數學傳播 40卷2期, pp. 35-38

二元算幾不等式的一個無字證明
—— 附記一段學思歷程

周伯欣

數缺形時少直觀, 形少數時難入微。

數形結合百般好, 隔離分家萬事休。

— 華羅庚 (1910~1985)

假設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 個非負實數, 我們定義 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 爲此 n 數的「算術平均數 (Arithmetic Mean)」, 而 $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$ 爲「幾何平均數 (Geometric Mean)」。衆所周知, 關於這兩個平均數, 恆成立不等關係:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}, \tag{1}$$

其中等號成立的充要條件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。此不等式稱爲「算幾不等式 (Arithmetic-Geometric Mean Inequality)」。

99 課綱的高中數學在高一上的第 1 章「數與式」中討論了 $n=2$ 的情況, 並以此不等式去解決一些極值問題。由於第 1 章也談到了常用的多項式的因式分解, 部分學校的教師會以「三元三次輪換不等式」

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{2}$$

爲出發點, 結合配方技巧, 證明算幾不等式在 $n=3$ 的情況。至於一般情況 (n 爲任意正整數) 的證明, 則通常留到高一下學期講數學歸納法時作爲進階例題講授 (Cauchy 的倒推歸納技巧)。

大數學家 Michael Atiyah 在其演講[1] 中討論了幾何與代數之間的關係,

[1]阿提雅 (Michael Atiyah) 〈二十世紀的數學:2000年世界數學年講詞〉(翁秉仁譯) http://yaucenter.nctu.edu.tw/journal/0710/%full_content/%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%96%E7%B4%80%E7%9A%84%E6%95%B8%E5%AD%B8.pdf

> 空間直覺或空間知覺是威力宏大的工具, 這也正是幾何學爲何成爲數學重要分支的原因, 它不只能運用於顯然具有幾何特性的東西, 甚至對並非如此的東西也有用, 我們可以試著爲它賦予幾何形式, 如此一來就能運用我們的直覺。直覺是我們最有力的武器, 當你試著向學生或同事講解一段數學時就很明顯, 你的論證既長又難, 但是當學生最後明白時, 他會怎麼說? 他說 :「我看到了 (I see, 我懂了)!」這裡「看」與「理解」是同義詞 $\cdots$

對於低維度的情況 ($n=2,3$), 一般來說我們也許可以嘗試尋找相應的幾何說明, 幫助我們以直觀角度理解數學命題。事實上, 以幾何圖形來說明數學定理已是近年來數學教育的一項重點, 李國偉教授在其文章中寫道 :「 近年在西方的數學教育文獻裡, 不時可見所謂『無字證明』(Proof without Words) 的範例 $\cdots$『無字證明』至少可以當作一種輔助的工具, 賦予式子較具體的解釋, 從而說服學生接受它們的正確性。」[2]

絕大多數的高中數學教本[3] 在討論算幾不等式 $n=2$ 的情況之際, 基於「數形結合」的觀點, 都會使用下圖來作爲此不等式的無字證明。筆者回憶初學算幾不等式時 (似乎是在國三讀相

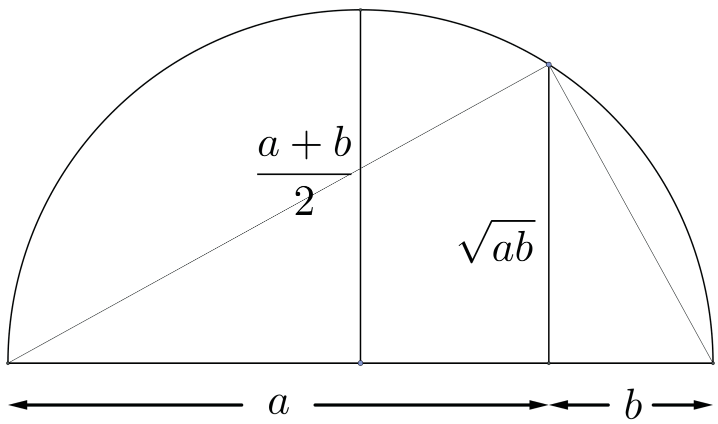

圖 1

似形時), 對於代數的證明其實不甚了了, 而當時就是看了此圖才茅塞頓開, 深刻體會到一張圖勝過千言萬語的威力!

多年之後, 筆者的身份易位, 從講台下聽講的學生變成講台上授課的老師, 每當講到算幾不等式, 總是先講代數證明, 然後畫出此圖, 告訴學生不等式中的每一項其實都可以找到相對應的幾何量, 心中期望當年自己學習時內心的雀躍可以傳達給學生, 讓學生可以感受到那種數形結合的美妙。然而, 在筆者的課堂上, 卻鮮見學生對此圖證有什麼心領神會的表現, 多半只是將這張圖形背起來, 然後催眠自己: 這確實就是算幾不等式的無字證明了。

[2] 李國偉, 證明是一種說服的過程 (Proof is a process of persuasion), http://highscope.ch.ntu.edu.tw/wordpress/?p=14904.

[3] 例如許志農主編。高中數學 (一)。臺北市 : 龍騰文化有限公司, 2015。

筆者對於如此消極的結果感到十分喪氣, 於是筆者自問:「到底是爲什麼這張圖會讓學生感到難以理解呢? 有更簡單的圖解嗎?」在一番調查後, 對於學生感到不易理解的問題, 總算是找到理由。之所以造成理解困難的點就在於圖中的 $\sqrt{ab}$, 這個量的導出, 其實賴於相似三角形的邊長比例關係 (或謂子母相似性質), 另外還牽扯到圓周角的度量 (半圓才有直角)。確實這些知識都在國三上學期談過, 但是國三下學期幾乎不談幾何, 再加上暑假兩個月, 筆者的學生升上高一後, 腦袋中的幾何知識早已拋到九霄雲外。等到講這張圖的時候, 教師端對學生的期待與學生端具備的知識就產生了落差!

筆者爲尋求更簡單的圖解以幫助學生學習, 遂查閱了大量相關資料。目前關於此類無字證明的文獻, 大抵以 MAA 出版, 由 Roger B. Nelsen 所著的"*Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*"[4], 兩卷收錄最爲詳盡。不過該書所收集的證明, 筆者認爲數學難度均不亞於圖 1。秉著「盡信書不如無書」的精神, 筆者決心自己來想出一個「易懂」、「預備知識少」的無字證明。

終於在 2014 年 11 月 6 日晚上, 當時筆者躺在床上準備就寢, 不知爲何, 腦袋想著立體空間中多面體的切割問題, 突然, 一個想法在筆者腦中迸現,「這樣不就證明了算幾不等式嘛!」筆者立刻自床上跳起, 奔到書桌畫下腦中的圖形。以下是筆者當時的思路: 考慮兩正方形, 面積分別爲 a 與 b, 不失一般性, 假定 $a \geq b$。這兩個正方形的邊長分別爲 $\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ (我想這是從 a 獲得 $\sqrt{a}$ 的一個最簡單的方式), 將這兩個正方形相併在一起, 然後同時沿主對角線方向切割, 如圖 2所示: 如此我就得到 $\dfrac{a}{2}$ 與 $\dfrac{b}{2}$ (各是半個正方形), 兩塊三角形的面積和正是 $\dfrac{a+b}{2}$。

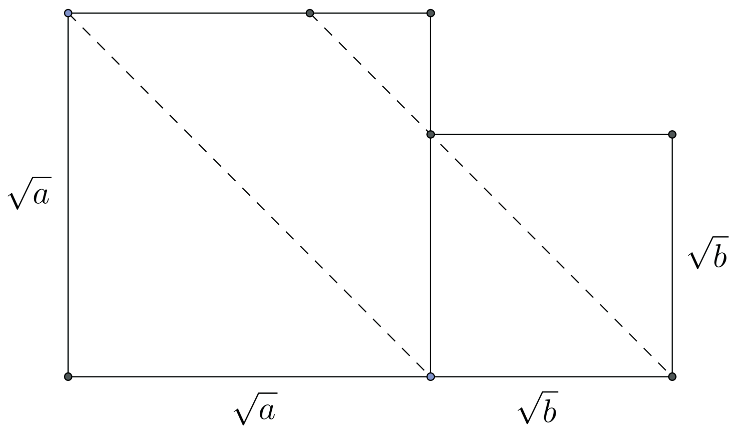

圖 2

那 $\sqrt{ab}$ 怎麼辦呢? 注意到 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, 然後我盯著圖 2看, 發現了一塊平行四邊形 (底$= \sqrt{b}$, 高$= \sqrt{a}$, 面積就是我要的 $\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}$ 啊!

[4] 肖占魁、徐沙鳳 (譯)。尼爾森: 數學寫真集 (第1季) 無須語言的證明。北京: 機械工業出版社,2014。(Roger B. Nelsen, 1993)。
肖占魁、符穩聯 (譯)。尼爾森: 數學寫真集 (第2季) 無須語言的證明。北京: 機械工業出版社,2014。(Roger B. Nelsen, 1993)。

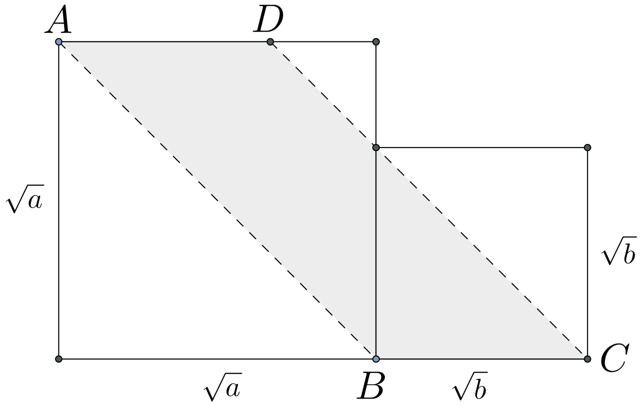

圖 3

拿剛剛切的兩塊三角形與這平行四邊形相比較, 得到

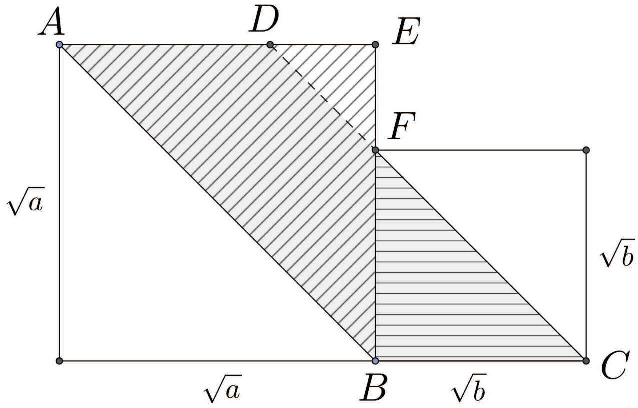

圖 4

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geq\sqrt{b}\cdot\sqrt{a} \tag{3}$$

這不正是我想要證明的算幾不等式嘛! 等號顯然在而且只在 $a=b$ 時成立。

筆者檢討這個證明, 可以確定這個證明所需要的預備知識大概是最少的! 而關於易懂性, 筆者自發現這個證明後, 往後都改用此證明來進行教學, 至今還沒遇過嫌這個證明難懂的學生。

2014 年想到這個證明時, 自忖這個證明不難, 應該老早有人想到, 只是當下我沒見到, 因此也就沒有發表出來與數學界及教育界的前輩切磋。然而一年多過去了, 始終未見到任何一本教科書、講義、補充教材, 抑或是論文或專業書籍刊載此證明。今年開學的第一週, 筆者去了趟台北國際書展, 見到三民書局出版的三重高中蔡宗佑老師所著的《按圖索驥: 無字的證明》一書, 拿起來特地翻查不等式一章, 其收錄的無字證明仍不脫 Nelsen 的書之範疇。回家思考數日, 不揣譾陋將此證明發表出來, 供大家參考批評。若能起到拋磚引玉的效果, 那是筆者最爲欣慰的!

—本文作者現任教於台北鵬展文理補習班, 並於清大歷史所攻讀碩士學位—