數學傳播 40卷2期, pp. 24-34

橢圓的曲率公式和萬有引力的平方反比規律

張海潮 · 莊正良

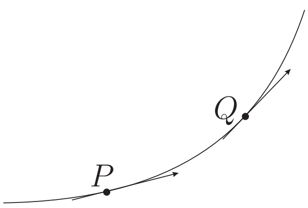
一、導言

牛頓 (1642∼1727) 在 1687 年出版《自然哲學之數學原理》(或稱《原理》)。牛頓先在書中第一卷第二章的命題 1 和 2 證明了克卜勒的面積律等價於行星繞日是因爲受到太陽的向心 (吸引) 力。接著在同卷第三章的命題 11 證明從克卜勒的橢圓律可以推得行星受太陽的吸引力 (或向心加速度) 與行星到太陽距離的平方成反比, 比例常數是 $4\pi^2\dfrac{a^3}{p^2}$, 式中 a 是橢圓軌道的半長軸, p 是行星繞日的週期。由於克卜勒的週期律說 $\dfrac{a^3}{p^2}$ 對太陽系中任一行星均爲定值, 因此而有萬有引力之萬有一詞 (註一) 。

本文最主要的目的在從橢圓的曲率公式重新說明橢圓軌道與距離平方反比規律的關聯, 有別於牛頓在《原理》中的方法, 見本文註二及三、四節。

二、平面曲線的曲率、曲率半徑及物理意義

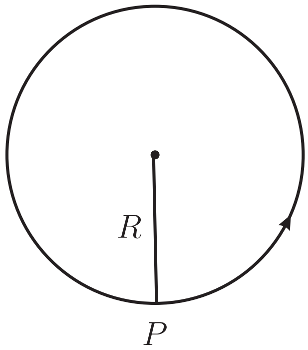
本節定義平面曲線的曲率, 並透過計算解釋曲率半徑的物理意義, 如圖一:



圖一

從 P 到 Q, 曲線的切線方向代表質點瞬間的速度方向, 切線之間的夾角對弧長的變率即爲曲率, 以半徑爲 R 的圓爲例, 如圖二:

圓從 P 點循逆時針回到 P 點, 角度總變化量是 2π, 經歷的弧長是 $2\pi R$, 兩者相除而得



圖二

曲率等於 $\dfrac{1}{R}$, 此爲對稱的情形。若是一般曲線, 曲率會逐點變化; 今以 κ 表曲率, 仿圓的情形, 另定義曲率半徑 ρ 爲 $\dfrac{1}{\kappa}$。

現以 $(x(t), y(t))$ 表平面參數曲線, 速度 (切) 向量爲 $V = \Big(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\Big)$, 加速度向量爲 $A = \dfrac{dV}{dt} = \Big(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\Big)$。弧長微量單位

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad 或 \quad \Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 = \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 = V \cdot V$$
$$或 \quad \frac{ds}{dt} = |V| = \text{ 向量 } V \text{ 的長度} \tag{1}$$

今考慮單位切向量 $T = \dfrac{V}{|V|}$, 並以 $(\cos\theta, \sin\theta)$ 表 T, θ 即 T 的方向 (角度) , 曲率 κ 即 $\dfrac{d\theta}{ds}$。

$$T = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\frac{dT}{ds} = \Big(-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \cos\theta\frac{d\theta}{ds}\Big)$$

亦即

$$\Big|\frac{dT}{ds}\Big| = \frac{d\theta}{ds} = \kappa \quad (\text{取正}) \tag{2}$$

將 $T = \dfrac{V}{|V|}$ 代入,

$$\frac{dT}{ds} = d\Big(\frac{V}{|V|}\Big)\Big/ds = \frac{|V|\frac{dV}{ds} - V\frac{d|V|}{ds}}{|V|^2} \tag{3}$$

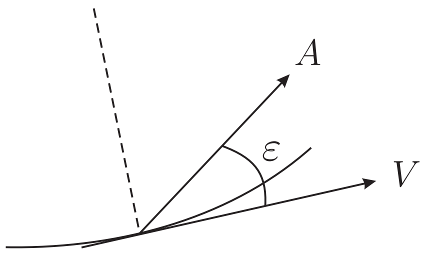
但 $\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{dV}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds} = A\dfrac{dt}{ds}$, 由 (1) $\dfrac{dV}{ds} = A/|V|$ 代入 (3) 得

$$\frac{dT}{ds} = \frac{A - V\frac{d|V|}{ds}}{|V|^2} \tag{4}$$

注意到 $\dfrac{dT}{ds}$ 和 T 垂直, 因此 $\dfrac{dT}{ds}$ 也和 V 垂直, 所以由 (2)、(4)

$$\left|\frac{dT}{ds}\times V\right| = |V|\kappa = \frac{|A\times V|}{|V|^2} \quad \text{或} \quad \kappa = \frac{|A\times V|}{|V|^3} \tag{5}$$

接著, 從 $\kappa = \dfrac{|A\times V|}{|V|^3}$ 來看曲率半徑的物理意義 如圖三, V 爲速度 (切) 向量, A 爲加速度



圖三

向量, A, V 夾角爲 ε, 虛線垂直 V, 爲法線方向, $\kappa = \dfrac{1}{\rho}$, ρ 爲曲率半徑, 由 (5)

$$\rho = \frac{|V|^3}{|A\times V|} = \frac{|V|^3}{|A||V|\sin\varepsilon}$$

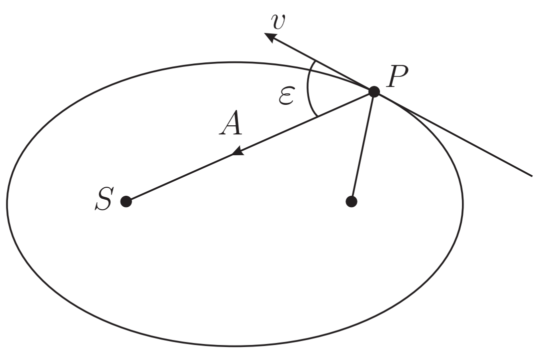
或

$$|A|\sin\varepsilon = \frac{|V|^2}{\rho} \tag{6}$$

亦即速度的平方除以曲率半徑會等於法線方向的加速度, 等速圓周運動時, $\varepsilon = 90°$, (6) 相當於 $|A| = \dfrac{|V|^2}{\rho}$, ρ 是圓運動的半徑。(註三)

三、橢圓曲率與平方反比規律

如圖四, 行星在橢圓上運動, 服從面積律:



圖四

行星受到的向心加速度爲 A, 假定 A 服從平方反比規律:

$$A = C \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2},\ C \text{ 爲比例常數}$$

兩邊同乘 $\sin\varepsilon$, 得

$$\begin{aligned} A\sin\varepsilon &= C \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\overline{SP}^2} \\ &= C \cdot \frac{\sin^3\varepsilon v^2}{\overline{SP}^2 v^2 \sin^2\varepsilon} \end{aligned}$$

分母 $\overline{SP}^2 v^2 \sin^2\varepsilon$ 由於面積律, 會是一個常數 D, 因此

$$A\sin\varepsilon = \frac{C}{D} \cdot \sin^3\varepsilon \cdot v^2 \tag{7}$$

但是因爲由上一節公式 (6), $A\sin\varepsilon = \dfrac{v^2}{\rho}$, ρ 爲曲率半徑
或

$$A\sin\varepsilon = v^2\kappa, \qquad \kappa \text{ 爲曲率}$$

與 (7) 比較發現, 如果 A 滿足距離平方反比, 則

$$\kappa = \frac{C}{D} \cdot \sin^3\varepsilon \tag{8}$$

反之, 如果知道橢圓的曲率 κ 正比於 $\sin^3\varepsilon$, 則同樣由上一節公式 (6), 曲率半徑的物理意義,

$$A\sin\varepsilon = \frac{v^2}{\rho} = v^2\kappa \sim v^2\sin^3\varepsilon$$

$$\text{因此} \quad A \sim v^2\sin^2\varepsilon = \frac{v^2\sin^2\varepsilon\overline{SP}^2}{\overline{SP}^2}$$

同樣由面積律得知, $v^2\sin^2\varepsilon\overline{SP}^2$ 是常數, 故

$$A \sim \frac{1}{\overline{SP}^2}$$

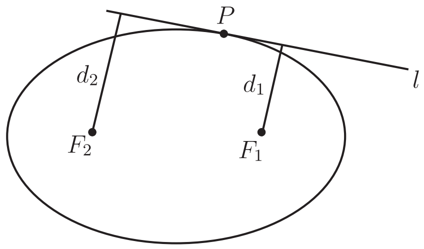
此即平方反比規律, 由此可見, 平方反比規律和橢圓律的關係其實是在於對橢圓曲率的掌握, 亦即曲率與 $\sin^3\varepsilon$ 成正比。(註四)

四、橢圓曲率公式的計算

雖然在不同的場合, 我們均看到橢圓曲率公式的證明 (同見註四)

$$\kappa \sim \sin^3\varepsilon$$

但是這些證明多半比較迂迴。例如在《古代天文學中的幾何方法 pp.190-192》, 作者利用 $(a\cos t, b\sin t)$ 這個參數式來作計算, 過程冗長。在本節中, 我們要從曲率的定義, 光學性質以及焦切距乘積定理來計算 κ, 我們認爲這個辦法比較直接, 並且較能彰顯橢圓曲率的本質。橢圓的光學性質, 大家都很熟悉, 不必多言。以下先介紹焦切距乘積定理。

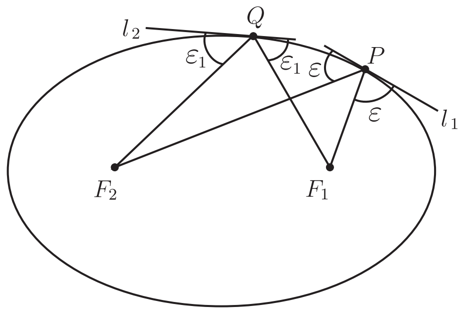


圖五

焦切距乘積定理:

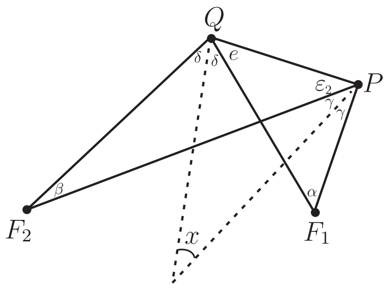
如圖五, 過橢圓上一點 P 的切線 l, 自焦點 F_1 和 F_2 分向 l 作垂線段, 其長度分別爲 d_1, d_2, 則 $d_1d_2 = b^2$, 式中 b 是橢圓的半短軸。(證明見註五)

我們現在從定義來看橢圓的曲率, 如圖六, F_1, F_2 爲焦點,



圖六

從 P 點走到 Q 點, 切線 l_1 和 l_2 有一角度差, 此一角差除以弧長 $\overset{\frown}{PQ}$, 再取極限 $Q\to P$, 即爲 P 點之曲率。但 l_1, l_2 之角差可以用在 Q, P 點之法線 (與切線垂直) 角差來計算。由光學性質可知, 此法線實乃相關角度之分角線, 如圖七。



圖七

兩條虛線分別爲 P, Q 角之分角線, 則

$$\pi = x + \gamma + \varepsilon_2 + e + \delta$$
$$\pi = \alpha + 2\gamma + \varepsilon_2 + e$$
$$\pi = \beta + 2\delta + e + \varepsilon_2$$

由上三式可見 $2x = \alpha + \beta$ 或 $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, x 是兩分角線之角差, 亦爲過 P, Q 兩切線之角差。我們要計算 $\lim_{Q\to P} \frac{x}{\overset{\frown}{PQ}} = \kappa$, $\overset{\frown}{PQ}$ 表 P, Q 間的弧長。

圖七中的角 e 和角 ε_2 在 $Q \to P$ 時, 均趨近圖六中的角 ε。如圖七, 在 $\triangle F_1PQ$ 中, 由正弦定律, 有

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{PQ}} = \frac{\sin e}{\overline{PF_1}} \tag{9}$$

而在 $\triangle F_2PQ$ 中, 亦由正弦定律, 有

$$\frac{\sin\beta}{\overline{PQ}} = \frac{\sin(2\delta + e)}{\overline{PF_2}} \tag{10}$$

(9)+(10)

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\overline{PQ}} = \frac{\sin e}{\overline{PF_1}} + \frac{\sin(2\delta + e)}{\overline{PF_2}} \tag{11}$$

由於

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\alpha + \beta} \quad \text{和} \quad \frac{\overline{PQ}}{\overset{\frown}{PQ}}$$

在 $Q \to P$ ($x \to 0$, 或 $\alpha, \beta \to 0$) 時均趨近於 1, 而同時圖七的角 e 趨近於圖六的角 ε, 角 $2\delta + e$ 趨近於圖六的角 $\pi - \varepsilon$, 因此在 $Q \to P$ 時
(11) 的極限是

$$\lim_{P\to Q} \frac{\alpha + \beta}{\overset{\frown}{PQ}} = \frac{\sin\varepsilon}{\overline{PF_1}} + \frac{\sin\varepsilon}{\overline{PF_2}}$$

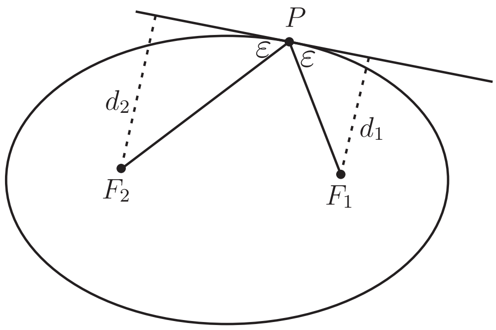
或

$$2\kappa = \sin\varepsilon\left(\frac{1}{\overline{PF_1}} + \frac{1}{\overline{PF_2}}\right) = \sin\varepsilon \cdot \frac{2a}{\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}}$$

或

$$\kappa = \frac{a\sin\varepsilon}{\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}}, \ a \text{ 爲半長軸} \tag{12}$$

如圖八



圖八

由 $\overline{PF_1}=\dfrac{d_1}{\sin\varepsilon}$ 及 $\overline{PF_2}=\dfrac{d_2}{\sin\varepsilon}$, 代入 (12) 得

$$\kappa=\frac{a\sin^3\varepsilon}{d_1d_2}$$

再由焦切距乘積定理 (註五), $d_1d_2=b^2$, 因此得到曲率公式

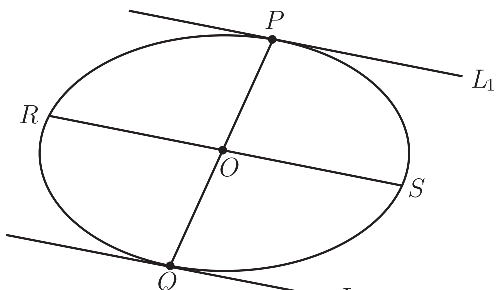
$$\kappa=\frac{a}{b^2}\cdot\sin^3\varepsilon \tag{13}$$

由第三節, 此一公式可推導出太陽對行星的吸引力服從平方反比的規律。

五、結語

牛頓在《原理》中從橢圓律推出引力的平方反比規律, 並未使用橢圓的曲率公式, 但卻用了許多橢圓的性質, 例如: 共軛直徑乘積定理。

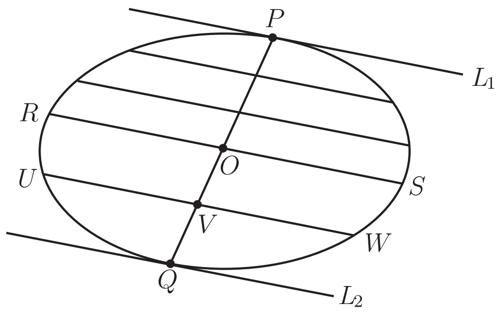
對橢圓而言, 任一過中心的弦均稱爲直徑, 如圖九



圖九

$\overline{POQ}$ 爲一直徑, L_1 和 L_2 爲過 P,Q 兩點的切線, 則可證得 $L_1//L_2$, 並且定過 O 與 $L_1(L_2)$ 平行之直徑 $\overline{RS}$ 爲直徑 $\overline{PQ}$ 之共軛直徑。反之, 亦可證得 $\overline{PQ}$ 爲 $\overline{RS}$ 之共軛直徑。

所謂共軛直徑乘積定理指的是, 如圖十



圖十

凡與 $\overline{PQ}$ 之共軛直徑 $\overline{RS}$ 平行之弦, 如 $\overline{UVW}$, 則必有 $\overline{UV}=\overline{VW}$, 且 $\dfrac{\overline{UV}^2}{\overline{PV}\cdot\overline{VQ}}$ 是一定值, 與 V 之位置無關。現在利用伸縮線性變換來看此一定理並不困難, 但在牛頓的時代, 想必難倒許多學者。牛頓在《原理》第一卷第三章命題 11, 從橢圓律推得平方反比的論證, 用了包括共軛直徑和橢圓其他的性質, 非常難懂。所以後人多有注釋或另起爐灶企圖簡化牛頓的證明。其中值得一提的是馬克斯威爾 (Clerk Maxwell, 1831-1879) 在著作 *Matter and Motion* 一書的 108, 109 頁利用本文提到焦切距乘積定理 (見註五) 證明了橢圓律可以推得平方反比規律, 他結論如下 (*Matter and Motion*, p.109)

> “*Hence the acceleration of the planet is in the direction of the sun, and is inversely as the square of the distance from the sun.*”

另一位終其生寫《Newton’s Principia for the Common Reader》的學者 S. Chandrasekhar, (1910-1995), 在書中的 110 頁認爲牛頓知道橢圓曲率扮演的角色, 他說 (ρ 爲曲率半徑) :

$$\rho \sim \csc^3 \varepsilon$$

That Newton must have known this relation requires no argument!

在本文中, 我們並沒有考證牛頓是否知道這個曲率 (半徑) 公式, 而是提出了一個看起來更直接的證明, 希望讀者欣賞。

註一: 克卜勒 (1571∼1630) 發現的行星三大定律是

1. 橢圓律: 行星繞日的軌道是一橢圓, 太陽位居一焦點。
2. 面積律: 行星繞日時, 在單位時間, 行星與太陽連線段所掃過的面積是一常數。
3. 週期律: 在太陽系中, 任一行星繞日軌道半長軸的立方和繞日週期的平方之比是一常數, 與個別的行星無關。

本文引用《原理》的中譯本 (譯者王克迪, 台北大塊文化出版社)。第一卷第二章之命題 1, 2 見《原理》, pp.57-59, 第一卷第三章的命題 11 見《原理》, pp.71-72。由於力 F 與加速度 A 成正比, 所以本文均以 (向心) 加速度 A 代表 (向心) 力, 牛頓所證乃

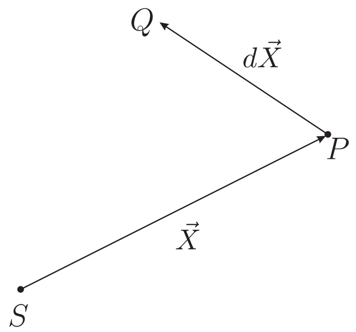
$$A=4\pi^2\frac{a^3}{p^2}\ \frac{1}{r^2}$$

式中 r 爲行星與太陽之距離, a 爲橢圓軌道之半長軸, p 爲繞日之週期。以今日習用的公式而言

$$F=mA=4\pi^2\frac{a^3}{p^2}m\frac{1}{r^2}=\frac{GMm}{r^2}$$

其中 $4\pi^2\frac{a^3}{p^2}$ 換成 GM, G 爲萬有引力常數, m, M 分別爲行星和太陽之質量。

註二: 關於面積律等價於向心力, 現在的解釋是角動量守恆, 如圖:



S, P 分別是太陽和行星。$\overrightarrow{SP}=\vec{X}$, $\overrightarrow{PQ}=d\vec{X}$ 代表微量位移, $|\vec{X}\times d\vec{X}|$ 是 $\vec{X}$ 和 $d\vec{X}$ 決定的外積向量長度, 代表微量掃過面積。克卜勒的面積律即:

$$\int_0^H |X\times dX| = H\cdot C, \quad H \text{ 爲經歷的時間}, C \text{ 爲常數}$$

或

$$\int_0^H \left|\vec{X}\times\frac{d\vec{X}}{dt}\right|dt = H\cdot C$$

兩邊對 H 微分得

$$\left|\vec{X}\times\frac{d\vec{X}}{dt}\right| = C$$

或

$$|\vec{X}\times\vec{V}|=C$$

式中 $\vec{V}$ 是 P 的速度向量。由於是平面運動, 所以上式等價於 $\vec{X}\times\vec{V}$ 是一常數向量, 此向量若與質量相乘即爲角動量。

若角動量守恆, 將 $\vec{X}\times\vec{V}$ 對時間微分, 得

$$\frac{d\vec{X}}{dt}\times\vec{V}+\vec{X}\times\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{0}$$

但 $\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{V}$, $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{A}$ (加速度向量) , 因此得 $\vec{X}\times\vec{A}=0$, 易見受力 $\vec{A}$ 爲 $\vec{X}$ 的反方向, 即受到太陽之向心吸引力。

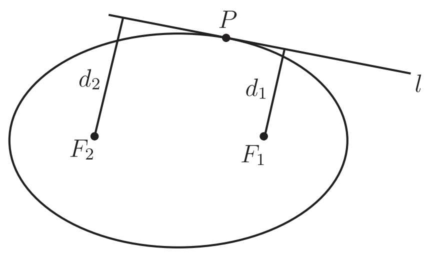
在牛頓的時代, 普遍相信行星繞日是受到太陽的吸引力, 也同意此一向心吸引力等價於面積律。因此下一個任務就是理解此一向心力的大小。當時確有不少人, 如: 胡克, 猜測此力與距離的平方成反比, 但是只有牛頓用嚴謹的數學從橢圓的幾何性質推得了平方反比, 此即原理的第一卷第三章命題 11。

註三: 曲率概念由牛頓提出, 見《原理》引理 11, p.53。在牛頓的時代, 大家先理解了等速圓周運動的向心加速度公式, $A=\dfrac{v^2}{\rho}$, 式中 A 爲向心加速度, v 爲 (等) 速度, ρ 爲圓半徑。大家也理解到一般運動的加速度有兩個作用, 一是沿切線方向加速, 另一是轉彎, 負責轉彎的加速度就是加速度在垂直切線方向的投影, 而轉彎的半徑就是曲率半徑, 此即本節所得公式 (6) :

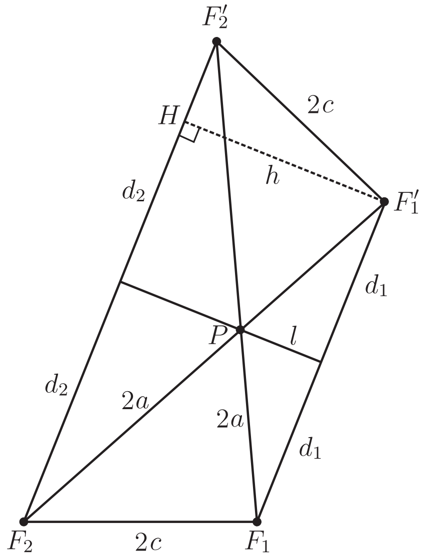
$$|A|\sin\varepsilon=\frac{|V|^2}{\rho}$$

註四: 1983 年諾貝爾物理獎得主錢卓斯卡 (S. Chandrasekhar, 1910∼1995) 在 1990 年以 80 高齡發憤註釋牛頓的《原理》。1994 年完稿交由牛津大學於次年出版, 書名《Newton's Principia for the Common Reader》同時錢氏又在 1994 年《當代科學 Current Sci., 67(7)(1994), 495-496》發表《On reading Newton's Principia at age past eighty》, 在這些著作中錢氏均提及橢圓的曲率半徑公式, 及此公式與平方反比規律的關聯, 但是錢氏對曲率公式的證明比較不像本文那麼直接, 詳本文第四節。

註五: 如下圖



從焦點 F_1,F_2 到切線 L 的垂線段長分別爲 d_1,d_2, 則由橢圓的光學性質看出有下面這個等腰梯形:



圖中 F_1', F_2' 分別是 F_1, F_2 對切線 l 的鏡射點, F_2, P, F_1' 和 F_1, P, F_2' 均滿足三點共線, 圖中 $\overline{F_1'F_2} = \overline{F_1F_2'} = 2a$, a 爲半長軸, $\overline{F_1F_2} = \overline{F_1'F_2'} = 2c$, c 爲焦點到橢圓中心的長度。令 h 爲此等腰梯形的高, 則有

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \overline{F_2H}^2 + h^2 = (d_1+d_2)^2 + h^2 \\ 4c^2 &= \overline{F_2'H}^2 + h^2 = (d_2-d_1)^2 + h^2 \\ 4b^2 &= 4a^2 - 4c^2 = 4d_1d_2 \end{aligned}$$

因此, $d_1d_2 = b^2$, 式中 b 爲橢圓之半短軸, 此即焦切距乘積定理。

參考資料

1. 牛頓。自然哲學之數學原理。台北: 大塊文化, 2005。
2. 張海潮, 沈貽婷。古代天文學中的幾何方法。台北: 三民書局, 2015。
3. 項武義, 張海潮, 姚珩。千古之謎。台北: 商務印書館, 2010。
4. Chandrasekhar, S., *Newton's Principia for the Common Reader*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.
5. Maxwell, C., *Matter and Motion*, Dover Pub.,New York, [1877] 1991.

—本文作者張海潮及莊正良爲台大數學系退休教授—