數學傳播 40卷1期, pp. 81-86

數學可以怎樣教得更好?

蕭文強

我把討論題目修改爲: 數學可以怎樣教得更好?[1]

若然題目用了「應該」(“should”) 而不是「可以」(“can”), 就會令人覺得老師有一些固定的法則可以遵從。事情不是這樣的; 我也沒有資格教導別人怎樣教學。而且, 優良的教師有不同的類型, 各有長處, 決不會只有一種既定的方法可以令教學做得更好。雖然如此, 劣質教師卻很容易給認出。讓我從十九世紀法國小說家司湯達 (Stendhal, 此乃 Marie-Henri Beyle (1783∼1842) 的筆名) 於 1836 年著作的半自傳小說《布魯特的一生》(Vie de Henry Brulard) 抽出一個例子, 作者描述他在學校學習數學的歷程:

> ··· 道佩 (Dupuy) 是我見過最自負和最奉行父權的中產階級, 一位完全沒有天分的數學老師。··· 因爲教學方法十分愚蠢, 我的數學學習沒有進展; 如果可能學到什麼的話, 我的同學所學得的比我更少。偉大的道佩先生講解命題就好像給我們提供一連串製作酸醋的方法。··· 我越是輕蔑道佩先生和沙拔爾先生 (Chabert) 兩位教師, 我越喜愛數學。
>
> ··· 我認爲, 數學不可能虛僞, 以我年少時的單純見解, 認爲所有科學也應如是, 因爲我知道, 科學應用了數學。但當我發現沒有人能夠給我解釋「負負得正」($- \times - = +$) (這是被稱爲代數的科學的重要根基之一) 究竟是什麼一回事時, 我真的十分震驚! 他們不單不能夠清楚解釋 (當然這是可以清楚解釋明白的, 因爲它導致真理), 更壞的是, 他們用一些顯然自己都不明白的道理來解釋。
>
> ··· (沙拔爾先生對我說:)「這是慣例。人人都接受這樣的解釋; 跟你差不多一樣優秀的歐拉 (Euler) 和拉格朗日 (Lagrange), 他們都接受。[···]看來, 你是想突出自己吧。」至於道佩先生, 他對我的膽怯抗議 (膽怯是他的誇張語氣使然), 報以拒人千里、高高在上的微笑。(Stendhal (1836/1961))

[1] 這篇文章是作者在 ICM 的一個全體專題討論會上引言講稿, 旨在引起更深入的討論。討論會是國際數學家大會 (International Congress of Mathematicians) 節目之一, 2014 年八月十八日在韓國首爾舉行, 討論題目是「數學應該怎樣教得更好?」(How should we teach mathematics better?) 討論會其他成員有: 美國密西根大學的波爾教授 (Deborah Ball) (主持人)、新西蘭奧克蘭大學的巴頓教授 (Bill Barton) 及法國傅立葉大學的拉博爾特教授 (Jean-Marie Laborde)。波爾教授因事未能到會。有關討論會更詳盡的報告, 讀者可參閱: D. Ball, B. Barton, J.-M. Laborde, M. K. Siu, How should we teach mathematics better? Proceedings of the International Congress of Mathematicians Seoul 2014, Volume 1, edited by S. Y. Jang et al, 2014, pp.739-742。本文由陳鳳潔女士翻譯爲中文, 作者謹向譯者致謝。

道佩先生表現了劣質教師的兩個特性 — 沒有腦袋和沒有心! Gilbert Highet 在他的著作 The Art of Teaching 中指出兩點, 是成爲優良教師的兩個重要而且必需的條件; 雖然是老生常談, 其實是真理 [Highet, 1950]。

首先, 教師必須喜愛他教的科目。最好的註腳來自十八世紀德國詩人和思想家諾瓦利斯 (Novalis, 此乃 Friedrich Leopold von Hardenberg 的筆名):「一位真正的數學家根本就熱衷於數學。沒有熱心, 便沒有數學。」(Moritz (1914))

其次, 教師必須喜愛他的學生。美國數學家莫伊斯 (Edwin Evariste Moise) 說過一段很有意思的話:「教學這項活動, 涉及一種意義十分不明確的人際關係。教師本人是一位表演者、講解員、監工、領頭人、裁判員、導師、權威人物、對話者和朋友。所有這些角色都不易擔當, 其中有不少還是互不協調的。因此, 要成爲一位老練成熟的教師, 個人品格的細緻成長是不可或缺的。」(Moise (1973))

我們不再詳細論述這兩點, 重回到數學教學這個問題吧。教學就是說故事, 要說一個好故事, 一個能引起好奇和激發想像的好故事, 一個關於人類在悠長歲月探索理解周遭世界的故事。

我將簡短討論以下三點: (1) 少者多也 (**L**ess is **M**ore), (2) 數學史與數學教學 (**H**istory and **P**edagogy of **M**athematics), (3) 數學教育與滑鼠 (**M**athematics & the **M**ouse)。

(1) **L** is **M**

在小學和中學, 學生要學習的數學基本概念並不太多; 這些基本概念在小學和中學各級的課程不斷重複出現, 甚至出現在大學課程。因此, 數學教育界務必努力設計以這些概念爲主線的教學和學習活動。

一個富啟發性的例子可以說明這一點, 這個例子取材自德國數教育學家 Erich Wittmann 和 Gerhard Müller 領導的 "Mathe 2000"計劃[2], 其意念卻沿自 Alistair McIntosh 和 Douglas Quadling 所寫有關 Arithmogons 的文章 (McIntosh & Quadling (1975))。(有關此例請閱附錄。)

主要的訊息是「少者多也」(Siu (2000); 蕭文強 (1995))。

(2) **HPM**

我堅持的信念是: 數學是文化的一部份, 它並不只是工具而已, 那怕已經證明了它是非常有用的工具; 因此, 數學的發展歷史, 以及由古至今數學與其他人類的奮鬥活動的關係, 都應該是這學科的一部份。我的教學與學習經驗告訴我: 數學史知識幫助我更深入瞭解數學內容和改進我的教學; 其實, 把數學史融入教學以達致這目的只不過是衆多方法其中之一; 數學史未必是最有效的選擇, 不過我相信, 只要恰當運用, 它可以是一種有效的方法 (Siu (2014); 蕭文強

[2]德國的 Nordrhein-Westfalen 省於 1985 年採用了新的小學數學課程 (小一至小四); 課程主要是由德國數學教育權威人士 Heinrich Winter 撰寫。爲了協助教師實踐這個新課程, 德國 Dortmund University 的 Erich Ch. Wittmann 和 Gerhard N. Müller 於 1987 年成立了 "Mathe 2000"計劃。(有關詳情, 請瀏覽網址 http://www.mathe2000de/)

(2009/2010a))。

雖然數學史非常重要, 但我們不能視之爲解決數學教育各項問題的萬應靈丹, 這就好像數學科本身雖然重要, 但不是唯一值得學習的學科。就是因爲數學能有機地融入其他知識和文化活動, 數學科才成爲更值得學習的科目。在這樣更廣泛的層面來說, 數學史更加肩負全人教育的一個重要任務。(Siu & Tzanakis (2004))

我們應該從三個觀點檢示一個數學課題: 歷史觀點, 數學觀點和教學觀點。雖然這三個觀點相關, 其實各有不同之處。按照歷史發生的過程去教, 未必是最佳的方法; 從數學角度看是最佳的, 放進課堂未必佳, 更可以肯定說歷史上不是這樣發生的。不過, 這三個觀點互相補足。作爲數學教師, 我們應該設法多知道些數學史及具備堅實的數學知識, 以瞭解該課題, 然後著眼於教學方面, 以冀能夠在課堂上發揮, 讓學生學得更好, 明白得更多更深入。

(3) M & M

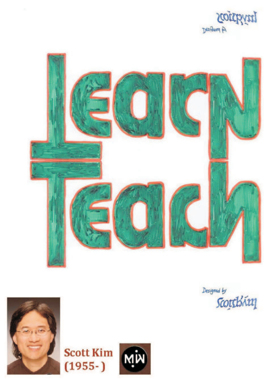
2003年《新聞周刊》(Newsweek) 有一期特刊, 封面刊出的主題是: "Bionic Kids: How Technology is Altering the Next Generation of Humans"。其中標題爲 "Log on and Learn"的文章有兩點值得注意。

> 「小孩腦袋發展, 能擅於處理多樣的視覺資訊。···
> 兒童可以同時留意多種不同的事情。但是, 這樣做有一定的代價, 即不可能深入瞭解任何一件事情。」

鑒於年輕一代學習習慣有所改變, 我們應該詳細檢視那些長久以來已確認的古舊教與學理論。爲此我們提出一些問題 (Siu (2008/2006); 蕭文強, (2009/2010b))。

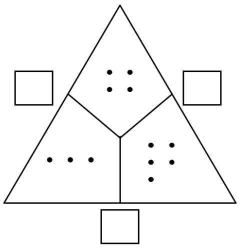
(1) 應該怎樣利用 IT (Information Technology, 信息技術) 使學生學得更好, 而不妨礙他們進行縝密分析和深入思考。
(2) 可以怎樣保證「發現法」學習不等同於誤打誤撞的嘗試。
(3) 如何保證富於想像的思考不等同於漫不經心的態度、同時進行多項工作不一定要粗心和倉促、使用 IT 不是未經思考而只按照指示一步一步去做。

結束前, 我想介紹著名益智遊戲和圖形設計家 Scott Kim 的一幅作品, 表現出「教」(Teach) 和「學」(Learn) 其實是一體兩面 (Kim (1981)), 把 Teach 倒轉來看便是 Learn !



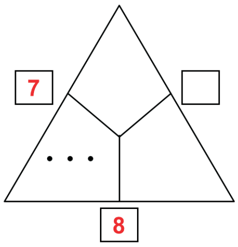
誠然, 二千多年前中國古籍《禮記 · 學記》有這樣的記載:「故曰: 教學相長也。〈兌命〉曰:「學學半。」

附錄



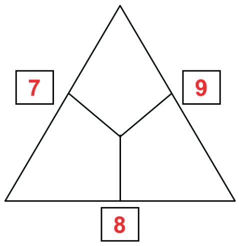
在每個方格內填上對着的邊上那兩格的點數之和。

(幼兒園/初小階段：懂加數便成。)



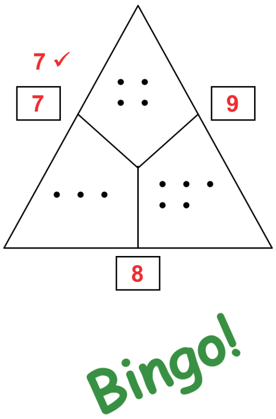
在三角形內每格填上若干點，在方格填上整數，使每個方格內的整數是對着的邊上那兩格的點數之和。

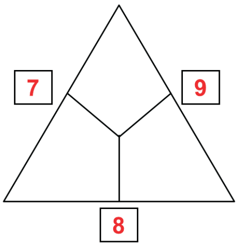
(初小階段：懂加數/減數便成。)



在三角形內每一格填上若干點，使每個方格內的整數是對着的邊上那兩格的點數之和。

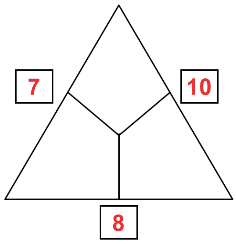
(初小階段：需一點思考，但可用試錯方法求解。)



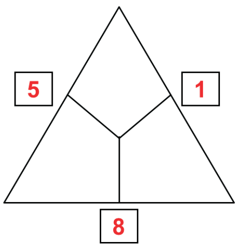


在三角形內每一格填上某個正整數，使每個方格內的正整數是對着的邊上那兩格的正整數之和。

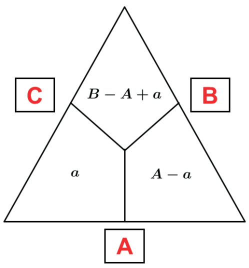
(初小階段：需一點思考，但可用試錯方法求解。是否常常有解？)



(初小階段：沒有解，需要引入分數。)



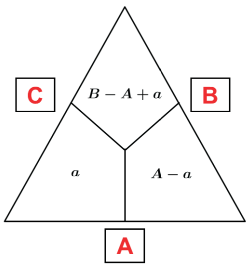
(初小階段：沒有解，需要引入負數。)



設左下格有 a 點。

右下格便有 $A-a$ 點。

上格便有 $B-A+a$ 點。

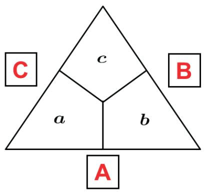


$(B-A+a)+a=C$

$B-A+2a=C$

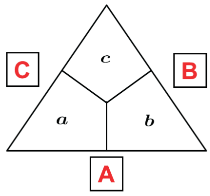
$\therefore\ a=\frac{1}{2}(A-B+C)$

(初中階段：解方程而已。)



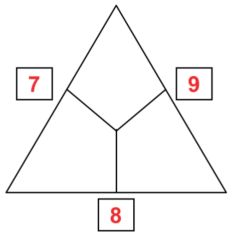
$$\begin{aligned} a+b \quad &= A \\ b+c &= B \\ a \quad +c &= C \end{aligned}$$

(高中階段：解聯立線性方程。)



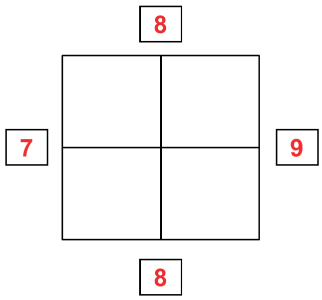
$$\begin{aligned} a+b \quad &= A \\ b+c &= B \\ a \quad +c &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(A-B+C) \\ b &= \frac{1}{2}(A+B-C) \\ c &= \frac{1}{2}(-A+B+C) \end{aligned}$$



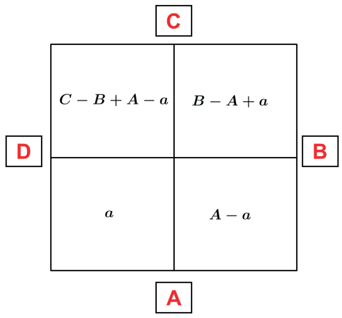
在三角形內每一格填上若干點，使每個方格內的整數是對着的邊上那兩格的點數之和。

數學家貪得無厭，故永無寧日！



在正方形內每一格填上若干點，使每個方格內的整數是對着的邊上那兩格的點數之和。

(初小階段：需更多思考，但可用試錯方法求解。)

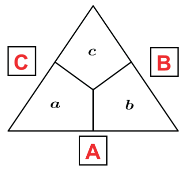


$(C-B+A-a)+a=D$?

$C-B+A=D$?

$\boxed{A-B+C-D=0?}$

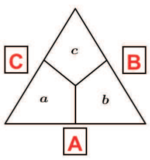
(大學一年級線性代數：線性相關。)



$$\begin{aligned} a+b \quad &= A \\ b+c &= B \\ a \quad +c &= C \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 1 & 0 & 1 & C \end{array}\right] = M$$

(大學一年級線性代數：矩陣的秩。)



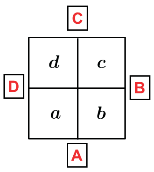
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 1 & 0 & 1 & C \end{array}\right] = M$$

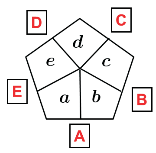
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 1 & 0 & 1 & C \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 0 & -1 & 1 & C-A \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_2]{}$$

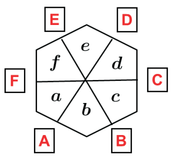
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 0 & 0 & 2 & C-A+B \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & A \\ 0 & 1 & 1 & B \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-A+B+C) \end{array}\right]$$

M 的秩 $=3$，故線性方程組有唯一解。

更一般的問題：







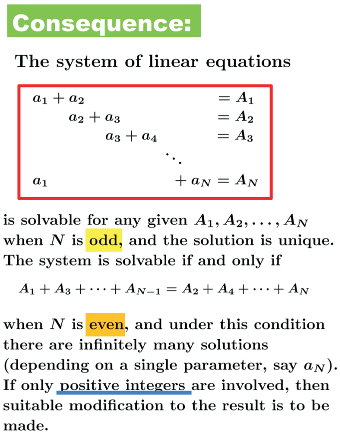
. . .

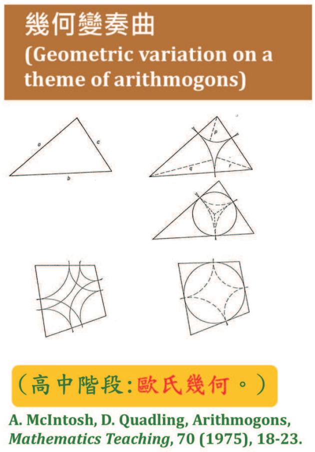
Theorem

Let $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ be an $N \times N$ matrix with each row being a cyclic permutation of the preceeding row and with $(1\ 1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ \ 0)$ as the first row. Then

$$\text{rank } M = \begin{cases} N \text{ if } N \text{ is odd}, \\ N-1 \text{ if } N \text{ is even}. \end{cases}$$

(大學一年級線性代數：Toeplitz 線性系統。)





参考資料

1. G. Highet (1950). *The Art of Teaching*, Vintage Books, New York.
2. S. Kim (1981). *Inversions: A Catalog of Calligraphic Cartwheels*, Byte Books, Peterborough.
3. A. McIntosh, D. Quadling (1975). Arithmogons, *Mathematics Teaching*, 70, 18-23.
4. E. E. Moise (1973). Jobs, training and education for mathematicians, *Notices of the American Mathematical Society*, 20, 217-221.
5. R. E. Moritz (1914). *Memorabilia Mathematica, or the Philomath's Quotation-book*, Macmillan Company, New York.
6. M. K. Siu (2000). "Less is more" or "Less is less"? Undergraduate mathematics education in the era of mass education, *Themes in Education*, 1(2), 163-171.
7. M. K. Siu and C. Tzanakis (2004). History of mathematics in classroom teaching: Appetizer? main course? Or dessert? *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*, 3 (1-2), v-x.
8. M. K. Siu (2008/2006). Mathematics, mathematics education, and the mouse, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, 42, 861-874; reprinted in *Mathematical Medley*, 33(2) 19-33.
9. M. K. Siu (2014). "Zhi yıxıng nán (knowing is easy and doing is difficult)" or vice versa? —— A Chinese mathematician's observation on HPM (History and Pedagogy of Mathematics) activities, in *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*, (Eds.) B. Sriraman, J. Cai, K. Lee, L. Fan, Y. Shimuzu, C. Lim, K. Subramaniam, Information Age Publishing, Charlotte, 27-48.
10. Stendhal (1836/1961). *Vie de Henry Brulard*, Editions Garnier, Paris; written in 1835/1836.
11. 蕭文強 (1995). 少者多也: 普及教育中的大學數學教育, 載於《香港數學教育的回顧與前瞻: 梁鑑添博士榮休文集》, 蕭文強編, 香港大學出版社, 109-118頁。
12. 蕭文強 (2009/2010a).不, 我不在數學課堂運用數學史。爲什麼?, 載於蕭文強, 《心中有數》, 九章出版社, 120-135頁; 大連理工大學出版社, 155-173頁。
13. 蕭文強 (2009/2010b). 數學、數學教育和滑鼠, 載於蕭文強 , 《心中有數》, 九章出版社, 31-49 頁; 大連理工大學出版社, 34-56頁。

—本文作者爲香港大學數學系退休教授—