數學傳播 40卷1期, pp. 39-61

關於 Taxicab Numbers 及 Cabtaxi Numbers 兩整數列上界的探索

蘇柏奇

摘要: 若給定 $S=a^3+b^3$, 在考慮搜尋正整數 (或整數) $x\geq y$, 使得 $S=a^3+b^3=x^3+y^3$ 時, 我們證明 $a+b\equiv x+y (\bmod 6)$, 提供一個參數函數 $r_i\to (x(r_i), y(r_i))$ 以表示所有搜尋標的。當 S 有多種雙立方和表法時, 預測 S 爲 18 的倍數。以此爲基礎, 可用來搜尋有 n 組雙正立方和 (或立方和) 表法的最小正整數 $Ta(n)$ (或 $Ca(n)$) 的上界及其對應表法。根據這方法所得 $Ca(n)$, $11\leq n\leq 16$, 的上界, 已收錄於「整數列線上百科」(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS, 2013年6月)。我們同時給出 $Ca(43)$, $\ldots$, $Ca(55)$, $Ta(23)$, $Ta(24)$ 的上界及其完整雙立方和表法, 其中 $Ca(43)$, $Ca(44)$ 及 $Ta(23)$ 的上界分別於2014年8月及10月收錄於 OEIS, 在 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 搜尋的漫漫道路上, 提供一個嶄新的進展。

一、前言

當你在街頭看到一部車牌號碼爲 1729 的計程車時, 腦海裡是否浮現一些圖像? 是樂透的明牌, 或是其它? 但在印度裔天才數學家 Ramanujan 的腦海裡浮現的卻是

$$1729=1^3+12^3=10^3+9^3$$

也就是說, 1729 有兩組雙正立方和表法, 他並且進一步指出小於 1729 的數都沒有這種性質。因爲這一段 Hardy 與 Ramanujan 間關於計程車車牌號碼的軼事, 1729這個數也被稱爲 Hardy-Ramanujan Number [4]。事實上, 早在 1657 年 Bernard Frenicle de Bessy 已提及 $1729=1^3+12^3=10^3+9^3$ 爲有兩組正立方和表示法的最小正整數的事實。

有 n 組雙正立方和表法的最小正整數稱爲「the $n^{\rm th}$ taxicab number」, 記作 $Ta(n)$; 對於自然數 n, $Ta(n)$ 的存在性已由 Fermat 予以證明了, 見 Hardy 與 Wright 的著作 [2, 定理412]。有 n 組雙立方和 (不必然爲正數) 的最小正整數稱爲「the $n^{\rm th}$ cabtaxi number」, 記

作 $Ca(n)$。顯而易見 $Ca(n) \leq Ta(b)$。具體地來說, Dardis [4] 於 1994 年求得 $Ta(5)$。但卻在十年之後方得完全決定 $Ta(6)$: 1997 年 Wilson [4] 得 $Ta(6)$ 的一個上界

$$\begin{aligned} Ta(6) &\leq 8230545258248091551205888 \\ &= 2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^3 \cdot 31 \cdot 67^3 \cdot 79 \cdot 109^3 \end{aligned}$$

2002 年 Rathbun [4] 下修爲

$$\begin{aligned} Ta(6) &\leq 24153319581254312065344 \\ &= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 79^3 \cdot 97 \cdot 157 \end{aligned}$$

2003 年 Calude [4] 等人證明這個上界即爲 $Ta(6)$ 的機率大於 99%。最後由 Hollerbachu [4] 於 2008 年證明此數即爲 $Ta(6)$。

這個過程顯示, 決定 $Ta(n)$ 和 $Ca(n)$ 並非輕而易舉之事。它們的搜尋分別列爲「整數列線上百科」(On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS) 的 A011541 及 A047696 兩個問題。截至目前爲止, 已知的 $Ta(n)$ 和 $Ca(n)$ 如表 1 所示, $Ta(n)$ 之間和 $Ca(n)$ 之間的倍增關係如圖 1 所示。

表 1: 已知的 $Ta(n)$, $Ca(n)$

$Ta(n)$	$Ca(n)$
$Ta(1) = 2$	$Ca(1) = 1$
$Ta(2) = 7 \cdot 13 \cdot 19$	$Ca(2) = 7 \cdot 13$
$Ta(3) = 3^3 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 67 \cdot 223$	$Ca(3) = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$
$Ta(4) = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 127$	$Ca(4) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 37$
$Ta(5) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 157$	$Ca(5) = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 79$
$Ta(6) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 79^3 \cdot 97 \cdot 157$	$Ca(6) = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$
	$Ca(7) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$
	$Ca(8) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 19 \cdot 23^3 \cdot 31 \cdot 37$
	$Ca(9) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3$
	$Ca(10) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3$

若一數有 n 組雙正立方和 (或雙立方和) 表法, 即得此數爲 $Ta(n)$ (或 $Ca(n)$) 的上界。此上界有可能下修, 若要證實此數爲具有 n 組表法之數的最小值 (即爲 $Ta(n)$ 或 $Ca(n)$), 則需確認小於此上界的所有數值至多具有 $n-1$ 組表法。在 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 上界的搜尋進展上, Boyer 於 2008 年發表 $Ta(7), \ldots, Ta(19)$ 及 $Ca(11), \ldots, Ca(30)$ 的上界 [1]。根據 Boyer 網頁 [5] 的資料, Moore 下修 $Ca(11)$, $Ca(12)$, $Ca(14)$ 的上界, Boyer 及 Wroblewski 下修 $Ta(11), \ldots, Ta(19)$ 及 $Ca(13)$, $Ca(15), \ldots, Ca(30)$ 的上界, 並再給出 $Ta(20), \ldots, Ta(22)$ 及 $Ca(31), \ldots, Ca(42)$ 的上界。

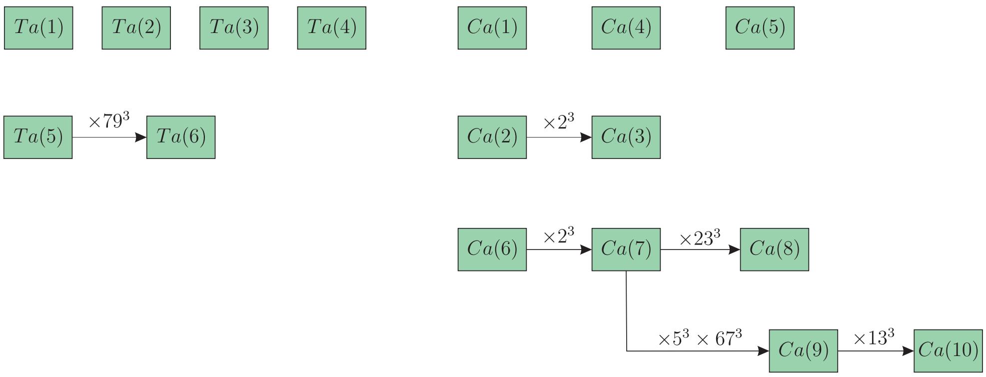

圖 1: 已知的 $Ta(n)$ 間和 $Ca(n)$ 間的倍增關係

本文藉著觀察滿足 $x_1^3+y_1^3=x_2^3+y_2^3$ 關係式的四個整數 x_1, y_1, x_2, y_2 之間的關係, 進而說明 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 表法的一些規律, 例如：$x+y\equiv a+b(\bmod 6)$ 的關係 (見引理一), 在搜尋 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 的上界時扮演重要的篩選條件。我們推測 $Ta(n)$, $n\geq 7$, 以及 $Ca(n)$, $n\geq 11$, 都是 18 的倍數 (見 3.3), 進而提供一組可用來篩選滿足 $S=a^3+b^3=x^3+y^3$ 關係的正整數解 (或整數解) x,y 的條件 (見定理二)。當 $S=a^3+b^3$ 爲 18 的倍數時, 我們提出了「Ta, Ca 篩選演算法」, 用來決定 $Ta(n)$ 及 $Ca(n)$ 的上界。根據這演算法所得 $Ca(n)$, $11\leq n\leq 16$ 的上界, 已於 2013 年 6 月收錄於 OEIS。以定理二所提供的篩選條件, 及 Boyer 所提供的 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 上界的雙立方和表法爲基礎, 我們修正 Ta, Ca 篩選演算法, 提供「局部篩選」的機制 (見第四節), 以求有效降低計算量。根據這項局部篩選演算法, 我們分別得到 $Ca(43)$, $\ldots$, $Ca(55)$, $Ta(23)$, $Ta(24)$ 的上界及其雙立方和表法 (見第五節), 其中 $Ca(43)$, $Ca(44)$ 及 $Ta(23)$ 的上界分別於 2014 年 8 月及 10 月收錄於 OEIS, 在 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 的搜尋道路上, 提供一個嶄新的進展。

二、$BTa(n)$ 之間和 $BCa(n)$ 之間的倍增關係

Wilson [3] 和 Boyer [1] 提出採用「倍增法(magnification technique)」來搜尋 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 的上界 (見2.1), 我們以倍增的方式臚列目前已知 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 的上界間的倍增關係 (見2.2), 並做進一步的分析 (見2.3)。

2.1. 倍增法

在搜尋 $Ta(n)$ 及 $Ca(n)$ 的歷程中,「倍增法」是一個常用且有效的方法, 它利用已知有 n 組雙立方和表法的數, 來搜尋有 $n+1$ 組表法的數 (見 Wilson [3] 和 Boyer [1])。

若 S 有 n 組雙立方和表法 $S=x_i^3+y_i^3$, $i=1,\ldots,n$, 將 S 乘上一個立方數 k^3, 不難得知 Sk^3 至少有 n 組表法 $Sk^3=(kx_i)^3+(ky_i)^3$, $i=1,\ldots,n$。若能找到一個 k, 使有第 $n+1$

組表法 $Sk^3=x_{n+1}^3+y_{n+1}^3$, $(x_{n+1},y_{n+1})\neq(x_i,y_i)$, $1\le i\le n$, 則 Sk^3 有 $n+1$ 組雙立方和表法, 因而提供 $Ta(n+1)$ 或 $Ca(n+1)$ 的上界。我們稱這樣的 k 爲 S 的一個「倍增數」。若同時使用 h 個倍增數, 有可能多出 h 組表法, 亦即: 若 S 有 n 組表法, 且 k_i, $i=1,\ldots,h$ 爲 S 的倍增數, 則 $S\cdot k_1^3\cdot k_2^3\cdots k_h^3$ 可能有 $n+h$ 組或更多的表法。例如: $Ta(6)$ 有 6 組表法, $101^3\cdot Ta(6)$ 及 $127^3\cdot Ta(6)$ 分別有 7 組表法, 得 $101^3\cdot 127^3\cdot Ta(6)$ 有 8 組表法。再例如: 當 $k=23,29,38,43$ 時, $k^3\cdot Ca(10)$ 分別有 11 組表法, 而 $23^3\cdot 29^3\cdot 38^3\cdot 43^3\cdot Ca(10)$ 有 14 組表法。根據定理二, 倍增法可以作進一步的推展 (見第三節)。

2.2. $BTa(n)$, $BCa(n)$ 間的倍增關係

目前已知 $Ta(n)$, $n=1,\ldots,6$, $Ca(n)$, $n=1,\ldots,10$ (見表一) 及 $Ta(n)$, $7\le n\le 22$, $Ca(n)$, $11\le n\le 42$ 等的上界, 將目前已知 $Ta(n)$ 及 $Ca(n)$ 的上界分別記爲 $BTa(n)$ 及 $BCa(n)$, 並且將已知由小至大第 k 個上界分別記爲 $BTa(n,k)$ 及 $BCa(n,k)$。我們以 $Ta(6)$ 及 $Ca(10)$ 的值爲基礎, 以「連續倍增」的方式表示比值 $BTa(n)/BTa(n-1)$ 及 $BCa(n)/BCa(n-1)$, 如表 2、表 3。

表 2: 相鄰 $BTa(n)$ 的比值

n	$BTa(n)/BTa(n-1)$
7	101^3
8	127^3
9	139^3
10	$13^3\cdot 29^3$
11	(1)
12	$3^3\cdot 19^3$
13	$3^3\cdot 61^3$
14	397^3
15	503^3
16	$2^3\cdot 607^3$
17	4261^3
18	$37^3\cdot 181^3$
19	$5^6\cdot 457^3\cdot 521^3/4261^3$
20	4261^3
21	$127^3\cdot 197^3$
22	$11^3\cdot 31^3\cdot 103^3$

表 3: 相鄰 $BCa(n)$ 的比值

n	$BCa(n)/BCa(n-1)$	n	$BCa(n)/BCa(n-1)$
11	(2)	27	5^6
12	19^3	28	$7^3\cdot 13^3\cdot 97^3/5^6\cdot 17^3$
13	(3)	29	17^3
14	(4)	30	5^6
15	(5)	31	29^3
16	19^3	32	43^3
17	$2^6\cdot 31^3/19^3$	33	181^3
18	19^3	34	193^3
19	(6)	35	$397^3\cdot 457^3/181^3\cdot 193^3$
20	(7)	36	181^3
21	(8)	37	$101^3\cdot 229^3/181^3$
22	$37^3/3^3$	38	181^3
23	3^3	39	163^3
24	17^3	40	193^3
25	$139^3/17^3$	41	223^3
26	17^3	42	307^3

上表中部分比值略顯複雜, 例如:

(1) $BTa(11)/BTa(10)=2^3{\cdot}5^3{\cdot}13^2{\cdot}17^3{\cdot}31{\cdot}37{\cdot}97^2{\cdot}109^3/19{\cdot}29^3{\cdot}101^3{\cdot}127^3$
(2) $BCa(11)/BCa(10)=2^4{\cdot}3^3{\cdot}37^2{\cdot}43{\cdot}61^3{\cdot}/5^3{\cdot}7{\cdot}13^2{\cdot}31{\cdot}67^2$
(3) $BCa(13)/BCa(12)=2^2{\cdot}3^3{\cdot}7{\cdot}13^3{\cdot}109{\cdot}193/19{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67$
(4) $BCa(14)/BCa(13)=2^4{\cdot}19{\cdot}31^3{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67/3^3{\cdot}7{\cdot}13^3{\cdot}109{\cdot}193$
(5) $BCa(15)/BCa(14)=3^3{\cdot}7{\cdot}13^3{\cdot}73^3{\cdot}109{\cdot}193/2^4{\cdot}19{\cdot}31^3{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67$
(6) $BCa(19)/BCa(18)=5^3{\cdot}11^3{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67^3{\cdot}109^2{\cdot}157/2^6{\cdot}13{\cdot}19^6{\cdot}31^2{\cdot}73^2{\cdot}193$
(7) $BCa(20)/BCa(19)=2^6{\cdot}5^3{\cdot}13{\cdot}19^3{\cdot}31^2{\cdot}73^2{\cdot}103^3{\cdot}193/11^3{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67^3{\cdot}109^2{\cdot}157$
(8) $BCa(21)/BCa(20)=11^3{\cdot}43{\cdot}61^2{\cdot}67^3{\cdot}79^3{\cdot}109^2{\cdot}157/2^6{\cdot}5^3{\cdot}13{\cdot}31^2{\cdot}37^2{\cdot}73^2{\cdot}103^3{\cdot}193$

然而, 在大多數的情形下, $BCa(n)$ 和 $BCa(n-1)$ 之間呈現簡單的倍增關係, 例如: $BCa(29)/BCa(28) = 17^3$, $BCa(31)/BCa(30) = 29^3$ 等, 如圖 2 所示。以倍增模式呈現 $Ta(5)$, $Ta(6)$, $BTa(7)$, ..., $BTa(22)$ 之關係, 及 $BCa(19)$, $BCa(21)$, ..., $BCa(42)$ 之關係, 見附錄圖 9、圖 10。

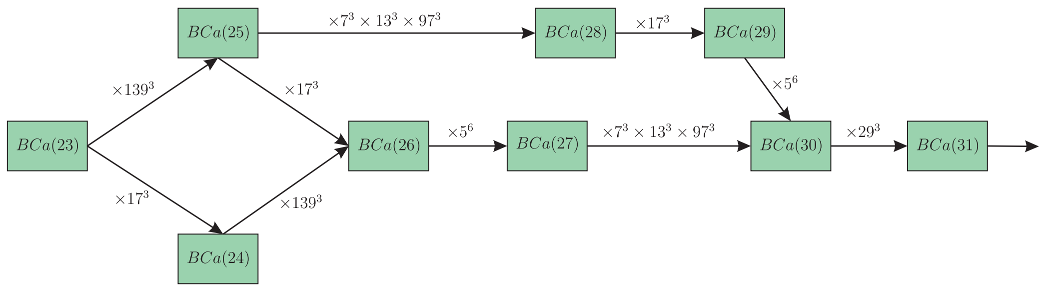

圖 2: $BCa(23)$, ..., $BCa(31)$ 之間的倍增關係

2.3. 連續倍增法的進一步分析

利用倍增法, 通常可由具有 n 組表法的最小數, 得到具有 $n+1$ 組表法的數。但有時由有 n 種表法的數之中稍大的數 $BTa(n,k)$ 或 $BCa(n,k)$, 利用連續倍增的模式, 因其倍增數較小, 也可能下修 $Ta(n+h)$ 或 $Ca(n+h)$ 的上界。

例一: 在已知有 9 組雙立方和表法的整數列裡, 由小而大

第 2 個爲 $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 73 \cdot 97 \cdot 139$, 記爲 $BCa(9,2)$,

第 3 個爲 $2^7 \cdot 3^6 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37^3 \cdot 43 \cdot 67$, 記爲 $BCa(9,3)$,

雖然 $BCa(9,3)$ 約爲 $BCa(9,2)$ 的 1.4 倍, 略大於 $BCa(9,2)$, 但 $61^3 < 13^3 \cdot 17^3$, 因此以 $BCa(9,3)$ 及其倍增數, 反能下修 $Ca(11)$ 的上界。

$$Ca(11) \leq BCa(11) = 61^3 \cdot BCa(9,3) < 13^3 \cdot 17^3 \cdot BCa(9,2)。$$

目前已知的上界中, 與 $BCa(9,3)$ 有關的 $BCa(n)$ 如圖 3 所示。

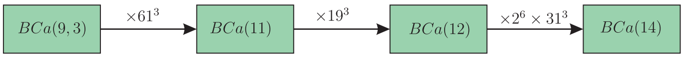

圖 3: 與 $BCa(9,3)$ 有關的 $BCa(n)$

例二: 在已知有 10 組雙立方和表法的整數列裡, 由小而大, 第 5 個爲

$$2^9 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13^4 \cdot 19^3 \cdot 61 \cdot 109 \cdot 193, \quad \text{記爲 } BCa(10,5).$$

與 $BCa(10,5)$ 有關的上界如圖 4 所示。

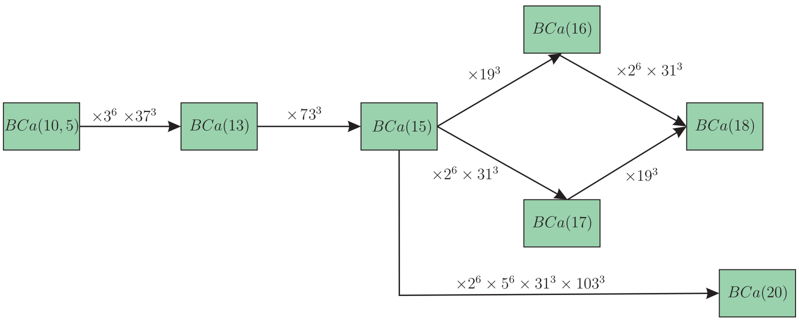

圖 4: 與 $BCa(10,5)$ 有關的 $BCa(n)$

三、整數雙立方和參數表法的探索

在這一節裡, 我們將先進行一項實驗, 根據實驗的數據發現整數立方和表法間的一些關係, 接著予以證明。

3.1. 整數雙立方和表法之間的關係

首先觀察滿足 $S=x_1^3+y_1^3=x_2^3+y_2^3$ 關係式的四個整數 x_1, y_1, x_2, y_2 之間的關係, 並設 $s=x_2-x_1\geq 0$, $t=y_1-y_2\geq 0$, 所得數據節錄如表 4 所示。我們首先注意到表中 $(x_1+y_1)-(x_2+y_2)$ 之值皆爲 6 的倍數。

我們將在引理一證明前述 $(x_1+y_1)-(x_2+y_2)$ 之值皆爲 6 的倍數性質, 在搜尋 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 時, 多提供了一個篩選條件。

引理一: 若 x_1, y_1, x_2, y_2 爲整數且 $x_1^3+y_1^3=x_2^3+y_2^3$, 則 $x_1+y_1\equiv x_2+y_2 (\mathrm{mod}\, 6)$。

證明: 因爲 $a^3-a=(a-1)a(a+1)$ 爲三個連續整數之積, 故必爲 6 之倍數, 即得 $a^3\equiv a (\mathrm{mod}\, 6)$ 對所有整數 a 皆成立。所以等式 $x_1^3+y_1^3=x_2^3+y_2^3$ 在模 6 之下立得 $x_1+y_1\equiv x_2+y_2 (\mathrm{mod}\, 6)$。證畢。

表 4: 滿足 $S = x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3$ 的整數解

S	x_1	x_2	y_1	y_2	$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)$
1729	10	9	12	1	6
4104	15	9	16	2	6
20683	24	19	27	10	6
39312	33	15	34	2	12
40033	33	16	34	9	6
65728	33	31	40	12	12
64232	36	26	39	17	6
134379	43	38	51	12	18
149389	50	29	53	8	18
171288	54	24	55	17	6

根據引理一, $Ta(n)$, $Ca(n)$ 的 n 組雙立方和表法 $x_i^3+y_i^3$, $1\le i\le n$, 滿足一些規律性, 並且根據觀察 $Ta(n)$, $4\le n\le 6$, $BTa(n)$, $7\le n\le 22$, $Ca(n)$, $7\le n\le 10$, 以及 $BCa(n)$, $11\le n\le 42$ 各組表法之和, 分別為 $x_i+y_i\equiv 0(\bmod 6)$, $i=1,2,\ldots,n$。另外, 當 $6\mid a+b$ 時, 由 $a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)$, 得 $18\mid a^3+b^3$。我們據以推測 $Ta(n)$, $n\ge 7$ 以及 $Ca(n)$, $n\ge 11$ 等都是 18 之倍數。

另一個支持上述推測的理由來自於倍增法。當我們從某一個為 6 的倍數的 $BTa(n)$, $BCa(n)$ 出發, 經過倍增法得到的較高階的 $BTa(n)$, $BCa(n)$ 也為 6 的倍數。此外, 因為 $Ta(n)$, $Ca(n)$ 為有相同表法數之中最小的數值, 故出現較小之質因數 2, 3 的機率很大。

3.2. 整數各組雙立方和的參數表法

我們在定理二提供各組雙立方和表法的單一參數表示法, 作為第四節提出篩選演算法的基礎。當 S 為 18 的倍數時, 我們據此寫成「Ta, Ca 篩選演算法」(見第四節)。

已知 $S=a^3+b^3$, $a\ge b$ 為正整數, 我們試著從演算法的角度, 考慮如何篩選合於 $S=a^3+b^3=x^3+y^3$ 關係的正整數 $x\ge y$。首先, 我們引進一個參數 $k=x+y$, 亦即要針對合適的 k 來求解方程式組:

$$\begin{cases} x+y=k, \\ x^3+y^3=S. \end{cases}$$

如此一來, 可將 x,y 表示為 k (和 S) 的函數。因為 $y=k-x$, 代入得 $x^3+(k-x)^3=S$, 展開化簡得 $3x^2-3kx+(k^3-S)/k=0$。因此,

$$x=(3k+\sqrt{(3k)^2-4\cdot 3\cdot (k^3-S)/k})/6,$$
$$y=(3k-\sqrt{(3k)^2-4\cdot 3\cdot (k^3-S)/k})/6。$$

x, y 為正有理數的充要條件是根號裡的數為非負完全平方, 即 $-3k^2+12S/k\ge 0$ 為完全平

方。因爲 $-3k^2+12S/k\geq 0$ 及 $k^3=(x+y)^3>x^3+y^3=S$, 得 $\sqrt[3]{S}<k\leq\sqrt[3]{4S}$。若令 $k=x+y=6r$ 代入前一段中得到的 $x=(3k+\sqrt{(3k)^2-4\cdot 3\cdot(k^3-S)/k})/6$, $y=(3k-\sqrt{(3k)^2-4\cdot 3\cdot(k^3-S)/k})/6$ 即可得出

$$x=3r+\sqrt{-3r^2+(S/18r)},$$
$$y=3r-\sqrt{-3r^2+(S/18r)}。$$

x,y 爲正整數的充要條件是 $-3r^2+S/18r$ 爲完全平方, 並且因 $-3r^2+S/18r\geq 0$ 及 $(6r)^3=(x+y)^3>x^3+y^3=S$, 得 $\sqrt[3]{S/216}<r\leq\sqrt[3]{S/54}$。總結以上的推演如下:

定理二: 若 $S=x^3+y^3$, $x+y=k$ 且 $x\geq y$, 則

$$x=\frac{3k+\sqrt{-3k^2+12S/k}}{6},\qquad y=\frac{3k-\sqrt{-3k^2+12S/k}}{6}。$$

(1) $x=\dfrac{3k+\sqrt{-3k^2+12S/k}}{6}$, $y=\dfrac{3k-\sqrt{-3k^2+12S/k}}{6}$ 均爲正有理數, 若且唯若 $k\mid S$, $\sqrt[3]{S}<k\leq\sqrt[3]{4S}$, 且 $-3k^2+12S/k$ 爲完全平方數。

(2) 當 $k=6r$ 時, $x=3r+\sqrt{-3r^2+(S/18r)}$, $y=3r-\sqrt{-3r^2+(S/18r)}$ 爲正整數, 若且唯若 $18\mid S$, $r\mid S/18$, $\sqrt[3]{S/216}<r\leq\sqrt[3]{S/54}$ 且 $-3r^2+(S/18r)$ 爲完全平方數。

在定理二 (1), (2) 的三個篩選條件中, 以第三個「完全平方數」的條件最爲關鍵, 見第四節的討論。若有 $r=r_1,r_2,\ldots,r_n$ 等 n 個 r 值通過篩選, 則參數函數

$$r_1\to(x_i,y_i)=(x(r_i),y(r_i))$$

提供 S 的 n 組雙立方和表法 $S=x(r_i)^3+y(r_i)^3$, $1\leq i\leq n$。因此, 根據定理二 (2), 我們將「倍增法」(見2.1) 修正爲: 若 S 爲 18 的倍數且 S 有 n 組雙立方和表法, 若能選到 k 及對應的 r_{n+1}, 滿足 $-3r_{n+1}^2+(Sk^3/18r_{n+1})$ 爲完全平方數的條件, 則 Sk^3 有第 $n+1$ 組雙立方和表法。

四、Ta, Ca 篩選演算法及局部篩選演算法

在這一節裡, 我們將以定理二 (2) 的參數函數表法作爲篩選的基礎, 提供 Ta, Ca 篩選演算法 (見4.1)。由此演算法所得 $Ca(n)$, $n=11,\ldots,16$ 的上界及其表法, 已收錄於 $OEIS$ (見4.2)。爲降低計算的負擔, 我們根據 $BTa(n)$, $BCa(n)$ 之參數 r 的特性, 修正提出「局部篩選演算法」(見4.3)。根據局部篩選演算法所得結果的分析見 4.4。

4.1. Ta, Ca 篩選演算法

若令 $S = Ta(n)$ (或 $Ca(n)$), 定理二 (2) 中關於 r 值的三個條件, 可用以篩選出滿足 $Sk^3 = x^3 + y^3$ 關係的 (x, y) 所對應的參數 r 值, 進一步由參數函數 $r_i \to (x(r_i), y(r_i))$ 得雙立方和表法, 以此爲基礎, 我們提供了一個篩選演算法如下。其中, 用 counter 來計次, 表示已經搜尋到多少個參數 r 值。

Ta 篩選演算法:

1. 輸入 $S = a^3 + b^3$, k, 令 $counter = 0$.
2. 對 $Sk^3/18$ 作質因數分解, 列出 $Sk^3/18$ 的所有正因數: $r_1 < r_2 < \cdots < r_t$.
3. 令 i 由 1 至 t,

   若 $\sqrt[3]{Sk^3/216} < r_i < \sqrt[3]{Sk^3/54}$,

   若 $-3r_i^2 + Sk^3/18r_i$ 爲完全平方數,

   輸出 r_i, 以及 $x = 3r_i + \sqrt{-3r_i^2 + Sk^3/18r_i}$, $y = 3r_i - \sqrt{-3r_i^2 + Sk^3/18r_i}$,

   $counter \leftarrow counter+1$, $i \leftarrow i+1$, 回到 3

   不然, $i \leftarrow i+1$, 回到 3

   不然, $i \leftarrow i+1$, 回到 3
4. 輸出 $counter$。

若將 Ta 篩選演算法之 $\sqrt[3]{Sk^3/216} < r \leq \sqrt[3]{Sk^3/54}$ 修正爲 $0 < r \leq \sqrt[3]{Sk^3/54}$, 則可求得滿足 $Sk^3 = k^3(a^3 + b^3) = x^3 + y^3$ 的整數解 (x, y) 所對應的參數 r 值, 即得「Ca 篩選演算法」。利用前述演算法, 雖然無法立即證明所得的數即爲 Ca (counter), Ta (counter), 但可以求得相關上界。值得注意的是通常當 k 爲質數時, 較容易得到 counter 增加的情況。我們以 $Ta(6)$ 以及 $k = 101$爲例, 說明前述演算法。

例四: 以

$$S = Ta(6) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 79^3 \cdot 97 \cdot 157, \quad k = 101$$

爲例, Sk^3 有 $143,360$ 個正因數, $Sk^3/18$ 有 61,440 個正因數, 其中有 629 個正因數介於 $\sqrt[3]{Sk^3/216}$, $\sqrt[3]{Sk^3/54}$, 之間, 最後僅有 7 個 r 滿足 $-3r^2 + Sk^3/18r$ 爲平方數的條件。根據 Ta 篩選演算法, 得 7 組雙立方和表示, 因此 $Ta(7) \leq 101^3 \cdot Ta(6)$。

4.2. Ca 篩選演算法所得結果的分析

根據「Ca 篩選演算法」, 我們得到若干 $Ca(n)$ 的上界。令 $S = Ca(10)$, 當 $k = 23$, 29, 38, 43, 46 時, 分別得 counter $= 11$, 經驗證得

$23^3 \cdot Ca(10)$ 有 11 組雙立方和表示法, 爲 $Ca(11)$ 之上界,

$23^3 \cdot 29^3 \cdot Ca(10)$ 有 12 組雙立方和表法,

$23^3 \cdot 29^3 \cdot 38^3 \cdot Ca(10)$ 有 13 組雙立方和表法,

$23^3 \cdot 29^3 \cdot 38^3 \cdot 43^3 \cdot Ca(10)$ 有 14 組雙立方和表法,

前述得到 $Ca(12)$, $Ca(13)$, $Ca(14)$ 等的上界, 可由選擇不同的倍增數 k 予以下修。令 $S = Ca(10)$, 考慮 $k = 127$ 爲小於乘積 23×29 的質數時, 得 counter $= 12$, 即 $127^3 \cdot Ca(10)$ 也有 12 組表法, 下修 $Ca(12)$ 的上界。令 $S = 127^3 \cdot Ca(10)$, 利用相同的方法得

$29^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10)$ 有 13 組雙立方和表示法, 爲 $Ca(13)$ 之上界

$29^3 \cdot 43^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10)$ 有 14 組雙立方和表示法, 爲 $Ca(14)$ 之上界

$23^3 \cdot 29^3 \cdot 38^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10)$ 有 15 組雙立方和表示法, 爲 $Ca(15)$ 之上界

$23^3 \cdot 29^3 \cdot 38^3 \cdot 43^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10)$ 有 16 組雙立方和表示法, 爲 $Ca(16)$ 之上界。

以 $Ca(10)$ 爲基礎, 透過倍增的方式, 我們分別給出 $Ca(11), \ldots, Ca(16)$ 的上界, 這些上界以有系統的方式求得, 雖不若 $BCa(n)$, $11 \le n \le 16$, 亦於 2013 年 6 月收錄於 *OEIS*。

定理三:

$$\begin{aligned}
Ca(11) &\le 23^3 \cdot Ca(10) \\
&= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 23^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3 \\
&= 113582367319926391229070000,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ca(12) &\le 127^3 \cdot Ca(10) \\
&= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3 \cdot 127^3 \\
&= 19122231471841274023586430000,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ca(13) &\le 29^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10) \\
&= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 29^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3 \cdot 127^3 \\
&= 466372103366736832161249441270000,
\end{aligned}$$

$$Ca(14) \le 29^3 \cdot 43^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 29^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43^3 \cdot 67^3 \cdot 127^3 \\
&= 3707984682237914531464445932705389000, \\
Ca(15) &\le 2^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10) \\
&= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67^3 \cdot 127^3 \\
&= 311362899270616911889101749346417642480000, \\
Ca(16) &\le 2^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 43^3 \cdot 127^3 \cdot Ca(10) \\
&= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43^3 \cdot 67^3 \cdot 127^3 \\
&= 24755530032308938813566812785285627500065736000.
\end{aligned}
$$

前述以 $Ca(10)$ 乘以適當倍增數而得到 $Ca(11)$, $\ldots$, $Ca(16)$ 的上界的現象, 亦可見於 $BCa(30)$ 乘以適當立方數而得到 $BCa(31)$, $BCa(32)$, $BCa(35)$, $BCa(37)$, $\ldots$, $BCa(42)$, 見 5.1, 及自 $BCa(42)$ 乘以適當立方數而得到 $Ca(43)$, $Ca(44)$, $\ldots$, $Ca(55)$ 的上界 (分別表爲 $SCa(43)$, $SCa(44)$, $\ldots$, $SCa(55)$, 見 5.2), 及自 $BTa(22)$ 乘以適當立方數而得到 $Ta(23)$, $Ta(24)$ 的上界 (分別表爲 $STa(23)$, $STa(24)$, 見 5.3)。

4.3. 局部篩選演算法

如上所述, 根據「Ca 篩選演算法」, 對於較小的 n, 不難得到其 n 組雙立方和表法。然而隨著 n 的增加, Ta, Ca 篩選演算法所需的運算時間呈指數成長, 對上界的探索極爲不利。我們修正原有的 Ta, Ca 篩選演算法, 得到「局部篩選演算法」。

利用「倍增法」搜尋具有 $n+1$ 組表法的 $S = k^3 \cdot BCa(n)$ 時, 即搜尋 $Ca(n+1)$ 的上界時, 關鍵在於找到與 $BCa(n)$ 各參數的 k 倍不同, 稱爲「新增解」的第 $n+1$ 個參數 r_{n+1}。因此, 局部篩選演算法中並無 counter 之參數。以下分別說明「局部篩選演算法」兩個用以降低計算時間的方法。

首先, 使用 Ca 篩選演算法時, 在計算出所有 $S/18$ 的因數 r 後, 針對小於 $\sqrt[3]{S/54}$ 的 r 值進行後續篩檢, 這種方法需要大量大數值的計算。在使用局部篩選演算法搜尋新增解時, 我們以參數之指數和的範圍來取代參數 r 本身的範圍, 僅算出指數和落在指定區間的參數 r, 進行後續篩選。說明如下： 已知 $r_i = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\beta_{i,j}}$, $1 \le i \le n$ 爲 $BCa(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$ 之 n 組雙立方和表法所對應的參數, 計算各參數之指數的和 $a_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{i,j}$, $1 \le i \le n$, 並設定 L, U 爲滿足 $L \le a_i \le U$, $1 \le i \le n$, 的兩正整數。不難得知 $S = k^3 \cdot BCa(n)$ 已有 n 個參數 $kr_i = k \cdot \prod_{j=1}^{m} p_j^{\beta_{i,j}}$, $1 \le i \le n$, 其指數和的範圍介於 $L+1$, $U+1$ 之間, 我們據以推測新增解 r_{n+1} 之指數和的範圍亦介於 $L+1$, $U+1$ 之間。

此外, 在原來的篩選演算法中, 針對所有合於 $0 \le \beta_1 \le \alpha_1 - 1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2 - 2$ (因爲 r 爲 $S/18$ 的因數), $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, $i = 3, \ldots, m$, $0 \le \beta_{m+1} \le 3$ 關係的每一個序對 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1})$, 就 $r = k^{\beta_{m+1}} \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$ 檢查相關運算後是否爲完全平方。「局部篩選演算」則進一步縮小各個 β_i 的選取範圍。我們歸納出諸 $BCa(n)$, $BTa(n)$ 新增解 $r_{n+1} = k^{\beta_{m+1}} \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$ 的標準分解式的若干規律, 如: $0 \le \beta_i \le \alpha_i/2$, $i = 3, \ldots, m$, 以及 $\beta_{m+1} = 0, 3$。對於每個 β_i, $i = 3, \ldots, m$, 僅搜尋 $0 \le \beta_i \le \alpha_i/2$, 排除了大約一半的可能性。因此, 搜尋的次數遽降爲全部 (海選) 搜尋的 $1/2^{m-1}$ (m 爲 $BCa(n)$ 的質因數個數)。

局部篩選演算法:

1. 輸入質數 p_i, 非負整數 α_i, $i = 1, \ldots, m$, 其中 $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ $\left(BCa(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}\right)$, k $\left(\text{倍增數}, S = k^3 \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}\right)$ 及 L, U (指數和的篩選區間)。
2. 輸入 β_i, $i = 1, \ldots, m+1$, 其中 $0 \le \beta_1 \le \alpha_1 - 1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2 - 2$, $0 \le \beta_i \le \alpha_i/2$, $i = 3, \ldots, m$, $\beta_{m+1} = 0, 3$. (篩選對象)
3. 對每一個序對 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1})$, 令 $r = k^{\beta_{m+1}} \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i}$, $a = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i$,

   若 $L \le a \le U$,

     若 $-3r^2 + S/18r$ 爲完全平方數,

       輸出 r, 以及 $x = 3r + \sqrt{-3r^2 + S/18r}$, $y = 3r - \sqrt{-3r^2 + S/18r}$,

       回到 3,

     不然, 回到3,

   不然, 回到3.

利用「局部篩選演算」進行上界搜尋時, L, U 及 β_i 的設定具有關鍵影響, 固可避免大量的大數值計算, 但亦需承擔漏失「搜尋標的」的風險。然而考慮排除這些可能性後所得到計算上的效益, 卻極爲值得。

4.4. 局部篩選演算法所得結果的分析

文獻顯示 Boyer 在 2008 年求得 $Ta(22)$ 及 $Ca(42)$ 的具體上界, 但未見其對應的雙立方和表法。本節以 $BCa(23)$ 的 23 個 r 值爲基礎, 分別給出 $BCa(24)$, $BCa(25)$, $BCa(26)$ 的 r_i 值, 提供具體說明並進而討論 r 值的結構。至於 $Ca(30), \ldots, Ca(42)$ 上界的搜尋及其參數 r 值的結構, 見第五節。$BCa(42)$ 的 42 個參數見 5.1, $BTa(22)$ 的 22 個參數, 見附錄表七。

令 $BCa(23)$ 的 23 組表法爲 r_i, $i=1,\ldots,23$, 因爲

$$\begin{aligned}BCa(24) &= 17^3 \cdot BCa(23)\\ &= 2^9\cdot 3^9\cdot 5^3\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^3\cdot \underline{\underline{17^3}}\cdot 19^3\cdot 31^1\cdot 37^4\cdot 43^1\cdot 61^3\cdot 67^3\cdot 73^1\cdot 79^3\cdot 109^3\cdot 157^1\end{aligned}$$

對應的參數 r 值爲 $17\cdot r_i$, $i=1,\ldots,23$, 另有新增解 r_{24}:

$$r_{24} = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^3\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot 157^0$$

爲 17^3 的倍數, 其它 r 值雖爲 17 的倍數, 但不爲 17^3 的倍數。

$$\begin{aligned}BCa(25) &= 139^3 \cdot BCa(23)\\ &= 2^9\cdot 3^9\cdot 5^3\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^3\cdot 19^3\cdot 31^1\cdot 37^4\cdot 43^1\cdot 61^3\cdot 67^3\cdot 73^1\cdot 79^3\cdot 109^3\cdot 139^3\cdot 157^1\end{aligned}$$

對應的參數 r值爲 $139\cdot r_i$, $i=1,\ldots,23$, 另有新增解 r'_{24} 及 r'_{25}:

$$\begin{aligned}r'_{24} &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot \underline{\underline{139^0}}\cdot 157^0\\ r'_{25} &= 2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot \underline{\underline{139^0}}\cdot 157^0\end{aligned}$$

前 23 個 r 值爲 139 的倍數, 但 r'_{24} 及 r'_{25} 皆不爲 139 的倍數。

$BCa(26) = 17^3\cdot 139^3\cdot BCa(23) = 139^3\cdot BCa(24) = 17^3\cdot BCa(25)$

對應的 r 值爲 $17\cdot 139\cdot r_i$, $i=1,\ldots,23$, 另有新增解:

a. $BCa(26) = 139^3\cdot BCa(24)$, 由 $BCa(24)$ 的新增解 r_{24}, 得出 $BCa(26)$ 的一個表法:

$$139\cdot r_{24} = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^3\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0$$

b. $BCa(26)=17^3\cdot BCa(25)$, 由 $BCa(25)$的新增解 r'_{24}及r'_{25}, 得 $BCa(26)$ 的二個表法:

$$\begin{aligned}17\cdot r'_{24} &= 2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot 139^0\cdot 157^0\\ 17\cdot r'_{25} &= 2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 109^1\cdot 139^0\cdot 157^0\end{aligned}$$

$BCa(23)$, $BCa(24)$, $BCa(25)$, $BCa(26)$ 之間的倍增關係, 可歸納如圖 5 所示。

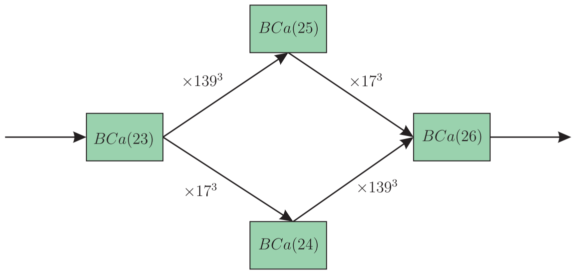

圖 5: $BCa(23)$, $BCa(24)$, $BCa(25)$, $BCa(26)$ 之間的倍增關係

值得注意的是, $BCa(15)$, $BCa(16)$, $BCa(17)$, $BCa(18)$ 之間以及 $BCa(35)$, $BCa(36)$, $BCa(37)$, $BCa(38)$ 之間有相類似的倍增關係。

五、$Ca(43),\ldots,Ca(55)$ 上界的搜尋

$BCa(42)$ 有 29 個質因數, 利用倍增法, 以 $BCa(42)$ 來求 $Ca(43)$ 之上界時, 所涉及的計算量太大 ($\geq 2^{29}$), 所需要的時間太長, 於是我們嘗試改用只有 19 個質因數的 $BCa(30)$ 來搜尋 $Ca(n)$, $n\geq 43$, 的上界。

5.1. $BCa(42)$ 的完整 42 組雙立方和表法

利用「局部篩選演算法」, 找到

$$BCa(30)=2^9\cdot 3^9\cdot 5^9\cdot 7^7\cdot 11^3\cdot 13^6\cdot 17^3\cdot 19^3\cdot 31^1\cdot 37^4\cdot 43^1\cdot 61^3\cdot 67^3\cdot 73^1\cdot 79^3\cdot 97^3\cdot 109^3\cdot 139^3\cdot 157^1,$$

的 30 個 r 值如下, 進而提供 $BCa(30)$ 的完整 30 組雙立方和表法。

$$r_1=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_1=23,$$
$$r_2=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^0\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_2=22,$$
$$r_3=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^0\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^1,\ a_3=23,$$
$$r_4=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^3\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^1\cdot 79^0\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_4=23,$$
$$r_5=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^4\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^2\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^0\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_5=24,$$
$$r_6=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^0\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_6=21,$$
$$r_7=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_7=23,$$
$$r_8=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^0\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^1,\ a_8=23,$$
$$r_9=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^3\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_9=24,$$
$$r_{10}=2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^5\cdot 11^1\cdot 13^4\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^0\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^0,\ a_{10}=22,$$
$$r_{11}=2^2\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^0\cdot 139^1\cdot 157^1,\ a_{11}=24,$$
$$r_{12}=2^2\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^0,\cdot 157^0,\ a_{12}=25,$$
$$r_{13}=2^2\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^1,\ a_{13}=23,$$
$$r_{14}=2^2\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 67^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^0\cdot 109^1\cdot 139^1\cdot 157^1,\ a_{14}=24,$$

$$r_{15}=2^2\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^1\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^1\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^0\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{15}=24,$$
$$r_{16}=2^2\cdot3^3\cdot5^9\cdot7^1\cdot11^1\cdot13^1\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^2\cdot43^1\cdot61^1\cdot67^0\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^0,\cdot157^0,\ a_{16}=26,$$
$$r_{17}=2^2\cdot3^5\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^0\cdot31^1\cdot37^2\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{17}=25,$$
$$r_{18}=2^2\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^0\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^2\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^3\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{18}=22,$$
$$r_{19}=2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^1\cdot13^1\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^1\cdot37^2\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{19}=25,$$
$$r_{20}=2^4\cdot3^2\cdot5^5\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^1\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^1\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^0,\cdot157^0,\ a_{20}=26,$$
$$r_{21}=2^4\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^1\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^1\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^3\cdot97^1\cdot109^0\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{21}=25,$$
$$r_{22}=2^4\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^1\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{22}=25,$$
$$r_{23}=2^4\cdot3^3\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^1\cdot13^1\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^2\cdot43^0\cdot61^0\cdot67^1\cdot73^1\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{23}=25,$$
$$r_{24}=2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^3\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^0\cdot61^0\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^1,\ a_{24}=25,$$
$$r_{25}=2^6\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^1\cdot37^1\cdot43^1\cdot61^0\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{25}=26,$$
$$r_{26}=2^6\cdot3^7\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^1\cdot37^1\cdot43^0\cdot61^0\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{26}=30,$$
$$r_{27}=2^6\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^1\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{27}=26,$$
$$r_{28}=2^8\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^3\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^2\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^0\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{28}=28,$$
$$r_{29}=2^8\cdot3^2\cdot5^5\cdot7^2\cdot11^1\cdot13^2\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^0\cdot79^1\cdot97^1\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{29}=29,$$
$$r_{30}=2^8\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^0\cdot11^1\cdot13^4\cdot17^1\cdot19^1\cdot31^0\cdot37^1\cdot43^0\cdot61^1\cdot67^1\cdot73^1\cdot79^1\cdot97^0\cdot109^1\cdot139^1\cdot157^0,\ a_{30}=27,$$

上述結果顯示所有的 a_i 皆滿足 $21 \leq a_i \leq 30$。接下來將給出 $BCa(31)$, $BCa(32)$, $BCa(35)$, $BCa(37), \ldots, BCa(42)$ 的對應參數 r 值, 它們之間的倍增關係如圖 6 所示。

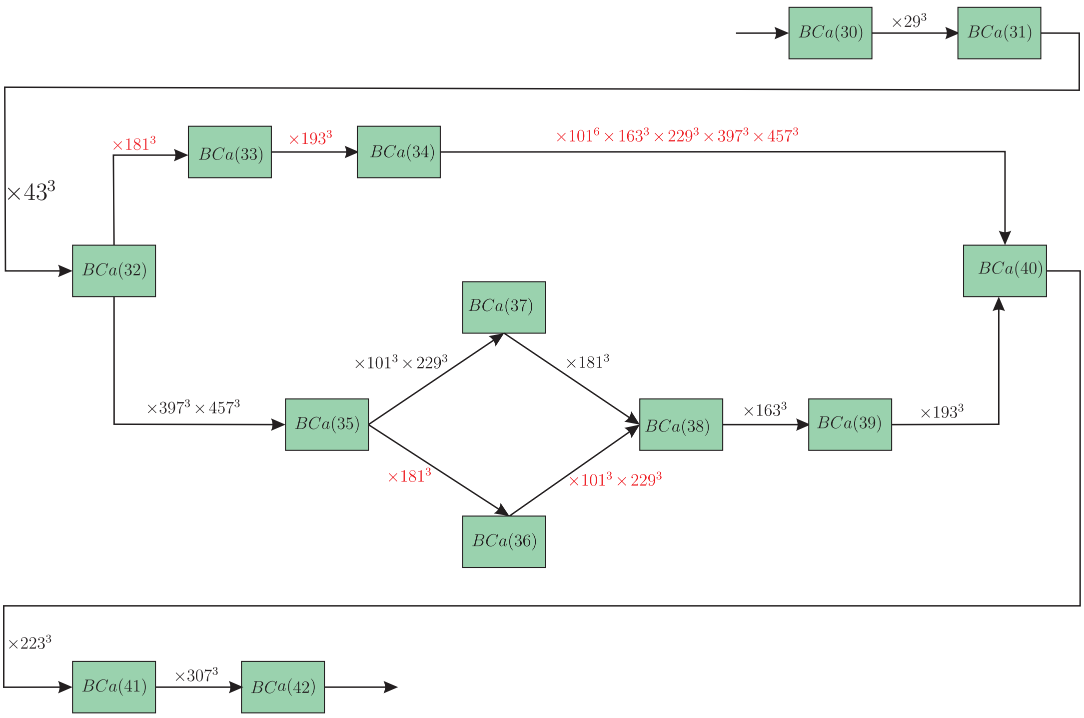

圖 6: $BCa(30)$, $BCa(31)$, $BCa(32)$, $BCa(35)$, $BCa(37), \ldots, BCa(42)$ 的關係

$BCa(31) = 29^3 \cdot BCa(30)$, 得 $BCa(31)$ 的新增解爲

$$r_{31} = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}5^3{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}\underline{\underline{29^3}}{\cdot}37{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139$$

$BCa(32) = 43^3 \cdot BCa(31)$, 得 $BCa(32)$ 的新增解爲

$$r_{32} = 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5^5{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29^3{\cdot}37{\cdot}\underline{\underline{43^0}}{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139$$

$BCa(35) = 397^3 \cdot 457^3 \cdot BCa(32)$, 得 $BCa(35)$ 的新增解爲

$$r_{33} = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}5^9{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}73{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}\underline{\underline{397^1{\cdot}457^0}},$$
$$r_{34} = 2^2{\cdot}3^5{\cdot}5^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}31{\cdot}37{\cdot}43^2{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}\underline{\underline{397^0{\cdot}457^1}},$$
$$r_{35} = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5^7{\cdot}7^3{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}31{\cdot}37^2{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}\underline{\underline{397^0{\cdot}457^0}}.$$

$BCa(37) = 101^3 \cdot 229^3 \cdot BCa(35)$, 得 $BCa(37)$ 的新增解爲

$$r_{36} = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5^3{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}\underline{\underline{101^3}}{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}\underline{\underline{229^0}}{\cdot}397{\cdot}457,$$
$$r_{37} = 2^6{\cdot}3^3{\cdot}5^3{\cdot}7^5{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37^2{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}73{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}\underline{\underline{101^1}}{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}\underline{\underline{229^0}}{\cdot}457.$$

$BCa(38) = 181^3 \cdot BCa(37)$, 得 $BCa(38)$ 的新增解爲

$$r_{38} = 2^2{\cdot}3^5{\cdot}5^5{\cdot}7^3{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}31{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}73{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}\underline{\underline{181^0}}{\cdot}229{\cdot}397{\cdot}457.$$

$BCa(39) = 163^3 \cdot BCa(38)$, 得 $BCa(39)$ 的新增解爲

$$r_{39} = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}5^3{\cdot}7^5{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}\underline{\underline{163^3}}{\cdot}229{\cdot}457.$$

$BCa(40) = 193^3 \cdot BCa(39)$, 得 $BCa(40)$ 的新增解爲

$$r_{40} = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}5^3{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43^2{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}163{\cdot}181{\cdot}\underline{\underline{193^0}}{\cdot}229{\cdot}397{\cdot}457.$$

$BCa(41) = 223^3 \cdot BCa(40)$, 得 $BCa(41)$ 的新增解爲

$$r_{41} = 2^6{\cdot}3^3{\cdot}5^3{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}163{\cdot}181{\cdot}193{\cdot}\underline{\underline{223^0}}{\cdot}229{\cdot}397{\cdot}457.$$

$BCa(42) = 307^3 \cdot BCa(41)$, 得 $BCa(42)$ 的新增解爲

$$r_{42} = 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5^3{\cdot}7^2{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}29{\cdot}37{\cdot}43{\cdot}61{\cdot}67{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}101{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}163{\cdot}181{\cdot}193{\cdot}223{\cdot}\underline{\underline{307^3}}{\cdot}397{\cdot}457.$$

5.2. $Ca(43), \ldots, Ca(55)$ 上界

本節以 $BCa(30)$ 的 30 個參數 r 值以及 $BCa(42)$ 的 42 個參數 r 值 (見5.1) 爲基礎, 來搜尋 $Ca(n)$, $n \geq 43$, 的上界, 並將因此得到的 $Ca(n)$ 的上界分別記爲 $SCa(n)$, $43 \leq n \leq 55$。我們分別說明

(1) 用「局部篩選演算法」, 求得 $BCa(30)$ 的倍增數,

(2) 利用 $BCa(30)$ 的倍增數及 $BCa(42)=Q^3$, $BCa(30)$的倍增關係, 得到 $Ca(43)$ 的上界。

先說明如何用「局部篩選演算法」求得整數 k, 使得 $k^3 \cdot BCa(30)$ 有新增解 R。令 $BCa(30) = \prod_{i=1}^{19} p_i^{\alpha_i}$, 將其 30 個 r 值分別以 $\prod_{i=1}^{19} p_i^{\beta_i}$ 表示, 諸 β_i, $i = 1, \ldots, 19$, 之值整理如表 5。

表 5: $BCa(30)$ 的參數 r 之可能 β_i 值

p_i	2	3	5	7	11	13	17	19	31	37	43	61	67	73	79	97	109	139	157
可 能 β_i 值	2 4 6 8	2 3 5 7	3 5 9	0 1 2 3 5	1 3	1 2 4	1 3	0 1	0 1	0 1 2	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 3	0 1 3	0 1	0 1	0 1

分別計算 $BCa(30)$ 的 30 個 r 值之 $r_j = \prod_{i=1}^{19} p_i^{\beta_{i,j}}$ 表法中的指數和 $\sum_{i=1}^{19} \beta_{i,j}$ 均介於 21 與 30 之間。因此, 我們設定 $L = 22$, $U = 31$。利用局部篩選演算法, 僅針對上表可能 $\beta_1, \ldots, \beta_{19}$ 值及 $\beta_{20} = 0$ 或 3 的序對 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1})$, 當 $22 \le \sum_{i=1}^{20} \beta_i \le 31$ 時, 計算得 $r = k^{\beta_{20}} \cdot \prod_{i=1}^{19} p_i^{\beta_i}$, 若再得 $-3r^2 + k^3 \cdot BCa(30)/18r$ 爲完全平方數, 則此 r 即爲 $k^3 \cdot BCa(30)$ 的新增解 R。我們求得 $BCa(30)$ 的若干「倍增數 (質數或兩質數積)」及其對應新增解如表 6:

表 6: $BCa(30)$ 之倍增數及對應新增解

i	倍增數 k_i	新增解 R
1	487	$2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^0 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0$
2	503	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^0 \cdot 31^0 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0 \cdot 503^3$
3	2×607	$2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^0 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$
4	1307	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^0 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^0 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^0 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0 \cdot 1307^3$
5	31×103	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^0 \cdot 37^1 \cdot 43^1 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0$
6	3559	$2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0$
7	4057	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^0 \cdot 31^0 \cdot 37^2 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$
8	4261	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^0 \cdot 37^2 \cdot 43^1 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$
9	4339	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$
10	4957	$2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^1 \cdot 43^1 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$
11	6661	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^2 \cdot 43^1 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0$
12	8353	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^0 \cdot 37^2 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^1 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^0$
13	9043	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^2 \cdot 17^1 \cdot 19^1 \cdot 31^1 \cdot 37^2 \cdot 43^0 \cdot 61^1 \cdot 67^1 \cdot 73^0 \cdot 79^1 \cdot 97^1 \cdot 109^1 \cdot 139^1 \cdot 157^1$

接下來我們說明爲何能由 $BCa(30)$ 的倍增數得到 $Ca(43)$ 的上界。將 $BCa(42)$ 的 42 組雙立方和表法所對應的 r 值記爲 r_i, $i=1,\ldots,42$。令

$$Q = 29\cdot 43\cdot 101\cdot 163\cdot 181\cdot 193\cdot 223\cdot 229\cdot 307\cdot 397\cdot 457,$$

則倍增關係

$$BCa(42) = Q^3\cdot BCa(30)$$

成立。若得與 Q 互質的 $BCa(30)$ 的倍增數 k, 使得 $k^3\cdot BCa(30)$ 有新增解 R, 則

$$S = k^3\cdot BCa(42) = Q^3\cdot k^3\cdot BCa(30)$$

的雙立方和表法所對應的 r 有 43 組如下:

a. 由 $S = k^3\cdot BCa(42)$, 得 42 個 r 值 $k\cdot r_i$, $i=1,\ldots,42$ 等,

b. 由 $S = Q^3\cdot(k^3\cdot BCa(30))$, 得 $Q\cdot R$ 爲一個新增 r 值。

因此, S 有 43 組雙立方和表法, 故得 $Ca(43)$ 的上界。以 $k_1 = 487$ 爲例, 具體說明 $487^3\cdot BCa(42)$ 有 43 組雙立方和表法如下: 已知 $BCa(42)$ 對應的參數 r_i, $i=1,\ldots,42$ 沒有質因數 487。且

$$R = 2^4\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13^2\cdot 17\cdot 31\cdot 37\cdot 61\cdot 67\cdot 79\cdot 97\cdot 109\cdot 139,$$

爲 $487^3\cdot BCa(30)$ 的新增解。顯然,

a. 由 $S = 487^3\cdot BCa(42)$, 可得 $487\cdot r_i$, $i=1,\ldots,42$, 提供 S 的 42 個 r 值,

b. 由 $S = Q^3\cdot(487^3\cdot BCa(30))$, 得 $r_{43} = Q\cdot R$ 爲 S 的第 43 個 r 值。

因 r_{43} 不爲 487 的倍數, 而 $487r_i$, $i=1,\ldots,42$ 爲 487 的倍數, 即得 r_{43} 與諸 $487r_i$, $i=1,\ldots,42$ 相異。因此, $487^3\cdot BCa(42)$ 有 43 組雙立方和表法, 亦即 $487^3\cdot BCa(42)$ 爲 $Ca(43)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(43)$:

$$SCa(43) = 487^3\cdot BCa(42)。$$

同理可再得以下結果:

$503^3\cdot SCa(43)$ 爲 $Ca(44)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(44)$,
$(2\times 607)^3\cdot SCa(44)$ 爲 $Ca(45)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(45)$,
$1307^3\cdot SCa(45)$ 爲 $Ca(46)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(46)$,
$(31\times 103)^3\cdot SCa(46)$ 爲 $Ca(47)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(47)$,
$3559^3\cdot SCa(47)$ 爲 $Ca(48)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(48)$,

$4057^3 \cdot SCa(48)$ 爲 $Ca(49)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(49)$,
$4261^3 \cdot SCa(49)$ 爲 $Ca(50)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(50)$,
$4339^3 \cdot SCa(50)$ 爲 $Ca(51)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(51)$,
$4957^3 \cdot SCa(51)$ 爲 $Ca(52)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(52)$,
$6661^3 \cdot SCa(52)$ 爲 $Ca(53)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(53)$。
$8353^3 \cdot SCa(53)$ 爲 $Ca(54)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(54)$。
$9043^3 \cdot SCa(54)$ 爲 $Ca(55)$ 的一個上界, 記爲 $SCa(55)$。

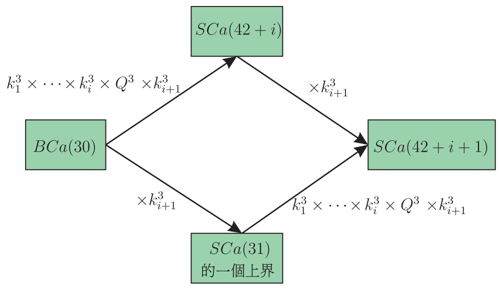

圖 7: 由 $BCa(30)$ 的倍增數得到 $Ca(n)$, $43 \le n \le 55$, 的上界

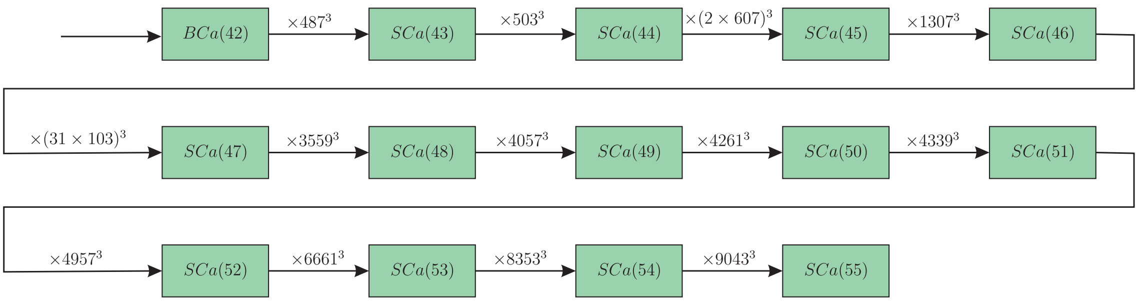

圖 8: $BCa(42), SCa(43), \ldots, SCa(55)$ 間的倍增關係

上述所得的上界歸納在定理四。其中 $Ca(43)$, $Ca(44)$ 的上界已於 2014 年 8 月收錄於 OEIS, 並且本文下修收錄於 OEIS 之 $Ca(43), Ca(44)$ 的上界。

定理四:

$Ca(43) \le SCa(43) = 487^3 \cdot BCa(42)$
$Ca(44) \le SCa(44) = 503^3 \cdot SCa(43)$
$Ca(45) \le SCa(45) = (2 \times 607)^3 \cdot SCa(44)$
$Ca(46) \le SCa(46) = 1307^3 \cdot SCa(45)$
$Ca(47) \le SCa(47) = (31 \times 103)^3 \cdot SCa(46)$
$Ca(48) \le SCa(48) = 3559^3 \cdot SCa(47)$

$Ca(49) \le SCa(49) = 4057^3 \cdot SCa(48)$
$Ca(50) \le SCa(50) = 4261^3 \cdot SCa(49)$
$Ca(51) \le SCa(51) = 4339^3 \cdot SCa(50)$
$Ca(52) \le SCa(52) = 4957^3 \cdot SCa(51)$
$Ca(53) \le SCa(53) = 6661^3 \cdot SCa(52)$
$Ca(54) \le SCa(54) = 8353^3 \cdot SCa(53)$
$Ca(55) \le SCa(55) = 9043^3 \cdot SCa(54)$

5.3. $Ta(23), Ta(24)$ 上界

本節以 $BTa(12)$ 的倍增數及 $BTa(12)$ 與 $BTa(22)$ 之間的倍增關係求得 $Ta(23)$ 和 $Ta(24)$ 的上界。我們用局部篩選演算法, 求得 $BTa(12)$ 的兩個倍增數 $47627(= 97 \times 491)$ 及 $91037(= 59 \times 1543)$, 其所對應的新解 R_1, R_2 分別如下:

$$R_1 = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}73{\cdot}79{\cdot}\underline{\underline{97^0}}{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}\underline{\underline{491^3}},$$
$$R_2 = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7^2{\cdot}13^2{\cdot}17{\cdot}19{\cdot}\underline{\underline{59^3}}{\cdot}79{\cdot}97{\cdot}109{\cdot}139{\cdot}157{\cdot}\underline{\underline{1543^0}}.$$

令

$$Q' = 2{\cdot}3{\cdot}5^2{\cdot}11{\cdot}31{\cdot}37{\cdot}61{\cdot}103{\cdot}127{\cdot}181{\cdot}197{\cdot}397{\cdot}457{\cdot}503{\cdot}521{\cdot}607{\cdot}4261,$$

則倍增關係

$$BTa(22) = {Q'}^3 \cdot BTa(12)$$

成立。將 $BTa(22)$ 的 22 個 r 值記爲 r_i, $i = 1, \ldots, 22$, 則

$$(97 \times 491)^3 \cdot BTa(22) = (97 \times 491)^3 \cdot {Q'}^3 \cdot BTa(12)$$

有 22 個解爲 $97 \cdot 491 \cdot r_i$, $i = 1, \ldots, 22$ 及新增解:

$$Q' \cdot R_1 = 2^3{\cdot}3^2{\cdot}5^3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13^2{\cdot}17^1{\cdot}19^1{\cdot}31{\cdot}37{\cdot}61{\cdot}73{\cdot}79{\cdot}103{\cdot}109{\cdot}127{\cdot}139{\cdot}181{\cdot}197$$
$$\cdot 397{\cdot}457{\cdot}\underline{\underline{491^3}}{\cdot}503{\cdot}521{\cdot}607{\cdot}4261.$$

因 $Q' \cdot R_1$ 爲 491^3 的倍數, 異於 $97 \cdot 491 \cdot r_i$, $i = 1, \ldots, 22$, 故得 $(97 \times 491)^3 \cdot BTa(22)$ 有 23 組雙正立方和表法, 亦即 $(97 \times 491)^3 \cdot BTa(22)$ 爲 $Ta(23)$ 的一個上界, 記爲 $STa(23)$:

$$STa(23) = (97 \times 491)^3 \cdot BTa(22)$$

同理再得:

$$(59 \times 1543)^3 \cdot STa(23) \text{ 爲 } Ta(24) \text{ 的一個上界, 記爲 } STa(24).$$

上述結果歸納如定理五。其中, $Ta(23)$ 的上界於 2014 年 10 月收錄於 OEIS。

定理五:

$$Ta(23) \le STa(23) = (97 \times 491)^3 \cdot BTa(22)$$
$$Ta(24) \le STa(24) = (59 \times 1543)^3 \cdot STa(23)$$

參考文獻

1. Boyer, C., New Upper Bounds for Taxicab and Cabtaxi Numbers. *Journal of Integer Sequences*, Vol.11 (2008), Article 08.1.6.
2. Hardy, G. H. and Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford University Press, 1980.
3. Wilson, D. W., The Fifth Taxicab Number is 48988659276962496. *Journal of Integer Sequences*, Vol.2 (1999), Article 99.1.9.
4. 維基百科: 的士數(Taxicab Number), 士的數 (Cabtaxi Number)。
5. Boyer, C. New Upper Bounds for Taxicab and Cabtaxi Numbers. http://www.christianboyer.com/taxicab/ , (retrieved on July 30, 2014)
6. 整數列線上百科 On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), http://oeis.org.

—本文作者任教苗栗縣興華高中—

附錄

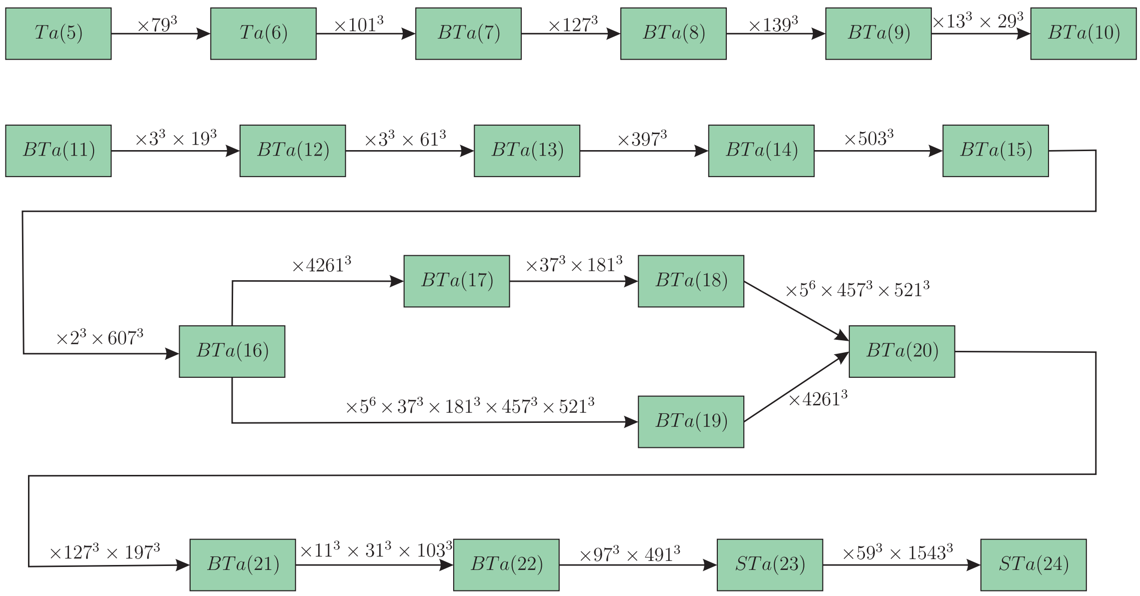

圖 9: $Ta(5), Ta(6), BTa(7), \ldots, BTa(22), STa(23), STa(24)$ 的倍增關係

表 7: $BTa(22)$ 的 22 個 r 值

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^9\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^0\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_2 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^4\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^0\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_3 &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^7\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^0\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^0\cdot 503^1\cdot 521^3\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_4 &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^0\cdot 127^0\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^3\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_5 &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^0\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_6 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^0\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^3\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_7 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^0\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0!\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^3\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_8 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^0\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 18^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_9 &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^0\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{10} &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{11} &= 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^3\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{12} &= 2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^0\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{13} &= 2^3\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^0\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{14} &= 2^3\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^0\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{15} &= 2^3\cdot 3^5\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^0\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^0\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{16} &= 2^5\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^3\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^0\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 1391157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{17} &= 2^5\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^0\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{18} &= 2^5\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^1\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{19} &= 2^5\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^2\cdot 43^1\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^0\\
r_{20} &= 2^7\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^0\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{21} &= 2^9\cdot 3^2\cdot 5^5\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^1\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^1\cdot 73^0\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^0\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^1\cdot 4261^1\\
r_{22} &= 2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^1\cdot 31^2\cdot 37^1\cdot 43^0\cdot 61^0\cdot 73^1\cdot 79^1\cdot 97^1\cdot 103^1\cdot 109^1\cdot 127^1\\
&\quad\cdot 139^1\cdot 157^1\cdot 181^1\cdot 197^1\cdot 397^1\cdot 457^1\cdot 503^1\cdot 521^1\cdot 607^0\cdot 4261^1
\end{aligned}$$

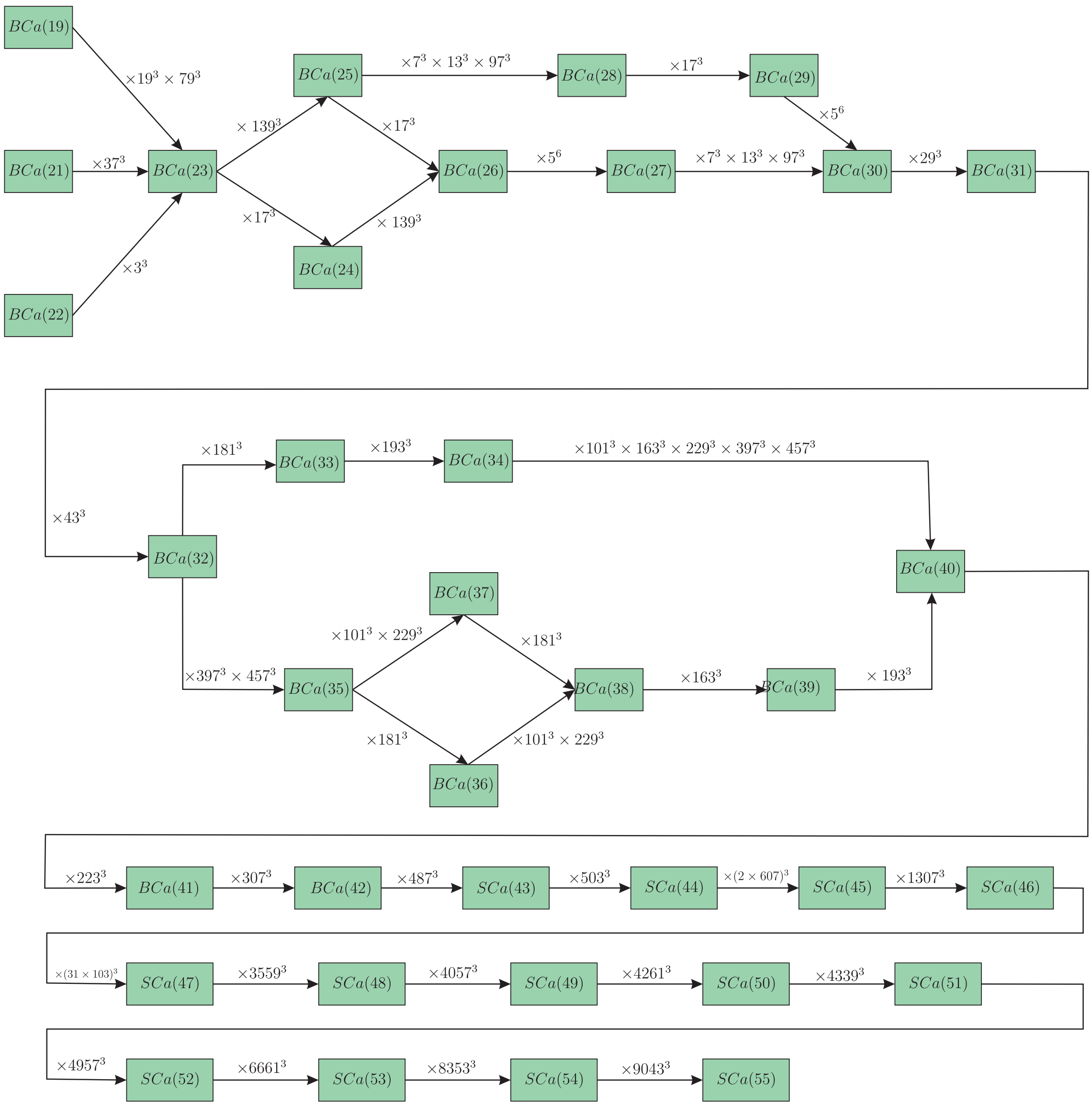

圖 10: $BCa(19), BCa(21), \ldots, BCa(42), SCa(43), \ldots, SCa(55)$ 的倍增關係