數學傳播 40卷1期, pp. 72-80

$\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 不是一個孤立的等式

李錦鎣

壹、前言

在"等式 $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor$ 成立嗎" 這篇文章中, 我們將 Ramanujan 的一個等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 推廣到三項及開三次方根的類似等式: 對任意自然數 n, 等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$, $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 與 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{27n+26}\rfloor$ 必成立 , 其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數, 也就是 x 的高斯函數值。雖然我們要證明的等式涉及不連續的高斯函數, 但是我們的證明方法卻是利用具有連續變化性的不等式, 這暗示我們得到的等式仍然具有某種連續變化的可能性。現在, 我們繼續推廣 Ramanujan 等式, 將利用大一同學可以理解的方法, 來說明這些已有的等式其實都是一堆連續變化的等式中的一個, 它們不是孤立的現象。利用此連續變化過程, 我們也同時得到無數個類似於 Ramanujan 等式的新等式。

貳、由 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 談起

在"等式 $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor$ 成立嗎" 這篇文章中, 我們給了此類等式的證明策略。在此, 我們先給 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 一個更簡單的證明。既然想要說明: 對任意自然數 n, $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}$、$\sqrt[3]{8n+3}$ 與 $\sqrt[3]{8n+4}$ 的整數部份相同, 那我們應該先比較 $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}$ 與 $\sqrt[3]{8n+3}$ 和 $\sqrt[3]{8n+4}$ 的大小。

預備定理 (一): 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt[3]{8+4x}>1+\sqrt[3]{1+x}$ 必成立。

證明: 令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 其中 $x>0$。我們有導函數 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, 與 $f''(x)=\dfrac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}}<0$, 其中 $x>0$。所以 $f(x)$ 圖形的凹口向下, 因此當 $s>t>0$ 時, $\dfrac{f(s)+f(t)}{2}<f\Big(\dfrac{s+t}{2}\Big)$

成立, 特別是 $\dfrac{f(1)+f(1+x)}{2} < f\Big(\dfrac{1+(1+x)}{2}\Big) = f(1+\dfrac{x}{2})$。所以, 若 $0 < x \leq 1$, $1+f(1+x) < 2f(1+\dfrac{x}{2})$, 也就是 $1+\sqrt[3]{1+x} < 2\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}} = \sqrt[3]{8+4x}$。
同理, 我們有另一側的不等式,

預備定理 (二): 若 $0 < x \leq 1$, 則 $1+\sqrt[3]{1+x} > \sqrt[3]{8+3x}$ 必成立。

證明: 利用算幾不等式, 我們有 $1+\sqrt[3]{1+x} > 2\sqrt{1\times\sqrt[3]{1+x}} = 2\sqrt[6]{1+x}$。我們可以嘗試檢查: 當 $0 < x \leq 1$ 時, $2\sqrt[6]{1+x} > \sqrt[3]{8+3x} = 2\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{8}x}$ 是否成立。兩邊約分後再 6 次方, 並且移項, 我們就只要檢查: 當 $0 < x \leq 1$ 時, $g(x) = (1+x)-(1+\dfrac{3}{8}x)^2 = \dfrac{1}{4}x(1-\dfrac{9}{16}x)$ 是否爲正數。但是, 當 $0 < x \leq 1$ 時, x 與 $1-\dfrac{9}{16}x$ 均爲正數, 所以 $g(x)$ 爲正數, 因此 $1+\sqrt[3]{1+x} > 2\sqrt[6]{1+x} > \sqrt[3]{8+3x}$。

預備定理 (三): 對任意自然數 n, 則 $\sqrt[3]{8n+4} > \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{8n+3}$ 必成立。

證明: 對任意自然數 n, 在預備定理 (一)(二) 中, 取 $x = \dfrac{1}{n}$, 我們有 $\sqrt[3]{8+4(\dfrac{1}{n})} > 1+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}} > \sqrt[3]{8+3(\dfrac{1}{n})}$, 再分別乘以正數 $\sqrt[3]{n}$, 即可得到 $\sqrt[3]{8n+4} > \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{8n+3}$。

現在我們可以證明以下定理:

定理一: 對任意自然數 n, 則 $\lfloor \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+3} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor$必成立。

證明: 由預備定理 (三) 知, 對任意自然數 n, 則 $\sqrt[3]{8n+4} > \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{8n+3}$ 必成立。因此它們的整數部份會滿足 $\big[\sqrt[3]{8n+4}\big] \geq \big[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\big] \geq \big[\sqrt[3]{8n+3}\big]$。但是如果 $\lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor > \lfloor \sqrt[3]{8n+3} \rfloor$, 也就是說 $\sqrt[3]{8n+4}$ 的整數部份大於 $\sqrt[3]{8n+3}$ 的整數部份, 那將會有一自然數 m, 使得 $\sqrt[3]{8n+4} \geq m > \sqrt[3]{8n+3}$, 所以 $8n+4 \geq m^3 > 8n+3$, 因此立方數 m^3 等於 $8n+4$, 亦即 m^3 是 8 的倍數加 4。但是, 無論 m 是 $8k$, $8k+1$, $8k+2$, $8k+3$, $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$, 或是 $8k+7$, m^3 只可能爲 $8p$, $8p+1$, $8p+3$, $8p+5$, 或是 $8p+7$, 所以 m^3 不會是 8 的倍數加 4。這個矛盾是我們假設 $\lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor > \lfloor \sqrt[3]{8n+3} \rfloor$ 所造成, 因此 $\lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+3} \rfloor$。再由 $[\sqrt[3]{8n+4}] \geq [\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}] \geq [\sqrt[3]{8n+3}]$, 我們證明了 $[\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$。

再來, 我們就要問: 爲什麼這個等式中一定要用 $[\sqrt[3]{8n+4}]$ 與 $[\sqrt[3]{8n+3}]$ 呢? 其實, 不必要的!

預備定理 (**四**): 若選定一個實數 p 滿足 $3 \leq p < 5$, 則對任意自然數 n, $[\sqrt[3]{8n+p}] = [\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$ 必成立。

證明: 首先, 考慮所選定的 p 滿足 $3 \leq p < 4$, 如果等式 $[\sqrt[3]{8n+p}] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 不是恆成立, 那必定會有一個自然數 n 使得 $[\sqrt[3]{8n+4}] > [\sqrt[3]{8n+p}]$。因此必有一自然數 m, 使得 $\sqrt[3]{8n+4} \geq m > \sqrt[3]{8n+p}$ 成立。所以 $8n+4 \geq m^3 > 8n+p \geq 8n+3$。因此立方數 m^3 等於 $8n+4$, 亦即 m^3 是 8 的倍數加 4。但是 [定理一] 的證明已經說明這是不可能的事, 因此, 對任意自然數 n, 等式 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor = \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 必須成立。再來, 我們考慮所選定的 p 滿足 $4 < p < 5$ 時, 如果等式 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor = \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 不是恆成立, 那必定會有一個自然數 n 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor > \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$, 因此必有一自然數 m, 使得 $\sqrt[3]{8n+p} \geq m > \sqrt[3]{8n+4}$ 成立。所以 $8n+5 > 8n+p \geq m^3 > 8n+4$, 這將使得自然數 m^3 介於相鄰兩整數之間, 矛盾! 我們就得知, p 滿足 $4 < p < 5$ 時, 等式 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor = \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 也要成立。

由 [定理一] 與預備定理 (四), 我們立刻得到以下結果:

定理二: 若選定一個 p 滿足 $3 \leq p < 5$, 則對任意自然數 n, $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor$ 必成立。

然而, 我們立刻要面對一個問題, 預備定理 (四) 中, p 的限制可否再放寬呢? 答案是: 不行! 我們有以下定理

預備定理 (**五**): 若選定一個 p 滿足 $3 > p > 0$, 則有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor < \lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor$。

證明: 選定一個 p 滿足 $3 > p > 0$。對任意自然數 k, 取 $n = 64k^3+72k^2+27k+3$, 則 $8n+p < 8n+3 = (8k+3)^3$, 所以 $\sqrt[3]{8n+p} < 8k+3 = \sqrt[3]{8n+3}$, 因此 $[\sqrt[3]{8n+p}] < 8k+3 = [\sqrt[3]{8n+3}]$, 也就是說, 有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor < \lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor$。

預備定理 (**六**): 有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor > \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$。

證明: 設 $m = \lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor > \lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$, 則 $\sqrt[3]{8n+5} \geq m > \sqrt[3]{8n+4}$, 所以 $8n+5 \geq m^3 > 8n+4$, 但是 m^3 是整數, 因此 $m^3 = 8n+5$。但是在 $m = 8k, 8k+1, 8k+2, 8k+3,$

$8k+4$, $8k+5$, $8k+6$, $8k+7$ 這些情形中, 只有 $m=8k+5$ 符合, 由 $m^3=8n+5$, 所以 n 應該是 $64k^3+120k^2+75k+15$。因此, 對任意自然數 k, 取 $n=64k^3+120k^2+75k+15$, 則 $8n+4<8n+5=(8k+5)^3$, 所以 $\sqrt[3]{8n+4}<8k+5=\sqrt[3]{8n+5}$, 亦即 $[\sqrt[3]{8n+4}]<8k+5=[\sqrt[3]{8n+5}]$, 也就是說, 有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor<\lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor$。當 $\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor<\lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor$ 發生時, $\sqrt[3]{8n+5}=8k+5$ 是一個自然數, 且 $\lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor$ 與 $\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 是相鄰整數。

由預備定理 (五) 與預備定理 (六), 再配合等式 $\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor$, 我們知道預備定理 (四) 中, p 的限制已經是最大的容許範圍了。

你會想問; 我們爲什麼要求出 p 的最大的容許範圍 $3\le p<5$? 是否就只是想把 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 放入一組連續的等式 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor$ 中? 其實不只是如此, 既然等式中的 4 可以變成 p, $3\le p<5$, 下一步我們更想問: 等式中的 的那個“1” 到底扮演甚麼角色? 可以把這個“1” 改成其它數字嗎? 可以改成 0.8 或 0.6 嗎? 可以改成 1.2 或 1.5 嗎? 也就是說, 使得等式 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 仍成立的 a 是哪些數? 我們先讓 $a=0.8$, 以這個例子來呈現整個問題的關鍵。

預備定理 (七): 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt[3]{8+4.99x}>1+\sqrt[3]{1+0.8x}$ 必成立。

證明: 令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 其中 $x>0$。由預備定理 (一) 知道, 當 $s>t>0$ 時, $\dfrac{f(s)+f(t)}{2}<f\Big(\dfrac{s+t}{2}\Big)$ 成立, 特別是 $\dfrac{f(1)+f(1+0.8x)}{2}<f\Big(\dfrac{1+(1+0.8x)}{2}\Big)=f(1+0.4x)<f(1+\dfrac{1}{2}x)<f\Big(1+\dfrac{4.99}{8}x\Big)$。所以, 若 $0<x\le 1$, 也就是 $1+\sqrt[3]{1+0.8x}<2\sqrt[3]{1+\dfrac{4.99}{8}x}=\sqrt[3]{8+4.99x}$。

預備定理 (八): 若 $0<x<\dfrac{16}{45}$, 則 $1+\sqrt[3]{1+0.8x}>\sqrt[3]{8+3x}$ 必成立。

證明: 利用算幾不等式, 我們有 $1+\sqrt[3]{1+0.8x}>2\sqrt{1\times\sqrt[3]{1+0.8x}}=2\sqrt[6]{1+0.8x}$。我們可以嘗試檢查: 當 $0<x<\dfrac{16}{45}$ 時, $2\sqrt[6]{1+0.8x}>\sqrt[3]{8+3x}=2\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{8}x}$ 是否成立。兩邊約分後再 6 次方, 並且移項, 我們就只要檢查: 當 $0<x<\dfrac{16}{45}$ 時, $g(x)=(1+0.8x)-\Big(1+\dfrac{3}{8}x\Big)^2=\dfrac{x}{4}\Big(\dfrac{1}{5}-\dfrac{9}{16}x\Big)$ 是否爲正數。但是, 當 $0<x<\dfrac{16}{45}$ 時, $\dfrac{x}{4}$ 與 $\dfrac{1}{5}-\dfrac{9}{16}x$ 均爲正數, 所以 $g(x)$ 爲正數, 因此

$$1+\sqrt[3]{1+0.8x}>2\sqrt[6]{1+0.8x}>\sqrt[3]{8+3x}.$$

預備定理 (九): 對任意自然數 $n \geq 3$, 則 $\sqrt[3]{8n+4.99} > \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8} > \sqrt[3]{8n+3}$ 必成立。

證明: 對任意自然數 $n \geq 3$, 在預備定理 (七)(八) 中, 取 $x = \dfrac{1}{n}$, 所以 $x < \dfrac{16}{45}$, 我們有 $\sqrt[3]{8+4.99(\dfrac{1}{n})} > 1 + \sqrt[3]{1+0.8(\dfrac{1}{n})} > \sqrt[3]{8+3(\dfrac{1}{n})}$, 再分別乘以正數 $\sqrt[3]{n}$, 即可得到 $\sqrt[3]{8n+4.99} > \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8} > \sqrt[3]{8n+3}$。

定理三: 對任意自然數 n, 則 $\lfloor \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+3} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor$ 必成立。

證明: 由預備定理 (九) 知, 對任意自然數 $n \geq 3$, 則 $\sqrt[3]{8n+4.99} > \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8} > \sqrt[3]{8n+3}$ 必成立。因此它們的整數部份會滿足

$$[\sqrt[3]{8n+4.99}] \geq [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}] \geq [\sqrt[3]{8n+3}]。$$

但是預備定理(四) 說 $\lfloor \sqrt[3]{8n+4.99} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor = [\sqrt[3]{8n+3}]$, 因此, 我們證明, 對任意自然數 $n \geq 3$, $[\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$。

最後, 當然只剩下 $n = 1$ 與 $n = 2$ 兩種情形需要個別動手檢查 $[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}]$ 與 $[\sqrt[3]{8n+4}]$。$n = 1$ 時, $2 < \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1+0.8} < 1+2 = 3$, $2 < \sqrt[3]{8+4} = \sqrt[3]{12} < 3$, 所以 $[\sqrt[3]{8n+4} = [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}]$ 成立。同樣檢查 $n = 2$ 時, $[\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}]$ 也成立。因此, 我們證明, 對任意自然數 n, $[\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+0.8}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$ 成立。

在 [定理三] 論證過程中, 除了最後剩下有限個情形需要分別檢查之外, 我們到底做了些甚麼? 我們先選了一個 a, 例如 $a = 0.8$, 然後證明有一個比 5 小的數字 p, 例如 $p = 4.99$, 以及一個包含 0 右側的區間 $(0, q)$, 例如預備定理 (八) 的 $(0, \dfrac{16}{45})$, 使得 $k(x) = \sqrt[3]{8+px} - (1 + \sqrt[3]{1+ax})$ 與 $h(x) = (1 + \sqrt[3]{1+ax}) - \sqrt[3]{8+3x}$ 在 $(0, q)$ 上均爲正值。再將 x 以 $\dfrac{1}{n}$ 代入, 並乘上 $\sqrt[3]{n}$, 所以對自然數 $n > \dfrac{1}{q}$, 我們有 $\sqrt[3]{8n+p} > \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+a} > \sqrt[3]{8n+3}$, 因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt[3]{8n+p}] \geq [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+a}] \geq [\sqrt[3]{8n+3}]$。但是預備定理 (四) 說: 當 $3 \leq p < 5$, $\lfloor \sqrt[3]{8n+p} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor = [\sqrt[3]{8n+3}]$, 因此, 我們證明, 對任意自然數 $n \geq \dfrac{1}{q}$, $[\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+a}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$。依據以上這些觀察, 我們有以下的主要定理, 其中, 預備定理 (四) 所求出 p 的最大的容許範圍 $3 \leq p < 5$ 將扮演重要角色。

定理四: 選定兩個實數 a 與 b 滿足 $\dfrac{3}{4} < a + b < \dfrac{5}{4}$, 則將會有一個與 a, b 有關的自然數 m, 使得對任意自然數 $n \geq m$, 等式 $\lfloor \sqrt[3]{n+a} + \sqrt[3]{n+b} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor$ 必成立。

證明: 因為 $3<4(a+b)<5$, 我們可以取一個實數 p 滿足 $4(a+b)<p<5$, 固定此數 p。令 $k(x)=\sqrt[3]{8+px}-(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})$, 其中 $x\in[0,1]$, 再令 $h(x)=(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})-\sqrt[3]{8+3x}$, 其中 $x\in[0,1]$。首先我們有 $k(0)=0$, $h(0)=0$。其次, $k(x)$ 與 $h(x)$ 在 $x=0$ 附近的導數存在且連續, $k'(0)=\dfrac{1}{12}(p-4(a+b))>0$, 且 $h'(0)=\dfrac{1}{12}(4(a+b)-3)>0$, 所以必定會有一個開區間 $(0,q)$, 使得 $k(x)=\sqrt[3]{8+px}-(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})$ 與 $h(x)=(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})-\sqrt[3]{8+3x}$ 在 $(0,q)$ 上均為正值。因此, 在 $x\in(0,q)$ 時, $\sqrt[3]{8+px}>\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}$ 且 $\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}>\sqrt[3]{8+3x}$。再將 x 以 $\dfrac{1}{n}$ 代入, 並乘上 $\sqrt[3]{n}$, 所以, 對自然數 $n\ge m=\left[\dfrac{1}{q}\right]+1>\dfrac{1}{q}$, 我們有 $\sqrt[3]{8n+p}>\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}>\sqrt[3]{8n+3}$, 因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt[3]{8n+p}]\ge[\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}]\ge[\sqrt[3]{8n+3}]$。但是預備定理 (四) 說: 當 $3\le p<5$, $\lfloor\sqrt[3]{8n+p}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor=[\sqrt[3]{8n+3}]$, 因此, 我們證明, 對任意自然數 $n\ge m=\left[\dfrac{1}{q}\right]+1>\dfrac{1}{q}$, 等式 $[\sqrt[3]{8n+4}]=[\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}]=[\sqrt[3]{8n+3}]$ 會成立。

[定理四] 中, 關於 $a+b$ 的限制開區間 $(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4})$, 是否可以變成更大的開區間呢? 答案是: 不行! 我們有以下結果:

定理五: 給定兩個實數 a 與 b 滿足 $a+b>\dfrac{5}{4}$, 則有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}\rfloor>\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$; 反之, 給定兩個實數 a 與 b 滿足 $a+b<\dfrac{3}{4}$, 則有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}\rfloor<\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$。

證明: 首先, 假設 $a+b>\dfrac{5}{4}$。令 $k(x)=(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})-\sqrt[3]{8+5x}$, 其中 $x\in[0,1]$。我們有 $k(0)=0$, $k(x)$ 在 $x=0$ 附近的導數存在且連續, 以及 $k'(0)=\dfrac{1}{12}(4(a+b)-5)>0$, 所以必定會有一個開區間 $(0,q)$, 使得 $k(x)=(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})-\sqrt[3]{8+5x}$ 在 $(0,q)$ 上均為正值。因此, 在 $x\in(0,q)$ 時, $\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}>\sqrt[3]{8+5x}$。再將 x 以 $\dfrac{1}{n}$ 代入, 並乘上 $\sqrt[3]{n}$, 所以, 對自然數 $n\ge m=\left[\dfrac{1}{q}\right]+1>\dfrac{1}{q}$, 我們有 $\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}>\sqrt[3]{8n+5}$, 因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}]\ge[\sqrt[3]{8n+5}]$。但是由預備定理 (六) 知: 有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8n+5}\rfloor>\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$, 因此, 我們證明會有無限多個自然數 n, 使得 $[\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}]>[\sqrt[3]{8n+4}]$。

再來, 我們假設 a 與 b 滿足 $a+b<\dfrac{3}{4}$。我們可以取一個實數 p 滿足 $4(a+b)<p<3$, 固定此數 p。令 $h(x)=\sqrt[3]{8+px}-(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})$, 其中 $x\in[0,1]$。我們有 $h(0)=0$,

$h(x)$ 在 $x=0$ 附近的導數存在且連續, 以及 $h'(0)=\dfrac{1}{12}(p-4(a+b))>0$, 所以必定會有一個開區間 $(0,q)$, 使得 $h(x)=\sqrt[3]{8+px}-(\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx})$ 在 $(0,q)$ 上均爲正值。因此, 在 $x\in(0,q)$ 時, $\sqrt[3]{1+ax}+\sqrt[3]{1+bx}<\sqrt[3]{8+px}$。再將 x 以 $\dfrac{1}{n}$ 代入, 並乘上 $\sqrt[3]{n}$, 所以, 對自然數 $n\geq m=\left[\dfrac{1}{q}\right]+1>\dfrac{1}{q}$, 我們有 $\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}<\sqrt[3]{8n+p}$, 因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}]\leq[\sqrt[3]{8n+p}]$。但是預備定理 (五) 知: 若 p 滿足 $3>p>0$, 則有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{8+px}\rfloor<\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor$。因此會有無限多個自然數 n, 使得 $\lfloor\sqrt[3]{n+a}+\sqrt[3]{n+b}\rfloor<\lfloor\sqrt[3]{8n+3}\rfloor=[\sqrt[3]{8n+4}]$。

現在, 我們可以回答先前所提出的問題了。在 [定理五] 中取 $b=0$, 我們就知道使得等式 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 成立的 a 必須滿足 $\dfrac{3}{4}\leq a\leq\dfrac{5}{4}$ 。另一方面, 在 [定理四] 中取 $b=0$, 所以 a 滿足 $\dfrac{3}{4}<a<\dfrac{5}{4}$ 時, 則將會有一個與 a 有關的自然數 m, 使得對任意自然數 $n\geq m$, 等式 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 必成立。事實上, 我們可以有以下更準確的結果:

定理六: 任選 $a\in[\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{4}]$, 則對任意自然數 n, 則 $\lfloor\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}\rfloor=\lfloor\sqrt[3]{8n+4}\rfloor$ 必成立。

證明: 我們先看 $a=\dfrac{5}{4}$ 情形。令 $k(x)=\sqrt[3]{8+5x}-\left(1+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{4}x}\right)$, 其中 $x\in[0,1]$, 再令 $h(x)=\left(1+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{4}x}\right)-\sqrt[3]{8+3x}$, 其中 $x\in[0,1]$。我們有 $k(0)=0$, $k'(x)=\dfrac{5}{12}\Big(\dfrac{1}{(1+\frac{5}{8}x)^{2/3}}-\dfrac{1}{(1+\frac{5}{4}x)^{2/3}}\Big)>0$, $x\in(0,1)$。所以 $k(x)>0$, $x\in(0,1)$。由預備定理 (二), 我們也知道, $h(x)=\left(1+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{4}x}\right)-\sqrt[3]{8+3x}>(1+\sqrt[3]{1+x})-\sqrt[3]{8+3x}>0$, $x\in(0,1)$。因此對 $x\in(0,1)$, 我們有 $\sqrt[3]{8+5x}>1+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{4}x}$, $1+\sqrt[3]{1+\dfrac{5}{4}x}>\sqrt[3]{8+3x}$。再將 x 以 $\dfrac{1}{n}$ 代入, 並乘上 $\sqrt[3]{n}$, 所以, 對自然數 n, 我們有 $\sqrt[3]{8n+5}>\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{5}{4}}>\sqrt[3]{8n+3}$, 因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt[3]{8n+5}]\geq\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{5}{4}}\right]\geq[\sqrt[3]{8n+3}]$。對任意自然數 n, 我們只有兩種可能: (1) $[\sqrt[3]{8n+5}]=[\sqrt[3]{8n+4}]=[\sqrt[3]{8n+3}]$, 或是 (2) $[\sqrt[3]{8n+5}]>[\sqrt[3]{8n+4}]=[\sqrt[3]{8n+3}]$。

(1) 在 $[\sqrt[3]{8n+5}]=[\sqrt[3]{8n+4}]=[\sqrt[3]{8n+3}]$ 發生時, 配合 $[\sqrt[3]{8n+5}]\geq\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{5}{4}}\right]\geq[\sqrt[3]{8n+3}]$, 我們得到 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{5}{4}}\right]=[\sqrt[3]{8n+4}]$。

(2) 在 $[\sqrt[3]{8n+5}] > [\sqrt[3]{8n+4}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$ 發生時, 依據預備定理 (六), 這時 $\sqrt[3]{8n+5}$ 是自然數, 配合 $\sqrt[3]{8n+5} > \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} > \sqrt[3]{8n+3}$, 我們得到 $[\sqrt[3]{8n+5}] > \left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+\frac{5}{4}}\right] \geq [\sqrt[3]{8n+3}] = [\sqrt[3]{8n+4}]$, 但是此時 $[\sqrt[3]{8n+5}]$ 與 $[\sqrt[3]{8n+4}]$ 是相鄰整數, 因此, 我們仍然得到 $\left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+\frac{5}{4}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$。所以, 對任意自然數 n, 則 $\left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+\frac{5}{4}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 必成立。

再來, 任選 $a \in [\frac{4}{5}, \frac{5}{4}]$, 固定這個 a。對任意自然數 n, 我們有 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}}\right] \geq [\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}] \geq \left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\frac{4}{5}}\right]$, 但是在上一段與 [定理三], 我們分別證明了 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 及 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\frac{4}{5}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$, 因此 $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+a}] = [\sqrt[3]{8n+4}]$, 我們就完成定理證明了。

針對更一般的等式 $\lfloor \sqrt[3]{n+a} + \sqrt[3]{n+b} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{8n+4} \rfloor$, 在滿足 [定理四] 的條件下, 進行 [定理三] 的類似論證, 我們也可以得到許多等式, 例如:

(1) 對任意自然數 n, 等式 $\left[\sqrt[3]{n+\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{n+\frac{2}{3}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 會成立。

(2) 對任意自然數 n, 等式 $\left[\sqrt[3]{n+\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{n+\frac{3}{4}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 會成立。

(3) 對任意自然數 $n \geq 4$, 等式 $\left[\sqrt[3]{n-\frac{5}{10}} + \sqrt[3]{n+\frac{13}{10}}\right] = [\sqrt[3]{8n+4}]$ 會成立

$\vdots$

所以 [定理一] 只是 [定理四] 的一個特殊情形。從 [定理一] 到 [定理四] 的過程, 也適用在其它類似的等式, 例如, 用完全相同方法, 可推廣 $\lfloor \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{27n+26} \rfloor$ 得到以下定理。

定理七: 選定三個實數 a, b 與 c 滿足 $\frac{26}{9} < a+b+c < 3$, 則將會有一個與 a, b, c 有關的自然數 m, 使得對任意自然數 $n \geq m$, $\lfloor \sqrt[3]{n+a} + \sqrt[3]{n+b} + \sqrt[3]{n+c} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{27n+26} \rfloor$ 必成立。

在滿足 [定理七] 的條件下, 進行 [定理三] 的類似論證, 我們就可以得到許多等式, 例如:

(1) 對任意自然數 n, 等式 $\left[\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+\dfrac{17}{18}}\right]=[\sqrt[3]{27n+26}]$ 必成立;

(2) 對任意自然數 n, 等式 $\left[\sqrt[3]{n+\dfrac{1}{3}}+\sqrt[3]{n+\dfrac{1}{3}}+\sqrt[3]{n+\dfrac{23}{10}}\right]=[\sqrt[3]{27n+26}]$ 必成立;

(3) 對任意自然數 $n\geq 19$, 等式 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{261}{90}}\right]=[\sqrt[3]{27n+26}]$必成立;

(4) 對任意自然數 $n\geq 19$, 等式 $\left[\sqrt[3]{n-\dfrac{1}{5}}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+\dfrac{287}{90}}\right]=[\sqrt[3]{27n+26}]$ 必成立;

$\vdots$

讀者也可以試試看, 利用這種方法將等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 與 $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor$ 進行類似推廣。其實, 有許多數論中的等式可以進行類似的連續變化, 例如, 在“由 $\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}\right]=\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{n+\dfrac{1}{4}}\right]$ 談數學發現的一種方法” 這篇文章中, 我們就爲高中生說明另一個較簡單等式的連續變化過程。

參考文獻

1. 李錦鎣, 等式 $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\rfloor=\lfloor\sqrt{9n+8}\rfloor$ 成立嗎?, 數學傳播季刊, 39(3), 42-46。
2. 李錦鎣, 由 $\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}\right]=\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{n+\dfrac{1}{4}}\right]$ 談數學發現的一種方法, 自然科學與教育期刊, 彰化師大理學院, 2015。(http://science.ncue.edu.tw/journal/index.html)

—本文作者任教國立彰化師範大學數學系—