: 有 $m = 2nk = 24$ 位老人聚會, 年齡從 100 歲到 77 歲, 依次相差 1 歲, 共 2124 歲。$2k = 8$ 人分到 1「社」(組), 共有 $n = 3$ 組, 每組年齡和皆 $p = 708$ 歲; 3 組爲 1 變局。問能編成多少不同組 (S)? 能構成多少相異局 (T)?

原著的 6 種答案已在圖 7 中, 最後他說 :「其變尤多, 不及備載」。即他已明確認識到求變局數很難 : 這就提出了「王文素問題」, 須找出共有多少種答案。

[4]卜: 通過占卜, 確定地址。

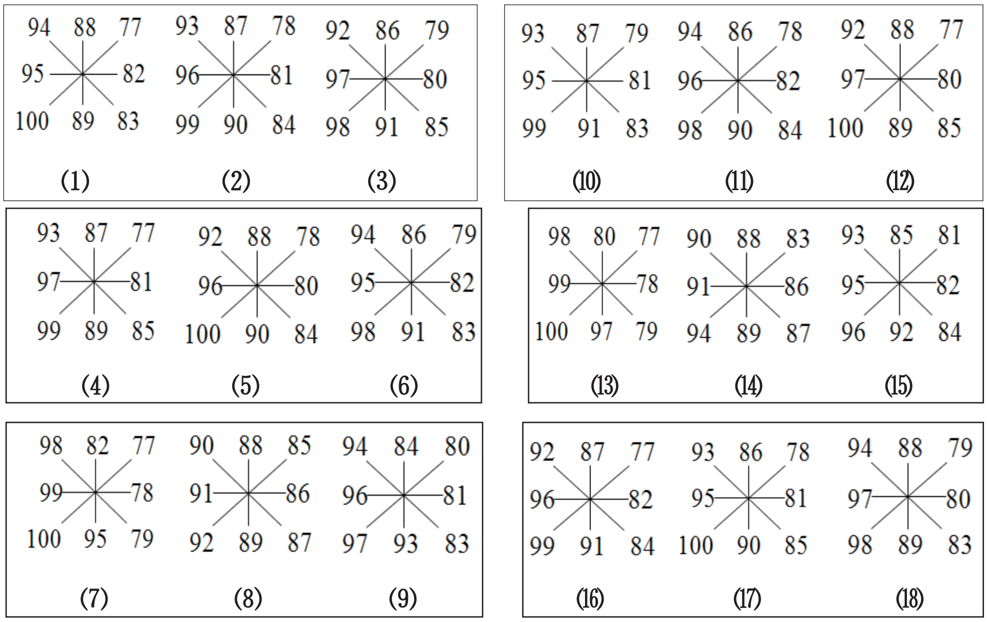

圖 8: 王文素「三同六變」: 每組和為 708 歲的 3 組構成 77~100 歲的滿員 6 局。

這是一種複雜約束條件下的組合問題, 李培業較早認識到它的組合性質, 但迄今研究者不多。李珍給出了 4 種解析途徑, 多次列表, 重點在尋找答案總數。需要用到新提出的「正排列」、「反排列」概念, 並且將元素的位置也編號[5]。作者認為, 尋找共有多少合適的方案較難, 關鍵在明確條件, 分類考察其選擇方法。本文據原著給出的條件和結果, 探討王文素創設此題的組合意義, 利用現有的組合工具, 嘗試從另一途徑來考慮這一問題。

3.2. 王文素問題的分類

首先分析原文, 修正疏誤。將圖 7 中 18 組數先從上向下、再從右向左按「六變」循序編號, 得到圖 8, 18 組已改為從左向右排列。圖 8 中在 6 框內共形成 6 變局, 每局從 77 到 100, 既不缺少, 也無重複, 本文稱為「滿員局」。須說明圖 7 中: 組 (9) 和 701, 錯; 左下之數原文 90, 非, 系筆誤, 應是 97。組 (18) 之和 704, 錯; 左上之數原文 90, 非, 系筆誤, 應是 94。另外, 圖 7 中有 16 組各數均從小到大排列, 圖 8 中組 (12) 和 (15) 各數也改為從小到大的順序, 繪成了數字方圖 (其實也可繪為圓圖)。

在圖 7 中, 每個方形數位圖取數順序從上向下、從右向左。應把視點聚焦於「元」— 即整數對, 每一數都有另一數與之搭配, 合成 $a=177$, 大元 $b>177$, 小元 $c<177$, $b+c=2a$。圖 8 中線段相連的兩數即為 1 元, 每組均有 $k=4$ 元; 每局 $n=3$ 組, 共有 $nk=12$ 元。

然後討論王文素選擇每組各數的方法, 這是構造的關鍵。他雖未詳論, 而 6 變 18 組數據

提供了他的思路, 據此可歸結爲「王文素問題」的三類子問題, 以及有待解決的問題。

組(1)→	77	82	83	88	89	94	95	100
組(2)→	78	81	84	87	90	93	96	99
組(3)→	79	80	85	86	91	92	97	98

圖9: 以 24 個連續自然數構成首局的往還盤折法

(a) 圖 8 的組 (1)∼(3) 之所以處於首局, 這不是隨意的: 將選定的 $m = 2nk = 24$ 個連續自然數按照「往還盤折」法均衡配置 (圖9), 可獲得每組 $2k = 8$ 個數的 $n = 3$ 組, 稱爲 1 變局, 各組之和皆 $p = 708$, 試問可編多少不同的組 (S)? 有多少種相異的變局 (T)? 各組間無交集 $(j = 0)$, 全覆蓋, 數學特點鮮明, 這構成第一類問題。

(b) 圖 8 的組 (5) 和組 (11) 所選 8 數皆爲偶數, 此非偶然, 說明王文素已發現從 24 數中選擇 8 偶數能滿足編組條件。注意到, 該兩偶數組中無元重複 $(j = 0)$。須求從此 12 偶數中共能編成多少偶數組 (S)。$m = 12$ 時每組 8 人分 3 組顯然不能構成每人只出現一次的滿員局, 那麼縮小爲 4 人 1 組、能構成的滿員局數 (T) 應是多少? 這裡將此稱爲第二類問題。

(c) 圖 8 的組 (4) 和組 (10) 所選 8 數皆爲奇數, 與上述偶數組情況類似, 從 12 奇數中選擇 8 個能夠滿足編組的條件, 該兩奇數組中也無元重複 $(j = 0)$, 人們要問: 從此 12 奇數中共能編成多少奇數組 (S)? 王文素舉出了組 (4) 和組 (10) 的兩例。在縮小爲 4 人 1 組即 $k = 2$ 元時這些數組能夠構成多少局 (T)? 這裡將此稱爲第三類問題。

3.3. 三類王文素問題的解

分別討論 $j = 0$ 的選擇方法、構造方案和計算結果。王文素給出了樣板, 但未解釋。有必要沿著他的思路繼續做分析, 屬於受到歷史啟發的拓展研究。

首先明確王文素問題的條件:

(a) 同組人各不同, 即無重複的元。

(b) 每組各人位置不固定, 即變換序號仍視爲同組。

(c) 每局各組位置不固定, 即變換序號仍視爲同局。

(d) 人數一定是偶數, 且可被 n 整除, 即 $m = 2nk$, 這時 k 爲元數, $2k$ 爲每組人數。

第一類問題: **連續數的滿員局。**原題每組年齡均值爲 88.5 歲, 所設 24 個連續自然數中, 首尾相加, 一奇一偶, 其和均爲 1 元 $a = 177$: $100 + 77 = 99 + 78 = \cdots = 89 + 88$。不同元數 $k = 12$; 從中任取 4 元即得相異組總數 $S = \binom{12}{4} = 495$。須求出可能的變局數 T。本題兩條件: (a) 任一局所選 3 組必須覆蓋全部 12 元, 即「滿員局」; (b) 所有局必須無重複。

求 T 第一法: 從 S 中取 3 組構成 2 千多萬局, 以下可證其中 99.97% 不符合兩條件。

求 T 第二法: 為保證所有局為滿員局, 從 12 元中任取 4 元構成第 1 組, 再從所餘 8 元中任取 4 元構成第 2 組, 最後所餘 4 元構成第 3 組, 共有組合: $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}=495\times 70\times 1=34650$。但此非所求 T, 因其中有大量局重複, 須將其除去。

在以下求解過程中需要用到一個恒等式: $\frac{1}{n}\binom{nk}{k}=\binom{nk-1}{k-1}$, 證明如下:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\binom{nk}{k}&=\frac{nk(nk-1)\cdots(nk-k+1)}{n\cdot k\cdot(k-1)!}\\&=\frac{(nk-1)(nk-2)\cdots[(nk-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}=\binom{nk-1}{k-1}\end{aligned}\tag{1}$$

求 T 第三法:

(a) 先構造 T 局的第 1 組: 任選 1 元後, 從其他 11 元中任選 3 元與之相配, 共可配成滿足涵蓋各元且相異的 $\binom{11}{3}=165$ 組; 由恒等式知 $\binom{11}{3}$ 僅占 $\binom{12}{4}=495$ 的三分之一。已包含所有元, 對任意元皆成立, 因此入局第 1 組有且僅有此 165 組。

(b) 其次構造 T 局的第 2 組: 從 8 元中任選 1 元後, 從其他 7 元中任選 3 元與之相配, 共可配成滿足涵蓋其餘且相異的 $\binom{7}{3}=35$ 組; 由恒等式 (1) 知 $\binom{7}{3}$ 僅占 $\binom{8}{4}=70$ 的二分之一。因此入局第 2 組與第 1 組相異的有且僅有此 35 組。1、2 組相配, 個數相乘, 擴大變局數值。

(c) 所餘 4 元, 填補前兩組所缺, 自然成為 T 局的第 3 組, 不影響前兩次選項乘得的結果。最後得到合格的 T 局數: $T=\binom{11}{3}\binom{7}{3}\binom{3}{3}=165\times 35\times 1=5775$。用表示成 $n=3$ 時的公式:

$$T=\frac{1}{3!}\binom{3k}{k}\binom{2k}{k}\binom{k}{k}\tag{2}$$

由此可知求 T 的第二法錯誤, 包含的重複局數占 34650 的六分之五。

第二類問題: **偶數組的構造。**始自 78 止於 100 的 $m=12$ 個偶數, 從中任選互異的 $2k=8$ 數聚為 1 組, 其和 $p=708$, 不同的組 S 共有多少? 任意 $n=3$ 組構成 1 變局, 求此總局數 T。

兩偶數之和不等於 $177=a$, 而 4 偶數之和可等於 $354=2a$, 選 $178+176$ 一大一小兩元相配 $b+c=2a$, 兩大兩小配成的 4 元即為所求 1 組。

構造偶數組的方法: 選擇兩偶數使其和為 $178=b$, 共有 6 種, 記作 $b_1=78+100$, $b_2=80+98$, $b_3=82+96$, $b_4=84+94$, $b_5=86+92$, $b_6=88+90$; 選擇兩偶數使其和為 $176=c$, 共有 5 種, 記作 $c_1=78+98$, $c_2=80+96$, $c_3=82+94$, $c_4=84+92$, $c_5=86+90$。使 $2b+2c$ 相搭配, 聚成符合條件的 4 元組。但為求 S, 不可簡單地從 $6b$ 中取

2 元, 再與從 $5c$ 中取 2 元相配合: $\binom{6}{2}\binom{5}{2} = 150$, 其中既有不少組合重複的元, 又有許多重複的組。以下的求法, 可證明其不合格率占 88%。

爲除去這些重複, 須標記不能搭配的元, 涉及到相容組合計數。如圖 10 所示, 用虛線連接的 b, c 表示兩元相斥, 因爲內有相同的數, 聚爲 1 組則造成重複; 而未連接的各 b, c 間均可結合, 謂之兩元相容。由此可知: 首尾 b_1, b_6 各與 1 元相斥; 其餘各元均與兩元相斥。分以下 4 種情況討論遍選 $2b$ 再定 $2c$ 的組合法, 可稱爲相容組合計數。

$78+100=b_1$
$c_1=78+98$
$80+\ 98=b_2$
$c_2=80+96$
$82+\ 96=b_3$
$c_3=82+94$
$84+\ 94=b_4$
$c_4=84+92$
$86+\ 92=b_5$
$c_5=86+90$
$88+\ 90=b_6$

圖 10: 虛線所連兩元相斥, 內有相同的數, 不能結合成一組

(a) 選 b_1, b_6: 相斥之 c 共有 2 個, 從 5−2 個 c 中選 $2c$: $\binom{3}{2} = 3$, 即可聚成 3 組: $b_1b_6c_2c_3$, $b_1b_6c_2c_4$, $b_1b_6c_3c_4$。

(b) 選 b_1, b_2: 相斥之 c 共有 2 個, 即從 $3c$ 中選 $2c$, 同上可聚成 3 組: $b_1b_2c_3c_4$, $b_1b_2c_3c_5$, $b_1b_2c_4c_5$。

同理, 選 b_5, b_6 也可聚爲 3 組: $b_5b_6c_1c_2$, $b_5b_6c_1c_3$, $b_5b_6c_2c_3$。

(c) 在選 b_1, b_3 (以及 b_1, b_4 或 b_1, b_5) 時, 相斥之 c 有 3 個; 從 5−3 個 c 中選 $2c$, 選法唯一, 即在此 3 種情況下, 各可聚爲 1 組: $b_1b_3c_4c_5$, $b_1b_4c_2c_5$, $b_1b_5c_2c_3$。

同理, 在選 b_2, b_6 (以及 b_3, b_6 或 b_4, b_6) 時, 亦可得 3 組: $b_2b_6c_3c_4$, $b_3b_5c_1c_4$, $b_4b_6c_1c_2$。

(d) 在選 b_2, b_3 (以及 b_3, b_4 或 b_4, b_5) 時, 相斥之 c 有 3 個; 從 2 個 c 中選 $2c$, 選法唯一, 同上各可聚爲 1 組: $b_2b_3c_4c_5$, $b_3b_4c_1c_5$, $b_4b_5c_1c_2$。另外, 在選 b_2, b_4 (以及 b_2, b_5 或 b_3, b_5) 時, 相斥之 c 有 4 個; 從 5−4 個 c 中選 $2c$, 不足, 故不能構成 1 組。

綜上, 可得 18 組符合要求的偶數組。按照以上討論中出現的先後順序排組, 可得圖 11:

組 (1) :{78, 80, 82, 88, 90, 94, 96, 100}	組 (10) :{78, 82, 84, 86, 90, 92, 96, 100}
⊙ 組 (2) :{78, 80, 84, 88, 90, 92, 96, 100}	組 (11) :{78, 80, 84, 86, 90, 94, 96, 100}
組 (3) :{78, 82, 84, 88, 90, 92, 94, 100}	組 (12) :{78, 80, 82, 86, 92, 94, 96, 100}
組 (4) :{78, 80, 82, 84, 92, 94, 98, 100}	組 (13) :{80, 82, 84, 88, 90, 92, 94, 98}
組 (5) :{78, 80, 82, 86, 90, 94, 98, 100}	組 (14) :{78, 82, 84, 88, 90, 92, 96, 98}
組 (6) :{78, 80, 84, 86, 90, 92, 98, 100}	組 (15) :{78, 80, 84, 88, 90, 94, 96, 98}
組 (7) :{78, 80, 86, 88, 90, 92, 96, 98}	組 (16) :{80, 82, 84, 86, 90, 92, 96, 98}
組 (8) :{78, 82, 86, 88, 90, 92, 94, 98}	⊙ 組 (17) :{78, 82, 84, 86, 90, 94, 96, 98}
組 (9) :{80, 82, 86, 88, 90, 92, 94, 96}	組 (18) :{78, 80, 84, 86, 92, 94, 96, 98}

圖 11: 據「三同六變」兩示範偶數組所獲在王文素條件下全部 18 個相異偶數組

以上得到互異的偶數組共有且僅有 $S=18$ 組。原著圖 8 組 (5) 和組 (11) 必在其中: 即圖11的組 (2) 和組 (17), 用 $\odot$ 標出。王文素將圖 8 組 (5) 和組 (11) 置於兩局之中, 圖 11 除組 (2) 和組 (17) 外其餘 16 組必可置於另相異的 16 局中, 怎樣求出, 是第二類問題中尚未解決的。

圖 11 這 18 組非「三同六變」, 因不可能構成滿員局。偶數組 $m=2nk=12$, $n=3$ 時, $k=2$, 意即: 總人數減半, 每組人數相應減半。由此看來, $\binom{6}{2}$ 即 $\binom{nk}{k}$, $\binom{5}{2}$ 即 $\binom{nk-1}{k}$; $\binom{5-2}{2}$ 即 $\binom{3k-k-1}{k}$, 有 3 項; $\binom{5-3}{2}$ 即 $\binom{3k-k-2}{k}$, 有 2 項。這樣, 求 $n=3$ 時相異的偶數組數 S, 對於 k 一般有:

$$S=3\cdot 2\binom{3k-k-1}{k}\binom{3k-k-2}{k}=6\binom{2k-1}{k}\binom{2k-2}{k} \tag{3}$$

當 $k=2$ 時 $S=18$。再求局數 T: 將和爲 1068 的 12 個偶數分成 3 組, 每組 178×2, 即從圖 10 的 6 個 b 中任選 2 元構成 T 局的第 1 組: 這與第一類問題相同, 故由式 (2) 知爲 $T=15$。

這個問題源於 500 年前的歷史。從組合數學看來, 應當屬於與通常約束條件不同的一類平衡不完全區組設計 BIBD (balanced incomplete block design)。

第三類問題: **奇數組的構造。** 始自 77 止於 99 的 $m=12$ 個奇數, 從中任選互異 $2k=8$ 數聚爲 1 組, 其和皆 $p=708$, 相異組 S 共有多少? $2k=4$ 人, $n=3$ 組構成 1 局, 求滿員局數 T。

根據奇偶的對稱性, 對奇數組所求組數應當與偶數組所得組數相同。再利用以上相容組合計數法, 選擇題設兩奇數使其和爲 $178=d$, 共有 5 元; 選擇兩奇數使其和爲 $176=e$, 共有 6 元, 如圖 12 所示。使 $2d+2e$ 搭配, 聚成符合條件的 4 元組。用虛線連接的 d,e 表示兩元相斥, 未連接的各 d,e 間兩元相容。首尾 e_1,e_6 各與 1 元相斥; 其餘各元均與兩元相斥。同上分 4 種情況討論遍選 $2e$ 再定 $2d$ 的相容組合法, 只要將上述偶數組 18 種結果中的 b,c 換爲 e,d (而不變足碼順序) 即可獲以下 18 奇數組:

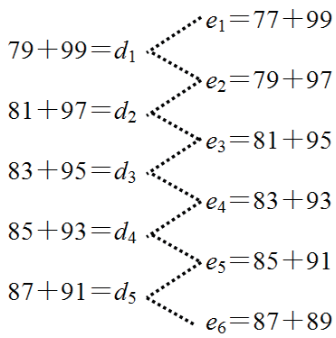

圖 12: 虛線所連兩元相斥, 內有相同的數, 不能結合成一組

組 (1) {77, 81, 83, 87, 89, 95, 97, 99}	組 (10) {77, 81, 85, 87, 91, 93, 95, 99}
◯ 組 (2) {77, 81, 85, 87, 89, 93, 97, 99}	組 (11) {77, 81, 83, 87, 91, 93, 97, 99}
組 (3) {77, 83, 85, 87, 89, 93, 95, 99}	組 (12) {77, 81, 83, 85, 91, 95, 97, 99}
組 (4) {77, 79, 83, 85, 93, 95, 97, 99}	組 (13) {79, 83, 85, 87, 89, 93, 95, 97}
組 (5) {77, 79, 83, 87, 91, 95, 97, 99}	組 (14) {79, 81, 85, 87, 89, 93, 95, 99}
組 (6) {77, 79, 85, 87, 91, 93, 97, 99}	組 (15) {79, 81, 83, 87, 89, 93, 97, 99}
組 (7) {79, 81, 85, 87, 89, 91, 97, 99}	組 (16) {79, 81, 85, 87, 91, 93, 95, 97}
組 (8) {79, 83, 85, 87, 89, 91, 95, 99}	◯ 組 (17) {79, 81, 83, 87, 91, 93, 95, 99}
組 (9) {81, 83, 85, 87, 89, 91, 95, 97}	組 (18) {79, 81, 83, 85, 91, 93, 97, 99}

圖 13: 據「三同六變」兩示範奇數組所獲在王文素條件下全部 18 個相異奇數組

如用十分費時但能檢驗全過程的窮竭法, 或用速度極快但難以驗證的電腦程式設計排組, 均可求出相異的奇數組共有且僅有 $S = 18$ 組, 如圖 13 所示。原著圖 8 所提供的組 (4) 和組 (10) 必在其中: 即圖 13 的組 (2) 和組 (17), 用 ◯ 標出。注意到, 王文素將圖 8 組 (4) 和組 (10) 置於兩局之中, 而且每局還有另 1 偶數組, 做法令人深思: 圖 13 除組 (2) 和組 (17) 其餘 16 組必能與相應偶數組配合, 一同置於另相異的 16 局中, 怎樣構造? 也是第三類問題尚未解決的。

這 18 組不可稱為「三同六變」。將每組人數從 8 縮小為 4 後方能構成滿員局, 與偶數組相異局數求法一樣, 在圖 12 的 6 個 e 中選擇, 可利用式 (2), 其結果同為 $T = 15$。

4. 結語

數學史上, 有一些組合問題引起長期的興趣, 如約瑟問題, 科克曼女生問題, 夫婦入座問題等; 有的如女生問題, 已經變成世界著名難題。本文討論的王文素問題產生於 500 年前, 他把一個派生能力很強的數學問題大衆化, 使之普及, 可推衍出形形色色的問題, 極具生活情趣。例如, 可以把老人赴宴偶數組視為老夫人, 奇數組視為老先生, 等等。

推廣王文素問題, 縮小 m, n, k, p 等後建立小樣本, 便於核對本文證明過程, 如:

某歌舞團 19∼30 歲 12 個演員, 年齡各不相同, 一天分 3 組、每組 4 人演出一次。團長要求每組年齡之和均等於 98 歲。試問能夠編出多少不重複的組? 利用這樣一個分組方案, 該團能夠演出多少天? 假如改為一天演出 3 次, 每次 4 人; 任 1 演員可出場第 2、3次, 則有多少分組方案? 當然數據也可擴大; 改變年齡段, 起名夏令營, 巡邏隊, 旅遊團, 凡此種種, 可衍生出許多王文素問題來。

王文素的 6 局 18 組還暗含很多問題, 例如圖 8 的組 (16) 和組 (17) 的元是從奇數組和

偶數組中分別選取的, 配成兩個奇偶組, 置於同局。由此他指出了一種派生法, 可稱爲第四類問題。

還有: 每局 3 組間如有重複 ($j=1$), 例如赴宴並非同時, 第 1 組去一次, 下次除調換 1 元 2 老外, 還是那所余的原班 3 元 6 老人, 第三次也一樣, 共有多少分組? 再如: 聯繫前述 5 種幻圖, 如果認爲所示任兩圓 (組) 間的交集即重複的元 ($j=1$), 那麼如何解王文素問題將有助於解決構造各類新幻圖的難題。這些稱爲其他各類問題。

據李珍一項研究[6] 將該題稱爲「三同八聚」, 即以固定的 $n=3$ 和 $2k=8$ 命名; 又認爲「王文素問題的一般形式爲『n 同 k 聚』」[7], 並給出一個集合論的定義, 用代數法求解。

本文建議稱其爲「王文素問題」, 並認爲有必要使用集合論、組合計數和設計的方法。經上討論,「n 同 k 聚」作爲一個子問題, 其求變局的一般公式爲 (k 爲元數, 組人數之半):

$$T=\frac{1}{n!}\binom{nk}{k}\binom{nk-k}{k}\binom{nk-2k}{k}\cdots\binom{k}{k}. \tag{4}$$

總之, 王文素說 :「其變尤多, 不及備載」, 他把沒有寫出的變局留給了後代。王文素問題在中算史及世界數學史中非常特異, 是一大類問題, 還涉及到如何解讀幻圖: 這些幻圖均爲連續自然數在不同約束條件下適當配置, 聚爲一些等值陣列, 構成若干相異數局, 屬於在組合計數基礎上的區組設計。幻方又何嘗不是如此, 這就給組合數學史增添了素材, 一旦被認識, 縱橫圖將會引發更多的興趣。

參考文獻

1. (明) 王文素著。算學寶鑒。中國科學技術典籍通匯, 郭書春主編, 數學卷(2), 鄭州: 河南教育出版社, 337-971, 1993。
2. (明) 王文素著。劉五然、郭偉、潘有發校注。算學寶鑒校注。北京: 科學出版社。2008。
3. 李培業。我國第一部珠算書 —《算學寶鑒》。中國珠算心算協會主辦, *珠算*, 102(1), 2-5, 1997。
4. 潘紅麗, 王文素《算學寶鑒》縱橫圖初探。*珠算*, 124(5), 4-5, 2000。
5. 李珍。王文素「三同六變」題解。*珠算*, 122(3), 2-4, 2000。
6. 李珍。王文素「三同六變」題的推廣。*珠算*, 123(4), 2-3, 2000。
7. 李珍。關於「n 同 k 聚」問題的研究。*珠算*, 124(5), 2-3, 2000。

—本文作者任教內蒙古師範大學科技史研究院—