數學傳播 40卷1期, pp. 62-71

四面體的餘弦定理

朱漢民

1. 前言

本文提出三種不同形式的四面體的餘弦定理。

我們從介紹 Binet - Cauchy *恆等式*開始, 來推導第一個形式的四面體的餘弦定理。在高中立體幾何的教學中, 一個基本能力是求正四面體的兩面角; 但如果想求出任意四面體的兩面角, 中學的數學知識可能就不夠用了。本文中第一個形式的四面體的餘弦定理讓我們能夠計算已知所有稜長的四面體的每一個兩面角 (即使 6 條稜長均不相等)。

接下來, 我們利用一個向量外積的恆等式來推導第二個形式的四面體的餘弦定理。

最後, 結合第一段中介紹過的 Binet - Cauchy 恆等式, 以及第二個形式的四面體的餘弦定理, 我們推導出了第三個形式的四面體的餘弦定理。這個形式是最貼近立體的畢氏定理的一般化結果; 此外, 它也提供我們一個計算立體坐標系中一個截面面積的簡便算法。

2. Binet - Cauchy 恆等式

定理一：(Binet - Cauchy 恆等式)

對任意四個數列：$\langle a_k\rangle$、$\langle b_k\rangle$、$\langle c_k\rangle$、$\langle d_k\rangle$ 而言, 必有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ic_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jd_j\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n} a_id_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_j\Big)=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)(c_id_j-c_jd_i)$$

證明：

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ic_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jd_j\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n} a_id_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_j\Big)\\ &\quad=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ic_ib_jd_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_id_ib_jc_j\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{1\le i<j\le n} a_ic_ib_jd_j + \sum_{1\le i=j\le n} a_ic_ib_jd_j + \sum_{1\le j<i\le n} a_ic_ib_jd_j \Big)$$
$$-\Big(\sum_{1\le i<j\le n} a_id_ib_jc_j + \sum_{1\le i=j\le n} a_id_ib_jc_j + \sum_{1\le j<i\le n} a_id_ib_jc_j \Big)$$

其中

$$\sum_{1\le i=j\le n} a_ic_ib_jd_j = \sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_id_i = \sum_{1\le i=j\le n} a_id_ib_jc_j$$

且

$$\sum_{1\le j<i\le n} a_ic_ib_jd_j = \sum_{1\le i<j\le n} a_jc_jb_id_i, \quad \sum_{1\le j<i\le n} a_id_ib_jc_j = \sum_{1\le i<j\le n} a_jd_jb_ic_i$$

故得

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ic_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jd_j\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} a_id_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_jc_j\Big)\\
&= \sum_{1\le i<j\le n} (a_ic_ib_jd_j + a_jc_jb_id_i) - \sum_{1\le i<j\le n} (a_id_ib_jc_j + a_jd_jb_ic_i)\\
&= \sum_{1\le i<j\le n} (a_ic_ib_jd_j + a_jc_jb_id_i - a_id_ib_jc_j - a_jd_jb_ic_i)\\
&= \sum_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)(c_id_j - c_jd_i)
\end{aligned}$$

證畢。 □

當我們取 $n = 3$, 可得以下外積與內積關係的恆等式：

定理二：(三維的 Binet - Cauchy 恆等式)

假設 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 爲空間向量, 則

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

證明：設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{c}=(b_1,b_2,b_3)$、$\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$, 則由定理一可得

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$$

證畢。 □

根據三維的 Binet - Cauchy 恆等式, 我們討論第一種四面體的餘弦定理：

3. 四面體的餘弦定理 TYPE I

就像三角形的餘弦定理那樣, 我們希望只要給定一個四面體的所有稜長, 我們就可以求出任兩面的兩面角! 如圖1, 四面體 O-ABC 中, 我們希望能直接以稜長 : $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$、$\overline{BC}=d$、$\overline{CA}=e$、$\overline{AB}=f$ 來表示出 O-ABC 中兩個側面 $\triangle OBC$ 與 $\triangle OCA$ 的兩面角。

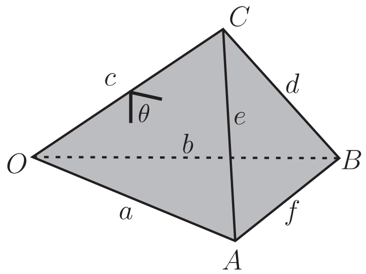

圖 1

令 $\triangle OBC$ 與 $\triangle OCA$ 的兩面角爲 θ (四面體 O-ABC 內部那一個! 如圖 1 所示), 則根據「外積與兩面角的關係」, 並配合「右手定則」, 我們有

$$\cos\theta=\frac{(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|}$$

引入定理二, 我們得到

$$\cos\theta=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}\end{vmatrix}}{|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|}$$

其中, 將 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$、$\overline{BC}=d$、$\overline{CA}=e$、$\overline{AB}=f$ 等符號代入, 我們得到

$$\begin{cases}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=a\times b\times\cos\angle AOB=a\times b\times\dfrac{a^2+b^2-f^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-f^2}{2}\\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=c\times b\times\cos\angle COB=c\times b\times\dfrac{c^2+b^2-d^2}{2cb}=\dfrac{c^2+b^2-d^2}{2}\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=c\times a\times\cos\angle COA=c\times a\times\dfrac{c^2+a^2-e^2}{2ca}=\dfrac{c^2+a^2-e^2}{2}\end{cases}$$

(三角形的餘弦定理)

$$a\triangle OCB=\frac{1}{4}\sqrt{4c^2b^2-(c^2+b^2-d^2)^2}\quad、\quad a\triangle OCA=\frac{1}{4}\sqrt{4c^2a^2-(c^2+a^2-e^2)^2}$$

(秦九韶公式), 其中 $a\triangle OCB$、$a\triangle OCA$ 分別表示 $\triangle OCB$、$\triangle OCA$ 的面積。
綜合得到：

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{a^2+b^2-f^2}{2} & \dfrac{c^2+b^2-d^2}{2} \\ \dfrac{c^2+a^2-e^2}{2} & c^2 \end{vmatrix}}{2\cdot\left(\frac{1}{4}\sqrt{4c^2b^2-(c^2+b^2-d^2)^2}\right)\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{4}\sqrt{4c^2a^2-(c^2+a^2-e^2)^2}\right)}$$

繼續整理可得：

$$\cos\theta = \frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2-f^2 & c^2+b^2-d^2 \\ c^2+a^2-e^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4c^2b^2-(c^2+b^2-d^2)^2}\sqrt{4c^2a^2-(c^2+a^2-e^2)^2}}$$

我們得到

定理三：(給定稜長的四面體的兩面角計算公式)

如圖 1 所示, 令 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$、$\overline{BC}=d$、$\overline{CA}=e$、$\overline{AB}=f$, 且令 $\angle(OCB,OCA)$ 爲 $\triangle OBC$ 與 $\triangle OCA$ 的兩面角 (四面體 O-ABC 內部那一個!), 則

$$\cos\angle(OCB,OCA) = \frac{\begin{vmatrix} a^2+b^2-f^2 & c^2+b^2-d^2 \\ c^2+a^2-e^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4c^2b^2-(c^2+b^2-d^2)^2}\sqrt{4c^2a^2-(c^2+a^2-e^2)^2}}$$

以下我們給幾個例子：

例 1：如果四面體 O-ABC 爲正四面體, 即 $a=b=c=d=e=f$, 則

$$\begin{aligned}\cos\angle(OCB,OCA) &= \frac{\begin{vmatrix} a^2+a^2-a^2 & a^2+a^2-a^2 \\ a^2+a^2-a^2 & 2a^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4a^2a^2-(a^2+a^2-a^2)^2}\sqrt{4a^2a^2-(a^2+a^2-a^2)^2}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 & 2a^2 \end{vmatrix}}{\sqrt{3a^4}\sqrt{3a^4}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

這是被大家所熟知的：正四面體的兩面角的餘弦值爲 $\dfrac{1}{3}$。

例 2 : 設四面體 O-ABC 如圖 2 所示, 則

$$\cos\angle(OCB,OCA)=\frac{\begin{vmatrix}2^2+2^2-2^2 & 2^2+2^2-1^2\\ 2^2+2^2-2^2 & 2\cdot 2^2\end{vmatrix}}{\sqrt{4\cdot 2^2\cdot 2^2-(2^2+2^2-1^2)^2}\sqrt{4\cdot 2^2\cdot 2^2-(2^2+2^2-2^2)^2}}$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}4 & 7\\ 4 & 8\end{vmatrix}}{\sqrt{15}\sqrt{48}}=\frac{4}{12\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{15}$$

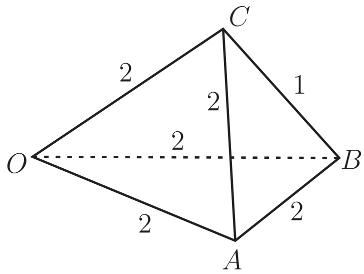

圖 2

例 3 : 設四面體 O-ABC 如圖 3 所示, 則

$$\cos\angle(OCB,OCA)=\frac{\begin{vmatrix}(4.5)^2+5^2-2^2 & 6^2+4.5^2-6^2\\ 6^2+5^2-8^2 & 2\cdot 6^2\end{vmatrix}}{\sqrt{4\cdot 6^2\cdot (4.5)^2-(6^2+(4.5)^2-6^2)^2}\sqrt{4\cdot 6^2\cdot 5^2-(6^2+5^2-8^2)^2}}$$
$$=\frac{\begin{vmatrix}41.25 & 20.25\\ -3 & 72\end{vmatrix}}{\sqrt{3326.0625}\sqrt{3591}}=\frac{3030.75}{\sqrt{11943890.4375}}\approx 0.88,$$

查表可知 : $\angle(OCB,OCA)\approx 28°20'$

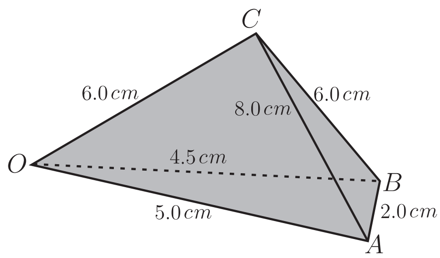

圖 3

還有兩種四面體的餘弦定理, 依序介紹如下 :

4. 四面體的餘弦定理 TYPE II

我們先提出一個外積的運算性質：
任給空間中四個點 O、A、B、C, 則我們有

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \tag{1}$$

證明：僅需重複運用外積的基本性質：

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{OC}\times(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\\
&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\\
&=\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\\
&=\overrightarrow{OA}\times(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OA}=\vec{0}
\end{aligned}$$

證畢。 □

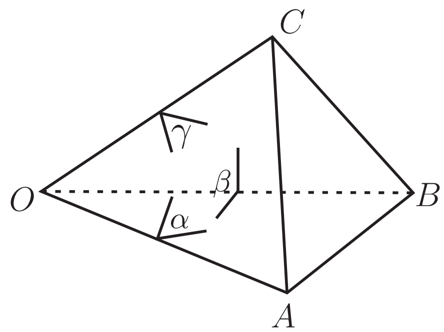

圖 4

我們規定符號如下 (請參考圖 4):

令四面體 O-ABC 中, $\triangle OCA$ 與 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 與 $\triangle OAB$、$\triangle OCA$ 與 $\triangle OBC$ 在四面體內部的兩面角分別爲 α、β、γ; 而 $a\triangle OBC$、$a\triangle OCA$、$a\triangle OAB$、$a\triangle ABC$ 則分別表示 $\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$、$\triangle ABC$ 的面積。

(1) 式兩邊取平方得：

$$(a\triangle ABC)^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2\\
&\quad+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\\
&\quad+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\\
&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2+2(a\triangle OBC)(a\triangle OCA)\cos(\pi-\gamma)\\
&\quad+2(a\triangle OCA)(a\triangle OAB)\cos(\pi-\alpha)+2(a\triangle OAB)(a\triangle OBC)\cos(\pi-\beta)
\end{aligned}$$

(請注意右手定則!)

$$\begin{aligned}
&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-2(a\triangle OCA)(a\triangle OAB)\cos\alpha\\
&\quad-2(a\triangle OAB)(a\triangle OBC)\cos\beta-2(a\triangle OBC)(a\triangle OCA)\cos\gamma.
\end{aligned}$$

我們得到：

定理四：(四面體的餘弦定理 TYPE II)

令四面體 O-ABC 中 (請參考圖 4), $\triangle OCA$ 與 $\triangle OAB$、$\triangle OAB$ 與 $\triangle OBC$、$\triangle OBC$ 與 $\triangle OCA$ 在內部的兩面角分別爲 α、β、γ; 而 $a\triangle OBC$、$a\triangle OCA$、$a\triangle OAB$、$a\triangle ABC$ 分別表示 $\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$、$\triangle ABC$ 的面積。則

$$\begin{aligned}
(a\triangle ABC)^2=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-2(a\triangle OCA)(a\triangle OAB)\cos\alpha\\
-2(a\triangle OAB)(a\triangle OBC)\cos\beta-2(a\triangle OBC)(a\triangle OCA)\cos\gamma.
\end{aligned}$$

最後, 我們利用三維的 Binet - Cauchy 恆等式, 以及四面體的餘弦定理 TYPE II 推出第三種四面體的餘弦定理。

5. 四面體的餘弦定理 TYPE III

我們考慮 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 三個方向的單位向量 $\overrightarrow{OA'}$、$\overrightarrow{OB'}$、$\overrightarrow{OC'}$, 如下圖 5：

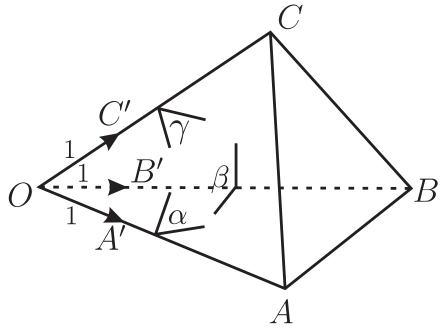

圖 5

令 $\angle BOC=\mathcal{A}$, $\angle COA=\mathcal{B}$, $\angle AOB=\mathcal{C}$, 由三維的 Binet - Cauchy 恆等式以及內積定義可知：

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{OB'}\times\overrightarrow{OC'})\cdot(\overrightarrow{OA'}\times\overrightarrow{OC'})&=\begin{vmatrix}\overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OA'} & \overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OA'}\\ \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OC'} & \overrightarrow{OC'}\cdot\overrightarrow{OC'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\mathcal{C} & \cos\mathcal{B}\\ \cos\mathcal{A} & 1\end{vmatrix}\\
&=\cos\mathcal{C}-\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{B}
\end{aligned}
$$

另一方面, 由內積定義, 外積的幾何意義與三角形面積公式可知：

$$
(\overrightarrow{OB'}\times\overrightarrow{OC'})\cdot(\overrightarrow{OA'}\times\overrightarrow{OC'})=(2\cdot a\triangle OB'C')(2\cdot a\triangle OA'C')\cos\gamma=\sin\mathcal{A}\sin\mathcal{B}\cos\gamma
$$

綜合可得, $\sin\mathcal{A}\sin\mathcal{B}\cos\gamma=\cos\mathcal{C}-\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{B}$, 同理, 我們總共有以下三個式子：

$$
\begin{cases}
\sin\mathcal{A}\sin\mathcal{B}\cos\gamma=\cos\mathcal{C}-\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{B}\\
\sin\mathcal{B}\sin\mathcal{C}\cos\alpha=\cos\mathcal{A}-\cos\mathcal{B}\cos\mathcal{C}\\
\sin\mathcal{C}\sin\mathcal{A}\cos\beta=\cos\mathcal{B}-\cos\mathcal{C}\cos\mathcal{A}
\end{cases}
$$

最後, 我們將此三式代入四面體的餘弦定理 TYPE II, 且沿用符號 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$ 得到：

$$
\begin{aligned}
(a\triangle ABC)^2&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-2\Big(\frac{1}{2}ac\sin\mathcal{B}\Big)\Big(\frac{1}{2}ab\sin\mathcal{C}\Big)\cos\alpha\\
&\quad-2\Big(\frac{1}{2}ab\sin\mathcal{C}\Big)\Big(\frac{1}{2}bc\sin\mathcal{A}\Big)\cos\beta-2\Big(\frac{1}{2}bc\sin\mathcal{A}\Big)\Big(\frac{1}{2}ac\sin\mathcal{B}\Big)\cos\gamma\\
&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-\frac{1}{2}abc[a(\sin\mathcal{B}\sin\mathcal{C}\cos\alpha)\\
&\quad+b(\sin\mathcal{C}\sin\mathcal{A}\cos\beta)+c(\sin\mathcal{A}\sin\mathcal{B}\cos\gamma)]\\
&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-\frac{1}{2}abc[a(\cos\mathcal{A}-\cos\mathcal{B}\cos\mathcal{C})\\
&\quad+b(\cos\mathcal{B}-\cos\mathcal{C}\cos\mathcal{A})+c(\cos\mathcal{C}-\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{B})]
\end{aligned}
$$

我們將之命名爲

定理五：(四面體的餘弦定理 TYPE III)

四面體 O-ABC 中, 如圖 6, 若 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$、$\angle BOC=\mathcal{A}$、$\angle COA=\mathcal{B}$、$\angle AOB=\mathcal{C}$, 則

$$
\begin{aligned}
(a\triangle ABC)^2&=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2-\frac{1}{2}abc[a(\cos\mathcal{A}-\cos\mathcal{B}\cos\mathcal{C})\\
&\quad+b(\cos\mathcal{B}-\cos\mathcal{C}\cos\mathcal{A})+c(\cos\mathcal{C}-\cos\mathcal{A}\cos\mathcal{B})]
\end{aligned}
$$

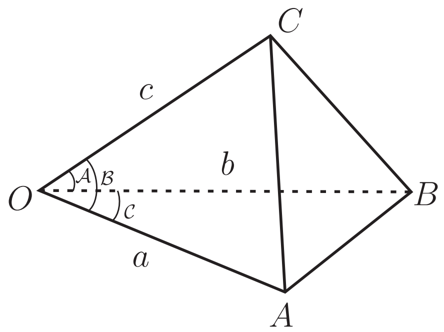

圖 6

特別地, 當 $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{C}=90^\circ$ 時, 我們得到：

定理六：(四面體的畢氏定理)

四面體 O-ABC 中, 如圖 7, 若 $\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=90^\circ$, 則

$$(a\triangle ABC)^2=(a\triangle OBC)^2+(a\triangle OCA)^2+(a\triangle OAB)^2$$

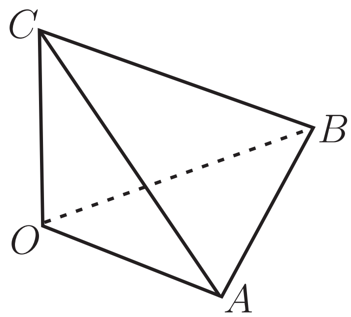

圖 7

以下我們給一個有趣的例子：此題是 82 年大學聯考自然組某一道題組的最後一個小題。該題組中設計了兩個小題在這個面積問題之前做準備; 可以想見此道問題如果以一般的手法計算相當複雜。但是, 根據我們所提出的四面體的畢氏定理, 計算上輕鬆非常多!

例 4：設平面 $x+y+\sqrt{2}z=1$ 與 x 軸、y 軸、z 軸分別交於 A、B、C 三點, 試求 $\triangle ABC$ 的面積。

解：容易計算：$A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, 從而, $a\triangle OBC=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$、$a\triangle OCA=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$、$a\triangle OAB=\dfrac{1}{2}$, 代入四面體的畢氏定理得到：

$$(a\triangle ABC)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1/2,$$

故得 $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

參考文獻

1. 游森棚等 (民100)。普通高級中學數學第四冊。台南市：翰林。
2. 蔡聰明(民89)。畢氏定理的兩個推廣。科學月刊, 第25卷第20期。
3. 李虎雄等 (民100)。普通高級中學數學第四冊教師手冊。新北市：康熹文化。
4. 項武義 (民99)。基礎幾何學。台北市：五南。

—本文作者任教國立北門高中, 現於國立高雄大學應用數學系博士班進修—