數學傳播　39卷4期, pp. 93-96

一組平面幾何公式的思考

鄭黎明

1. 問題的提出

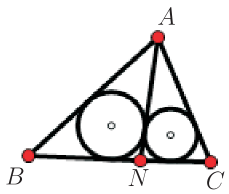
我們來看一個操作問題:

有一些全等的三角形紙板, 每個三角形紙板可以把它分割成兩個三角形, 這兩個三角形的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2, 即已知 $\triangle ABC$ 中, N 爲 BC 上的一點, $\triangle ABN$、$\triangle ANC$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2。但是, 我操作的時候, 發現把有 $\angle C$ 的那個三角形的內切圓半徑取 r_1, 那麼另一個三角形的內切圓半徑能夠是 r_2 嗎? 也就是 $\triangle ABC$ 中, 點 E 在 BC 上, 使得 $\triangle ABE$、$\triangle ACE$ 的內切圓半徑分別爲 r_2、r_1。換句話說, 互換可以嗎?

2. 從兩個公式談起

我們有一天看到令標先生的一個幾何公式

引理1(**令標**): 已知 $\triangle ABC$ 中, BC 邊上的高爲 h, N 爲 BC 上的一點, $\triangle ABN$、$\triangle ANC$、$\triangle ABC$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2、r 則: $r = r_1 + r_2 - \dfrac{2r_1r_2}{h}$



證明: 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\frac{2r}{h} = 1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

這個結論證明如下

$$\frac{2r}{h} = \frac{2ar}{ah} = \frac{2ar}{(a+b+c)r} = \frac{2\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2\sin A}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$
$$= 1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

如圖記 $\angle ANB=2\theta$, 則 $\angle ANC=180^\circ-2\theta$

在 $\triangle ABN$ 和 $\triangle CAN$ 中, 有

$$1-\frac{2r_1}{h}=\tan\frac{B}{2}\tan\theta,\qquad 1-\frac{2r_2}{h}=\tan\frac{C}{2}\cot\theta$$
$$\therefore\quad (1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\frac{2r}{h}$$

整理即得。

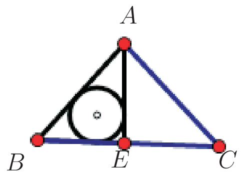
推論 1: 已知 $\triangle ABC$ 中, BC 邊上的高爲 h, N 爲 BC 上的一點, $\triangle ABN$、$\triangle ANC$、$\triangle ABC$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2、r 則:

$$(1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})=1-\frac{2r}{h}.$$

下面解決文章開頭的問題:

定理 1: 已知 $\triangle ABC$ 中, D 在 BC 上, $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2, 則 BC 上存在點 E 使得 $\triangle ABE$ 的內切圓半徑爲 r_2, $\triangle ACE$ 的內切圓半徑爲 r_1。

證明: 由 $(1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h})=1-\frac{2r}{h}$, r 是三角形內切圓半徑, h 是 BC 邊上的高。$\because\ h>2r$, $h>2r_1$, $h>2r_2$, $\therefore\ 0<1-\frac{2r_1}{h}<1$, $\therefore\ 1-\frac{2r}{h}<1-\frac{2r_2}{h}$, $\therefore\ r>r_2$, 作半徑爲 r_2 的圓與 AB、BC 相切, 由 $r>r_2$, 這個圓與 AC 沒有公共點, 作 AE 與這個圓相切交 BC 於 E, 設 $\triangle AEC$ 的內切圓半徑爲 m, $(1-\frac{2r_2}{h})(1-\frac{2m}{h})=1-\frac{2r}{h}$, $\therefore m=r_1$ 定理證畢。



這樣, 開頭的問題得到了一個正面的答案。更有趣的是我們得到一個非常漂亮的變式。

3. 公式的其他應用

我們給出如下變式:

定理 2: 已知 $\triangle ABC$ 中, BC 邊上的高爲 h, N 爲 BC 上的一點, $\triangle ABN$、$\triangle ANC$、$\triangle ABC$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2、r 則:

$$r^2=r_1^2+r_2^2+\frac{2r_1r_2}{h}(h-r-r_1-r_2).$$

證明: 由引理 1

$$r = r_1 + r_2 - \frac{2r_1r_2}{h}$$

兩邊平方得:

$$\begin{aligned}
r^2 &= (r_1+r_2)^2 - 2(r_1+r_2)\cdot\frac{2r_1r_2}{h} + \frac{4r_1^2r_2^2}{h^2}\\
&= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\Big[1 - \frac{2(r_1+r_2)}{h} + \frac{2r_1r_2}{h^2}\Big]\\
&= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\Big[1 - \frac{2(r_1+r_2)}{h} + \frac{r_1+r_2-r}{h}\Big]\\
&= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\Big[1 - \frac{r_1+r_2+r}{h}\Big]
\end{aligned}$$

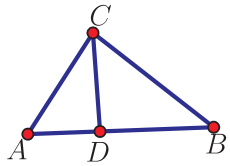
運用這個變式我們容易證明如下結論:

定理 3: $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$於 D, $\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle BCD$ 的內切圓半徑分別爲 r、r_1、r_2。

(1) 若 $\angle ACB = 90°$, 則 $r_1^2 + r_2^2 = r^2$

(2) 若 $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, 則 $\angle ACB = 90°$

這個題目首先出現在文 [2], 下面給出一個新證明。



證明: 如圖, $CD = h$, $\triangle ACD$、$\triangle CDB$ 的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2

(1) 已知 $\angle ACB = 90°$ 又因爲 $CD \perp AB$,

$$r_1 = \frac{1}{2}(CD + AD - AC), \quad r_2 = \frac{1}{2}(CD + BD - BC), \quad r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$$

所以 $r_1 + r_2 + r = h$

由定理 2 得到 $r^2 = r_1^2 + r_2^2$。

(2) 由引理 1 之證明, $\theta = 45°$, 所以

$$2r = h(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}) \tag{1}$$

$$2r_1 = h(1-\tan\frac{A}{2}) \tag{2}$$

$$2r_2 = h(1-\tan\frac{B}{2}) \tag{3}$$

從假設 $r_1^2+r_2^2=r^2$, 由定理2, $h=r+r_1+r_2$

(1)+(2)+(3)

左 $=2h=$ 右 $=h\Big(3-\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\Big)$

得 $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}$,

即 $\tan(\frac{A}{2}+\frac{B}{2})=1$

所以: $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=45°$, 即 $C=90°$。

4. 結束語

這是我們對於幾個幾何公式研究的一點心得, 望指教。

參考文獻

1. 令標, 一個有趣的平幾公式的三角證法, 中學數學, (蘇州),1997.4。
2. 鄒黎明, 直角三角形一類性質, 中學生數學, 1994.4。

—本文作者任教江蘇省無錫市碩放中學—