

何謂廣義相對論?

David Tong

翻譯：黃馨霈

David Tong 為劍橋大學理論物理學家，研究量子理論及廣義相對論。本文「What is general relativity?」原載 +Plus Magazine (<https://plus.maths.org/content/what-general-relativity>), 取得作者及雜誌編輯同意翻譯及刊載, 謹此致謝。

— 中研院數學所數學傳播編輯部

物理學家談到愛因斯坦的方程時，通常指的不是有名的 $E = mc^2$ ，而是另一個概括著名廣義相對論的公式。愛因斯坦在一百年前 — 1915 年發表廣義相對論，為了慶祝廣義相對論一百週年，我們邀請劍橋大學物理學家 David Tong，講解何謂廣義相對論以及愛因斯坦的方程是如何傳達概念的。您可以觀看以下影片或繼續讀下去。

<https://plus.maths.org/content/what-general-relativity>

從牛頓講起

廣義相對論描述重力，然而愛因斯坦並不是第一個想出這樣理論的人 — 早在 1686 年，艾薩克·牛頓 (Isaac Newton) 就想出著名的重力平方反比定律 (inverse square law of gravitation)。牛頓定律在涉及的尺度不是很大的時候運作得極好：我們可以用它計算物體從高樓掉落撞擊到地面的速度，甚至還能用它將人類送上月球。不過當距離和速度非常大，或涉及的物體質量龐大時，牛頓的定律就變得不精確。但是從牛頓講起是好的開始，因為比起愛因斯坦的理論，牛頓的定律更容易描述。

假設有兩個物體，譬如太陽和地球，質量分別是 m_1 及 m_2 ，兩者距離以 r 表示，根據牛頓定律，兩者間的重力 F 為

$$F = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中 G_N 是一個固定的數，即一般所知的牛頓常數（萬有引力常數）。

這個方程的直觀意義是：它告訴我們，兩者距離越遠，重力越弱（ r 越大， F 越小）；物體質量越大，重力越強（ m_1 或 m_2 越大， F 越強）。

不同的力，同樣的方程

另一個方程長得很類似，但描述不同的力。1785年，法國物理學家夏爾·奧古斯丁·庫侖 (Charles-Augustin de Coulomb) 導出一個方程，描述兩個帶電粒子 Q_1 及 Q_2 間的靜電力 F 。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

這裡 r 代表粒子間的距離， ϵ_0 是決定電磁場強度的一個常數。（它有個花俏的名字——自由空間電容率 (permittivity of free space)。）

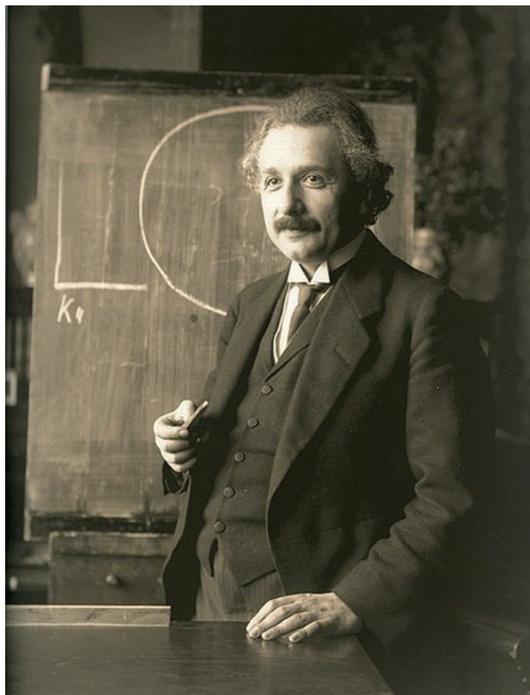
牛頓方程的問題

牛頓和庫侖的方程簡潔明瞭，卻有個問題。回到牛頓定律，假設將地球及太陽快速分離，如此一來會讓兩者間的重力減弱，但是根據牛頓的方程，兩個天體分開的那一刻重力就會立即減弱，庫侖定律也是如此：將帶電粒子迅速分開，會導致兩者間的靜電力瞬間減弱。

但這不可能是對的，愛因斯坦在 1905 年，比廣義相對論早十年，提出的狹義相對論，談到宇宙沒有任何東西能超越光速，即便是兩個物體分離時，重力變弱產生的「信號」，都理當如是。

為何需要場(fields)?

這告訴我們古典力學中的力在近代物理必須被置換。我們需要以新的概念，來思考傳遞兩物體間的力。這是英國科學家麥可·法拉第 (Michael Faraday) 在理論物理的重大貢獻。他領悟到有種今日我們稱作「場 (fields)」的東西遍及整個宇宙，涉及力的傳遞。你們在學校可能已經很熟悉的電場和磁場都是例子。



1921年，愛因斯坦 (1879~1955)。圖片取自：
Plus Magazine

一個帶電粒子產生一個能被其它(本身也有電場)帶電粒子「感覺到」的電場。粒子因應其它電場而移動，就是我們所稱的力。當一個粒子快速與另一個粒子分離，使得第一個粒子的電場產生漣波，漣波以光速在空間中行進，最後影響了另一個粒子。事實上，移動的粒子也會產生磁場，釋放電磁波，最終結果是波動場的複雜互動，但關鍵在於，力的確是一個粒子受到其它粒子電場散發的漣波影響。

科學家花了很長一段時間，才完全發展出對電磁場的描述，主要歸功於蘇格蘭科學家詹姆斯·克拉克·馬克士威 (James Clerk Maxwell)。他不僅瞭解到電力和磁力是電磁學統一的力中的兩個面向，還用四道方程取代庫倫的單一靜電定律，來描述電場及磁場如何回應移動的帶電粒子。馬克士威的四道方程是物理學中最令人讚嘆的幾道方程，因為它刻畫了電力及磁力的所有知識。

重力與時空

那重力呢？如同電磁學中，需要由場產生兩個天體間觀測到的重力，愛因斯坦的偉大洞見在於，這個場是由我們已知的東西——時間和空間形成。想像空間中有個很重的天體，比如太陽，愛因斯坦了解空間不只是被動的旁觀者，而能藉由彎曲對重物做出反應。另一個天體，好比地球，移動至較重天體所產生的凹陷中，受凹陷影響而轉向，不會繼續沿直線前進，而是開始繞著較重的天體旋轉。或者，如果速度夠慢，還會撞上去。(愛因斯坦奮鬥多年才得出這個理論，更多內容請參閱「[愛因斯坦與相對論\(上\)\(下\)](#)」。)

愛因斯坦理論的另一個啟示是，時間和空間可以相互扭曲變形，複雜緊密地連結在一起，時間同樣也能因大型天體而扭曲。這就是為何我們談的不只是空間的曲率，而是「時空」的曲率。

方程式

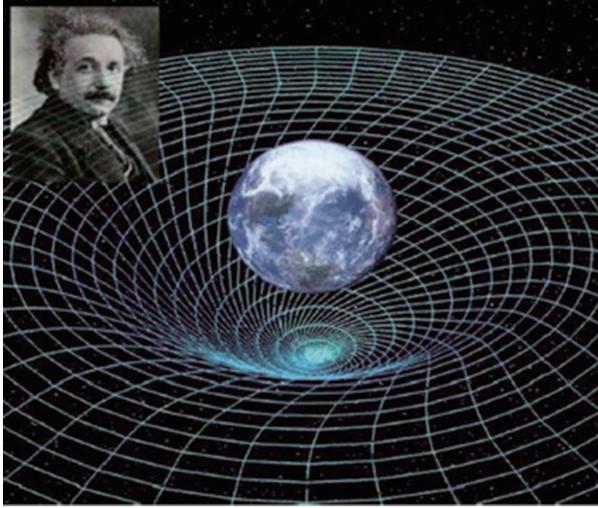
廣義相對論以一個乍看之下很簡單的方程表示：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{\mu\nu}.$$

基本上這個方程告訴我們，給定的質量和能量如何讓時空彎曲，方程的左邊

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

描述時空的彎曲，其作用就是我們觀察到的重力，相當於牛頓方程左邊的 F 。



巨大天體使得時空彎曲。圖片來源：NASA (取自 Plus Magazine)。

方程式右手邊的 $T_{\mu\nu}$ ，描述所有質量、能量、動量和壓力分布在宇宙的方式，類似牛頓方程裡的 m_1m_2 ，但來得更複雜。要了解時空如何彎曲，上述這些量都是必要的。 $T_{\mu\nu}$ 的術語是「能量動量張量 (energy-momentum tensor)」。同樣地，出現在方程式右手邊的常數 G_N 是牛頓常數， c 是光速。

出現在下標中的希臘字母 μ 和 ν 又是什麼呢？要了解它們的意思，首先要注意時空有四個維度，空間有三維 (對應到空間裡上下、左右及前後的方向)，時間有一維 (只有一個方向)。如果你想知道一個小小天體的移動如何影響時空，就必須

了解它是如何影響四維中的各個維度以及這些維度的不同組合。

(以此類推，想想在牛頓的古典力學裡，你會如何描述一個沿直線等速移動的物體。你需要兩則資訊：方向和移動的速度。方向由三個數字表示，每個數字皆代表物體在三度空間中每個維度移動的量。因此，物體的移動由四個數字描述，其中三個與空間相關，另一個與速度有關。由於速度是每單位時間移動的距離，爲了描述物體的移動，我們需要三則與空間相關、一則與時間相關的資訊。)

不只是一道方程

在愛因斯坦的方程裡，希臘字母 μ 和 ν 是標號，每個都可以取 0、1、2 或 3 的值。因此實際上，上面的方程蘊含一整組，對應於 μ 和 ν 所有可能組合的方程：

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{00} \\ R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{01} \\ R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} &= \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{11} \end{aligned}$$

等等。

0 的值對應到時間, 1、2 和 3 的值則與空間的三維對應。

方程式

$$R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{01}$$

因而與時間和第一維空間有關。右手邊的 T 描述第一維空間裡物質的動量 (速度及質量)。移動使得時間和第一維空間混合並相互彎曲, 這個現象由方程式的左手邊表示。(其它等於 2 或 3 的方程式都可以類推。)

若方程式僅涉及空間中的某一維度, 譬如

$$R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{11},$$

這個方程便只和空間有關。右手邊的 T 項量測物質在此空間方向所引起的壓力, 左手邊則告訴你該物質如何造成空間在此方向的延展。

若 μ 和 ν 的值皆為 0, 那麼方程式

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = \frac{G_N}{8\pi c^4}T_{00}$$

只和時間有關。 T_{00} 代表能量, 使時間加快或減慢。方程的左手邊描述時間流中的改變。

由於每個 μ 和 ν 能有 4 個值 (因為 μ 和 ν 可以是 0、1、2 或 3 四個值的任一個), 總共會有 $4 \times 4 = 16$ 個方程式。然而, $\mu = i$ 和 $\nu = j$ 時的方程式, 跟 $\mu = j$ 和 $\nu = i$ 時的方程式相同, 所以方程式的總數減為 10 個。



一位藝術家對黑洞的想像。圖片來源: Robert Hurt, NASA/JPL-Caltech (取自 Plus Magazine)。

理論上，愛因斯坦的方程使我們能確切得知，大型天體譬如行星、恆星、星系甚至黑洞，如何影響其所在的時空，但是實際上，事情可沒那麼簡單。愛因斯坦的方程式非常難解，需要使用超級電腦找出解答，找出新的解是理論物理學很活躍的一個領域。目前的重大挑戰之一是，了解時空在兩個極重的天體如黑洞碰撞時，會發生什麼事。

我們怎麼知道愛因斯坦的理論是正確的？這個理論發表至今一百年，通過每個考驗。雖然它有點深奧，卻在大多數人日常仰賴的事物中扮演關鍵角色，像是智慧型手機裡的 GPS 功能、車上的衛星導航裝置。相對論確實引發了一些新問題，這就是為何一些物理學家認為它需要被修改的原因（參閱 Problems of gravity, Marianne Freiberger 著 <https://plus.maths.org/content/problems-gravity>）。不過，姑且不論修改是否真的必要，廣義相對論無疑是科學史上最令人讚嘆的成就之一。

—本文翻譯者黃馨霽為中央研究院數學研究所助理—

2016 Pan Asia Number Theory Conference

日期：2016 年 7 月 11 日 (星期一) ~ 2016 年 7 月 15 日 (星期五)

地點：台北市大安區羅斯福路四段 1 號 天文數學館 6 樓演講廳

詳見中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>