數學傳播 40卷1期, pp. 87-90

涉及三個內切圓的一個有趣結論

鄒黎明

1. 問題的提出

1997年, 我曾經在文 [1] 給出了三角形等圓點的概念:

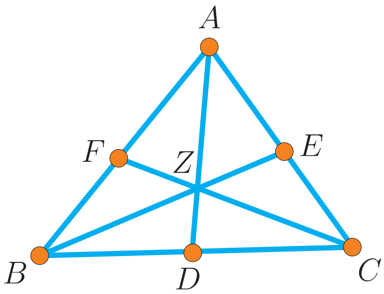

圖 1

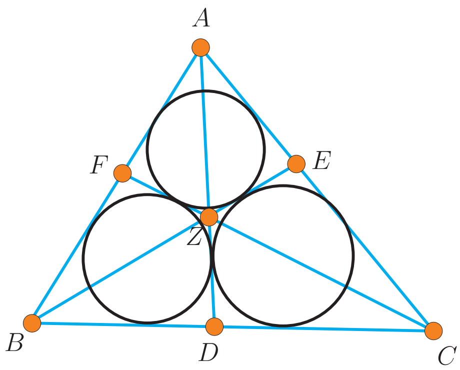

圖 2

在 $\triangle ABC$ 中, 點 D、E、F 分別在 BC、AC、AB 上, AD、BE、CF 相交於 Z, $\triangle ABZ$、$\triangle BCZ$、$\triangle ACZ$ 的內切圓是等圓, 這個點稱爲三角形等圓點。這個點存在並且唯一。最近, 我關注四邊形 $AEZF$、四邊形 $BDZF$、四邊形 $CEZD$, 給出如下漂亮的問題:

問題: 如圖 2, $\triangle ABC$ 中, D、E、F 分別在 BC、AC、AB 上, AD、BE、CF 相交於 Z, 則存在唯一的點 Z 使得四邊形 $AEZF$、四邊形 $BDZF$、四邊形 $CEZD$ 都有內切圓,

2. 引理

引理1[2] (**令標**): 已知 $\triangle ABC$ 中, BC 邊上的高爲 h, N 爲 BC 上的一點, $\triangle ABN$、$\triangle ANC$、$\triangle ABC$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2、r, 則:

$$r = r_1 + r_2 - \frac{2r_1r_2}{h}$$

證明: 在 $\triangle ABC$ 中, 則有

$$\frac{2r}{h}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

這個結論證明如下

$$\frac{2r}{h}=\frac{2ar}{ah}=\frac{2ar}{(a+b+c)r}=\frac{2\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2\sin A}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$
$$=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

如圖 3, 記 $\angle ANB=2\theta$, 則 $\angle ANC=180^\circ-2\theta$

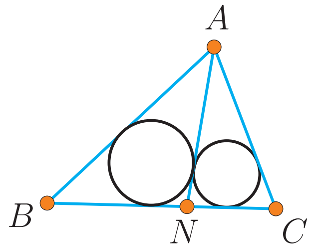

圖 3

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle CAN$ 中, 有

$$1-\frac{2r_1}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\theta,\quad 1-\frac{2r_2}{h}=\tan\frac{C}{2}\cot\theta,$$
$$\therefore\ (1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\frac{2r}{h}$$

整理即得。

3. 問題的解決

這個問題分兩部分證明:

證明: (1) 如圖 2, 設 $\triangle ABD$、$\triangle BCF$ 的內切圓半徑都是 r_2; 設 $\triangle BCE$、$\triangle ACD$ 的內切圓半徑都是 r_3; 設 $\triangle ABE$、$\triangle ACF$ 的內切圓半徑都是 r_1, $\triangle ABC$ 的內切圓半徑爲 r, $\triangle$ 爲 $\triangle ABC$ 的面積。由引理 1.

$$r=r_2+r_3-\frac{2r_2r_3}{h_a},\quad r=r_2+r_1-\frac{2r_2r_1}{h_c},\quad r=r_1+r_3-\frac{2r_1r_3}{h_b},$$

令 $\frac{r_1}{r}=x$, $\frac{r_2}{r}=y$, $\frac{r_3}{r}=z$, $\tan\frac{A}{2}=t_A$, $\tan\frac{B}{2}=t_B$, $\tan\frac{C}{2}=t_C$, 則

$$1=x+y-\frac{2xyr}{h_c}=x+y-xy(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}),$$

$$\therefore\ (1-x)(1-y)=xyt_At_B$$

同理

$$(1-y)(1-z)=yzt_Bt_C,\qquad (1-x)(1-z)=xzt_At_C$$

$$\therefore\ (1-x)(1-y)(1-z)=xyzt_At_Bt_C$$

$$\therefore\ 1-x=xt_A,\quad 1-y=yt_B,\quad 1-z=zt_C$$

$$\therefore\ r_1=\frac{r}{1+t_A}$$

同理:

$$r_2=\frac{r}{1+t_B},\qquad r_3=\frac{r}{1+t_C}$$

這說明三個內切圓唯一存在。

(2) 下面證明 AD、BE、CF 相交於一點。

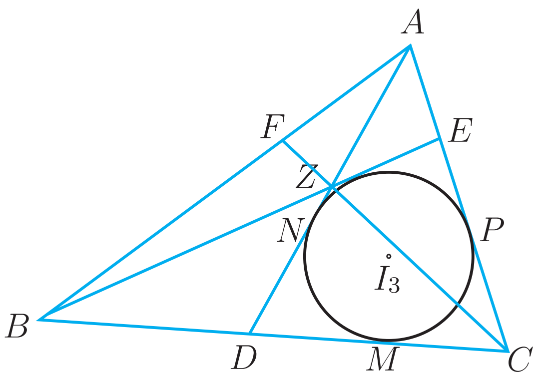

圖 4

設 $\triangle ADC$ 的內切圓 $\odot I_3$ 與 DC、AD、AC 分別相切於 M、N、P, $DM=DN=m$, $\frac{1}{2}(m+\frac{r_3}{t_C})h_a=\frac{1}{2}(2m+2b)r_3$, 整理後解 m,

$$m(h_a-2r_3)=r_3(2b-\frac{h_a}{t_C}),\qquad m=\frac{(2bt_C-h_a)r_3}{t_C(h_a-2r_3)}.$$

接下來, 因爲

$$CD=m+\frac{r_3}{t_C}=\frac{2r_3(bt_C-r_3)}{t_C(h_a-2r_3)}$$

$$\because\ b=r\Big(\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_C}\Big),\quad h_a=\frac{2r}{1-t_Bt_C},\quad r_3=\frac{r}{1+t_C},$$

將 b、h_a、r_3 代入 CD 的表示, 得 CD 表示的分子爲:

$$2r_3(bt_C-r_3)=2r_3\Big[r\Big(\frac{1}{t_A}+\frac{1}{t_C}\Big)t_C-\frac{r}{1+t_C}\Big]=\frac{2rr_3t_C(1+t_A+t_C)}{t_A(1+t_C)}$$

CD 表示的分母爲:

$$t_C(h_a-2r_3)=t_C\Big(\frac{2r}{1-t_Bt_C}-\frac{2r}{1+t_C}\Big)=\frac{2rt_C^2(1+t_B)}{(1-t_Bt_C)(1+t_C)}$$

因此有:

$$CD=\frac{r_3(1+t_A+t_C)(1-t_Bt_C)}{t_At_C(1+t_B)},$$

同理:

$$BD=\frac{r_2(1+t_A+t_B)(1-t_Bt_C)}{t_At_B(1+t_C)},\quad \therefore\ \frac{BD}{DC}=\frac{r_2t_C(1+t_B)(1+t_A+t_B)}{r_3t_B(1+t_C)(1+t_A+t_C)}$$

同理:

$$\frac{CE}{EA}=\frac{r_3t_A(1+t_C)(1+t_C+t_B)}{r_1t_C(1+t_A)(1+t_A+t_B)},\quad \frac{AF}{FB}=\frac{r_1t_B(1+t_A)(1+t_A+t_C)}{r_2t_A(1+t_B)(1+t_C+t_B)}$$

$$\therefore\ \frac{AE}{EC}\times\frac{CD}{DB}\times\frac{BF}{FA}=1$$

由 Ceva 逆定理得證:

$\therefore AD$、BE、CF 相交於一點 Z。

這個點 Z 我們稱爲三角形的三內切圓點。

這個結論的 (1) 是編輯老師的審稿意見, 表示感謝。

參考文獻

1. 鄒黎明, 三角形中的等圓點問題, 中等數學, 1997, 3。
2. 鄒黎明, 一組平面幾何公式的思考, 數學傳播季刊, 39(4), 93-96, 2015。

—本文作者任教江蘇省無錫市碩放中學—