數學傳播 39卷4期, pp. 61-70

2015 年第 56 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2015 年第 56 屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 在泰國清邁 (Chiang Mai, Thailand) 舉行。本屆共有 104 個國家 (含 3 個觀察國) 與會、合計 577 位學生 (含 52 位女學生) 代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕。除了確認各項議題外, 評審會議的主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出 20 至 30 道預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由評審會議票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。

本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認爲較適當的試題, 再由各國領隊組成的評審會議經過四天的討論票選出 6 道正式試題, 其中第一題的領域爲組合、第二題爲數論、第三, 四題爲幾何, 第五題爲代數, 第六題爲組合。對此次我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者研究、應用與參考。

問題 1: 對於平面上的有限點集 $\mathcal{S}$, 如果任給 $\mathcal{S}$ 中的兩個相異點 A, B, 都存在一點 $C \in \mathcal{S}$ 滿足 $AC = BC$, 就稱 $\mathcal{S}$ 是*平衡*的; 如果任給 $\mathcal{S}$ 中的三個相異點 A, B, C, 皆不存在一點 $P \in \mathcal{S}$ 滿足 $PA = PB = PC$, 就稱 $\mathcal{S}$ 是*無中心*的。

(a) 證明: 對所有的整數 $n \geqslant 3$, 皆存在 n 個點的平衡點集。

(b) 找出所有的整數 $n \geqslant 3$, 使得 n 個點的平衡且無中心的點集是存在的。

試題委員會公布的參考答案:

(b) **小題的答案**: **所有的奇數** $n \geqslant 3$。

以下的證明過程中, 均假設 n 是大於或等於 3 的整數。

(a) **小題的證明**. 當 n 是奇數時, 考慮正 n 邊形, 其頂點依逆時針方向標記爲 $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

並令 $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$。以下檢查 $\mathcal{S}$ 是平衡的。對任意兩相異頂點 A_i, A_j, 令 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 爲同餘方程 $2k \equiv i + j \pmod{n}$ 的解。由於 $k - i \equiv j - k \pmod{n}$, 知 $A_iA_k = A_kA_j$, 符合題意。

現在開始假設 n 是偶數。考慮一個正 $(3n-6)$ 邊形, 令 O 爲其外心。同樣地我們依逆時針方向將其頂點標記爲 $A_1, \ldots, A_{3n-6}$, 並令 $\mathcal{S} = \{O, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$。以下檢查 $\mathcal{S}$ 是平衡的。對任意兩相異頂點 A_i, A_j, 總有 $OA_i = OA_j$。再來考慮 O 與其中一頂點 A_i。首先, 對於所有的 $i \leqslant \frac{n}{2}$ 時, $OA_iA_{i'}$ 形成正三角形, 其中 $i' = \frac{n}{2} - 1 + i$; 所以當 $i \leqslant \frac{n}{2}$ 時, 均有 $OA_{i'} = A_iA_{i'}$。反之, 若 $i > \frac{n}{2}$, 就有 $OA_{i''} = A_iA_{i''}$, 其中 $i'' = i - \frac{n}{2} + 1$。本小題得證。

註. 本小題還有其他的建構方式, 有興趣的讀者可以自行嘗試。

(b) **小題的證明**. 由 (a) 小題的建構知: 當 n 爲大於或等於 3 的奇數時, 正 n 邊形的所有頂點形成的集合爲平衡且無中心的; 它是無中心的理由爲: 對任意三個相異頂點 A, B, $C \in \mathcal{S}$, 其外心就是這個正 n 邊形的中心, 但它不在此點集中。

現在假設 n 爲大於 3 的偶數, 而 $\mathcal{S}$ 爲 n 個點的平衡且無中心的點集; 以下將得出矛盾。對於兩個相異點 A, $B \in \mathcal{S}$, 我們將集合 $\{A, B\}$ 對應到滿足 $AC = BC$ 的點 $C \in \mathcal{S}$。因爲 $\mathcal{S}$ 可形成 $\frac{n(n-1)}{2}$ 對的點, 由鴿籠原理知有一點 $P \in \mathcal{S}$ 與至少 $\left\lceil \frac{n(n-1)}{2} / n \right\rceil = \frac{n}{2}$ 對點對應。注意到這 $\frac{n}{2}$ 對點都不包含 P, 所以它們的聯集最多包含 $n-1$ 個點; 亦即有兩對點同時包含某一個點。令這兩對點爲 $\{A, B\}$ 與 $\{B, C\}$, 由定義知 $PA = PB = PC$, 此與無中心的假設矛盾。證畢。 $\square$

評註: 本題爲考慮幾何配置的簡易組合題, 係考慮平面上有限點集的特殊性質, 只要能連結到正多邊形、或是圓上適當配置的點加上圓心, 就能得到第一部分的證明。而第二部分對於排除偶數點集的方法, 可以利用鴿籠原理、或是利用二分圖 (bipartite graph) 的概念討論即可。

問題 2: 找出所有的三元正整數組 (a, b, c), 使得

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

三數中的每一個數都是 2 的乘冪。

(2 的乘冪指的是形如 2^n 的整數, 其中 n 爲非負整數。)

試題委員會公布的參考答案:

本題共有 16 組解: $(2,2,2)$、$(2,2,3)$ 的 3 個排列、以及 $(2,6,11)$ 與 $(3,5,7)$ 的各 6 個排列。

易知以上的 16 個三元組符合題意。以下說明滿足題意的三元組 (a,b,c) 必爲上述各組之一。如果 $a=1$, 則 $c-b$ 與 $b-c$ 都是 2 的乘冪; 但此不能發生, 因爲 $(b-c)+(c-b)=0$, 而 2 的乘冪必爲正數。由對稱性, 知 $a,b,c \geqslant 2$。

第 1 種情形. a,b,c 中至少有兩數相等。

不失一般性, 設 $a=b$。於是 a^2-c 與 $a(c-1)$ 都是 2 的乘冪。由後者可得 a 與 $c-1$ 皆爲 2 的乘冪, 故可設 $a=2^\alpha$、$c=2^\gamma+1$, 其中 α,γ 是非負整數。因爲 $a^2-c=2^{2\alpha}-2^\gamma-1$ 也是 2 的乘冪, 此數模 4 的餘數必不爲 -1, 由此得 $\gamma \leqslant 1$。而 $2^{2\alpha}-2$ (當 $\gamma=0$) 與 $2^{2\alpha}-3$ (當 $\gamma=1$) 兩數都只能在 $\alpha=1$ 的情形下成爲 2 的乘冪。故三元組 (a,b,c) 必爲 $(2,2,2)$ 或 $(2,2,3)$ (以及它的排列)。

第 2 種情形. a,b,c 兩兩互異。

由對稱性, 可設

$$2 \leqslant a < b < c. \tag{1}$$

以下證明 $(a,b,c)=(2,6,11)$ 或 $(a,b,c)=(3,5,7)$。由題設,

$$bc-a=2^\alpha, \tag{2}$$

$$ca-b=2^\beta, \tag{3}$$

$$ab-c=2^\gamma, \tag{4}$$

其中

$$\alpha > \beta > \gamma \tag{5}$$

爲三個非負整數。

根據 a 的大小, 以下我們再分兩種子情形。

情形 2-1. $a=2$。

我們先來證明 $\gamma=0$。假設不然 (即 $\gamma>0$), 由 (4) 可知 c 是偶數, 同樣由 (3) 及 (5) 式知 b 也是偶數。於是 (2) 式的左邊模 4 的餘數等於 2, 而此情形只有在 $bc=4$ 的時候才能成立。此與 (1) 式矛盾, 故 γ 必爲 0, 而由此知 $c=2b-1$。

現在由 (3) 式得 $3b-2=2^\beta$。因爲 $b>2$, 所以 $\beta \geqslant 4$。如果 $\beta=4$, 就得 $b=6$、$c=2b-1=11$, 此爲一解。

如果 $\beta \geqslant 5$, 由 (2) 式可得

$$9\cdot 2^\alpha = 9b(2b-1)-18=(3b-2)(6b+1)-16=2^\beta(2^{\beta+1}+5)-16,$$

但在 $\beta \geqslant 5$ 時, 上式的右邊不被 32 所整除。所以 $\alpha \leqslant 4$, 而與 (5) 式矛盾。

情形 2-2. $a \geqslant 3$。

自 $\{-1, +1\}$ 中選出一個整數 ϑ 使得 $c-\vartheta$ 不被 4 整除。由於

$$2^\alpha + \vartheta \cdot 2^\beta = (bc - a\vartheta^2) + \vartheta(ca-b) = (b+a\vartheta)(c-\vartheta)$$

可被 2^β 整除, 所以 $b+a\vartheta$ 可被 $2^{\beta-1}$ 整除。另一方面, 由 $2^\beta = ca-b > (a-1)c \geqslant 2c$ 可得 a 與 b 皆小於 $2^{\beta-1}$。這些條件只能在 $\vartheta = 1$ 且 $a+b = 2^{\beta-1}$ 時成立。由 (3) 式知

$$ca - b = 2(a+b), \tag{6}$$

於是 $4b > a+3b = a(c-1) \geqslant ab$, 故得 $a=3$。

現在代回 (6) 式可得 $c = b+2$, 而 (2) 式告訴我們 $b(b+2)-3 = (b-1)(b+3)$ 是 2 的乘冪, 由此知 $b-1$ 和 $b+3$ 也都是 2 的乘冪。因爲這兩個數的差是 4, 所以唯一的答案是 $b=5$, 而 $c=b+2=7$。

本題至此全部分析完畢。 □

評註: 本題的敘述連國中程度的學生都能看懂, 但其實是中間偏難的數論題。除了要掌握 2 的乘冪數的性質以外, 對於各情形的分類討論, 是需要小心處理的。分類原則除了按照官方解答之外, 另可依照 a, b, c 三數的奇偶性來分析。

問題 3: 設 ABC 爲銳角三角形, 其中 $AB > AC$, Γ 是它的外接圓, H 是它的垂心, 而 F 是過 A 的高的垂足。令 M 爲 BC 邊的中點。設 Q 爲 Γ 上的一點, 滿足 $\angle HQA = 90°$; 而 K 爲 Γ 上的另一點, 滿足 $\angle HKQ = 90°$。已知 A, B, C, K, Q 這些點皆不相同, 且依此順序落在 Γ 上。

證明: 三角形 KQH 的外接圓與三角形 FKM 的外接圓相切。

試題委員會公布的參考答案:

令點 A' 爲 A 在 Γ 上的對徑點。因 $\angle AQA' = 90°$ 及 $\angle AQH = 90°$, 故 Q, H, A' 三點共線。一樣地, 若令 Q' 爲 Q 在 Γ 上的對徑點, 同樣會有 K, H, Q' 三點共線。令直線 AHF 與 Γ 的另一個交點爲 E。熟知 M 是 HA' 線段的中點, 且 F 爲 HE 線段的中點。令點 J 爲線段 HQ' 的中點。

考慮平面上一點 T 滿足: TK 與 KQH 外接圓切於 K 點, 且 Q, T 位於直線 KH 的兩側 (如圖 1)。則有 $\angle HKT = \angle HQK$, 而我們需證明的是 $\angle MKT = \angle CFK$。所以我們只要再證明 $\angle HQK = \angle CFK + \angle HKM$ 即可。因爲 $\angle HQK = 90° - \angle Q'HA'$ 以及 $\angle CFK = 90° - \angle KFA$, 上式等價於 $\angle Q'HA' = \angle KFA - \angle HKM$。現在, 由於 $\triangle KHE$ 相似於 $\triangle AHQ'$, 且 F, J 爲分別對應邊的中點, 得 $\angle KFA = \angle HJA$; 一樣可推

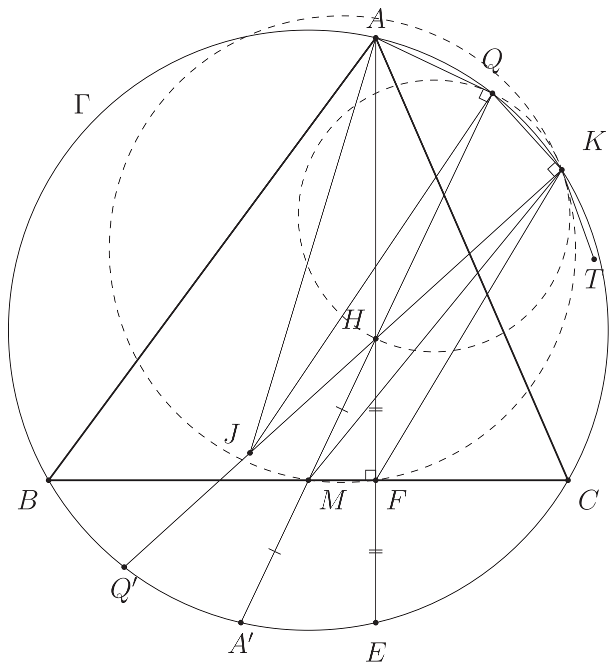


圖 1

得 $\angle HKM = \angle JQH$。至此, 我們只需要證出

$$\angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH$$

即可。

參考圖 2。因爲 $\angle Q'HA' = \angle JQH + \angle HJQ$ 以及 $\angle HJA = \angle QJA + \angle HJQ$, 我們可將欲證之式子化簡爲 $2\angle JQH = \angle QJA$。但 $AQA'Q'$ 爲矩形, 而 J 是 HQ' 的中點, J 必然落在 AQ 與 $A'Q'$ 兩邊中點的連線上, 從而得證。 □

評註: 本題是偏難的幾何題。爲了證明兩圓內切, 官方解答的過程是考慮其中一圓的切線, 會造成對另一圓的弦切角性質; 經過相似三角形與共圓的轉換之後, 得到一個不明顯的中間性質 ($\angle Q'HA' = \angle HJA - \angle JQH$)。本道試題大會另外提供了其他作法, 每一種作法都有一個重大的中間步驟。選手們在時間壓力要找到可行的解題路徑, 實屬不易。本題另有一個相當漂亮的證明, 係採取對垂心 H 作反演變換, 讀者可以嘗試看看。

問題 4: 設三角形 ABC 的外接圓爲 Ω, 外心爲 O。一個以 A 爲圓心的圓 Γ 與線段 BC 交於 D, E 兩點, 其中 B, D, E, C 皆相異, 並依此順序落在直線 BC 上。令點 F, G 爲 Γ 與 Ω 的交點, 使得 A, F, B, C, G 各點依此順序落在 Ω 上。令三角形 BDF 的外接圓與線段 AB 的另一個交點爲 K, 而三角形 CGE 的外接圓與線段 CA 的另一個交點爲 L。

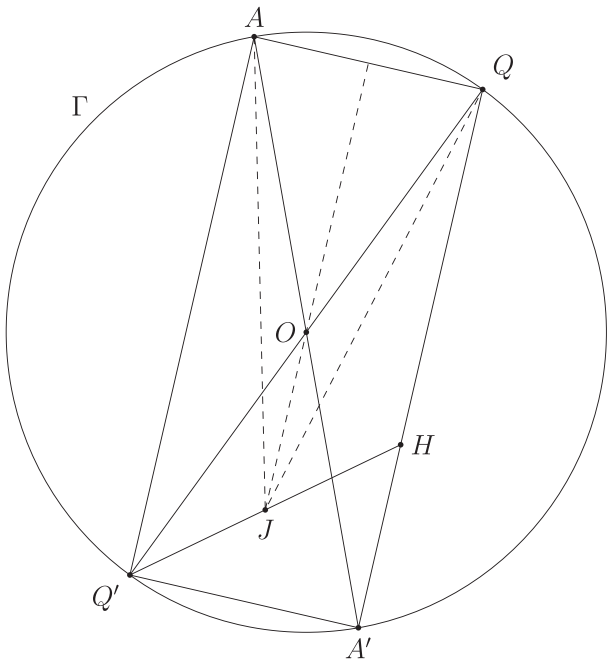


圖 2

設直線 FK 與直線 GL 相異, 且兩線交於點 X。證明: X 落在直線 AO 上。

試題委員會公布的參考答案:

本題只需證明直線 FK 與 GL 對稱於 AO 即可。首先, 線段 AF 與 AG 是圓 Ω 上等長的弦, 故對稱於 AO。下證

$$\angle AFK = \angle LGA. \tag{1}$$

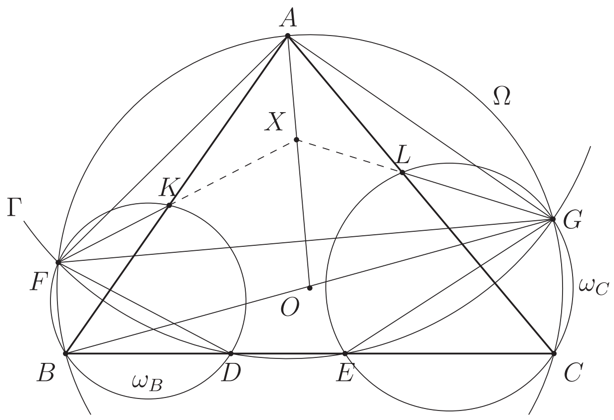
將三角形 BDF 與 CGE 的外接圓分別記爲 ω_B 與 ω_C。我們從下式出發:

$$\angle AFK = \angle GFD + \angle AFG - \angle KFD.$$

由 ω_B, Γ, Ω 三個圓來看, 上式可改寫爲

$$\angle AFK = \angle GEC + \angle ABG - \angle KBD = \angle GEC - \angle GBC.$$

再來看 ω_C 與 Ω 兩個圓, 可得 $\angle AFK = \angle GLC - \angle GAC = \angle LGA$。本題得證。 □



評註: 本題是較簡單的幾何題, 利用角度計算、數點共圓與對稱性等性質即可得證。

問題 5: 令 $\mathbb{R}$ 代表所有實數所成的集合。找出所有函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得對任意實數 x 與 y,

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy)=x+f(x+y)+y\,f(x)$$

均成立。

令 $\mathbb{R}$ 代表所有實數所成的集合。找出所有函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得對任意實數 x 與y,

$$f\big(x+f(x+y)\big)+f(xy)=x+f(x+y)+y\,f(x) \tag{1}$$

均成立。

試題委員會公布的參考答案:

本題有兩解, 分別是: (a) 恆等函數 $f(x)=x$; 或是 (b) $f(x)=2-x$。代入易知此二函數爲解。以下論證此問題只有這兩個解。

設 f 爲滿足 (1) 式的函數。(1) 式中代入 $y=1$ 得

$$f\big(x+f(x+1)\big)=x+f(x+1); \tag{2}$$

換句話說, 對所有 $x\in\mathbb{R}$, $x+f(x+1)$ 必爲 f 的不動點。

以下我們用 $f(0)$ 之值分成兩種情形討論:

第 1 種情形. $f(0)\neq 0$.

(1) 式中代入 $x=0$, 可得

$$f\big(f(y)\big)+f(0)=f(y)+yf(0).$$

所以如果 y_0 是 f 的不動點, 在上式中代入 $y=y_0$ 可解得 $y_0=1$。因此, 由 (2) 式可知: 對所有 $x\in\mathbb{R}$, $x+f(x+1)=1$ 恆成立。故得一解 $f(x)=2-x$ $(\forall\, x\in\mathbb{R})$。

第 2 種情形. $f(0)=0$.

(1) 式中代入 $(x,y)=(x+1,0)$, 得

$$f\big(x+f(x+1)+1\big)=x+f(x+1)+1. \tag{3}$$

並於 (1) 式中代入 $x=1$ 得

$$f\big(1+f(y+1)\big)+f(y)=1+f(y+1)+yf(1). \tag{4}$$

在 (2) 式中代入 $x=-1$, 得 $f(-1)=-1$。再於 (4) 式中代入 $y=-1$ 得到 $f(1)=1$。於是 (4) 式成爲

$$f\big(1+f(y+1)\big)+f(y)=1+f(y+1)+y. \tag{5}$$

由上可知: 如果 y_0 與 y_0+1 都是 f 的不動點的話, 那麼 y_0+2 也是。於是由 (2)、(3) 兩式知: 對所有的 $x\in\mathbb{R}$, $x+f(x+1)+2$ 亦爲 f 的不動點, 即:

$$f\big(x+f(x+1)+2\big)=x+f(x+1)+2.$$

上式中 x 以 $x-2$ 代入化簡得

$$f\big(x+f(x-1)\big)=x+f(x-1).$$

另一方面, (1) 式中代入 $y=-1$ 得

$$f\big(x+f(x-1)\big)=x+f(x-1)-f(x)-f(-x).$$

所以對所有的 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 即 f 爲奇函數。

最後, 在 (1) 式中 (x,y) 以 $(-1,-y)$ 代入, 並利用 $f(-1)=-1$, 得

$$f\big(-1+f(-y-1)\big)+f(y)=-1+f(-y-1)+y.$$

由於 f 是奇函數, 上式成爲

$$-f\big(1+f(y+1)\big)+f(y)=-1-f(y+1)+y.$$

將此式與 (5) 式相加, 即得 $f(y)=y$ $(\forall\, y\in\mathbb{R})$。證畢。 $\square$

評註: 函數方程的問題是 IMO 歷史上一類特殊的代數問題。通常的解題過程, 係將變數代入一些特殊數字後, 觀察、歸納滿足函數方程的解所需的必要條件, 從而論證這些必要條件所找到的函數確爲其解。如本題中, 先觀察其解函數 f 的不動點的行爲, 然後 (在其中一個情形下) 得出 f 爲奇函數的推論, 最後得到 f 的完整形式。

函數方程求解的問題, 在高等數學中常常出現, 例如微分方程、遞迴關係求解等問題, 都在這個脈絡底下。因爲 IMO 的命題範圍只到高中數學, 所以函數方程的問題大多以類似本題的形式出現, 是比較特異的。但這樣的訓練與想法, 還是可以運用在高等數學的研究當中, 也是值得學習的。

問題 6: 整數數列 $a_1, a_2, \ldots$ 滿足下列條件:

(i) 對所有的 $j \geqslant 1$, 均滿足 $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$;

(ii) 對所有的 $1 \leqslant k < \ell$, 都有 $k + a_k \neq \ell + a_\ell$。

證明: 存在兩個正整數 b 與 N, 使得對所有滿足 $n > m \geqslant N$ 的整數 m 與 n,

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

均成立。

試題委員會公布的參考答案:

對所有正整數 n, 令 $s_n = n + a_n$。由題設知: 對所有的 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$n + 1 \leqslant s_n \leqslant n + 2015$$

恆成立。數列 $s_1, s_2, \ldots$ 中的任意兩項均不相同。考慮集合

$$M = \mathbb{Z}_{>0} \setminus \{s_1, s_2, \ldots\}.$$

性質. M 最多只有 2015 個元素。

證. 假設不然。令 $m_1 < m_2 < \cdots < m_{2016}$ 爲 M 中的 2016 個相異元素。令 $n = m_{2016}$, 有

$$\{s_1, \ldots, s_n\} \cup \{m_1, \ldots, m_{2016}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n + 2015\}.$$

上式的左邊爲 $n + 2016$ 個相異元素形成的聯集, 但右邊只有 $n + 2015$ 個元素, 此爲不可能。故性質成立。 ♡

令 $b = |M|$ (即 M 的元素個數), $N = \max(M)$。以下證明 b, N 滿足題設。上段已經證出 $b \leqslant 2015$。

考慮任何一個滿足 $r \geqslant N$ 的整數 r。如同上面性質的論證, 集合

$$B_r = M \cup \{s_1, \ldots, s_r\} \tag{1}$$

爲 $[1,r+2015]\cap\mathbb{Z}$ 的子集合, 並且恰有 $b+r$ 個元素。由 M 與 N 的定義, 可知 $[1,r+1]\cap\mathbb{Z}\subseteq B_r$。因此可定義一集合 $C_r\subseteq\{1,2,\ldots,2014\}$ 使得 $|C_r|=b-1$ 且滿足

$$B_r=\big([1,r+1]\cap\mathbb{Z}\big)\cap\{r+1+x\mid x\in C_r\}. \tag{2}$$

以下用 $\sum J$ 代表有限整數集合 J 的元素總和。現在 (1)、(2) 兩式給出兩種計算 $\sum B_r$ 的方法, 知

$$\sum M+\sum_{j=1}^{r}s_j=\sum_{j=1}^{r}j+b(r+1)+\sum C_r,$$

移項整理得

$$\sum M+\sum_{j=1}^{r}(a_j-b)=b+\sum C_r. \tag{3}$$

經過以上的整理工作後, 現在考慮滿足 $n>m\geqslant N$ 的兩整數 m, n。(3) 式中 r 分別以 n 與 m 代入, 兩式相減可得

$$\sum_{j=m+1}^{n}(a_i-b)=\sum C_n-\sum C_m.$$

由於 C_n 與 C_m 都是 $\{1,2,\ldots,2014\}$ 的子集合, 且 $|C_n|=|C_m|=b-1$, 易知絕對值 $\sum C_n-\sum C_m$ 的最大可能值發生在 $C_m=\{1,2,\ldots,b-1\}$, $C_n=\{2016-b,\ldots,2014\}$ 或者兩者角色互換。此時有

$$\Big|\sum C_n-\sum C_m\Big|=(b-1)(2015-b),$$

故得一般情形有

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\leqslant(b-1)(2015-b)\leqslant\Big(\frac{(b-1)+(2015-b)}{2}\Big)^2=1007^2,$$

即爲所求。證畢。 □

評註: 本題是難度較高的組合題, 原本是數線上的正整數點的有限差距的有向連通集問題。本題的自然解題過程, 是先將題目中的 2015 換成較小的正整數 (如 2, 3, 4 等), 猜測欲解之 b, N 兩數該有的性質。於是知道: 先論證入度 (in-degree) 爲 0 的點 (即集合 M) 的個數不超過 2015, 再利用組合中計算兩次的方法得到 b,N 兩數, 最後利用算幾不等式得出欲證之上界, 是一條需要高度想像力才能完整作答的題目。

—本工作小組係由教育部委託國立中央大學, 於「中華民國參加 2015 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者爲林延輯助理教授, 任教國立台灣師範大學數學系—