數學傳播 39卷4期, pp. 49-56

牛頓的超酷定理
(Newton's Superb Theorem)
—均質球殼對殼外一點的重力可視爲質量集中於球心

張海潮 · 侯以修

William Stukeley(1687∼1765) 是牛頓 (1643∼1727) 的朋友, 也是牛頓生平回憶錄 (Memoirs of Sir Isaac Newton's Life) 的作者。Stukeley在書中記錄了一段牛頓 1726/4/15 的談話:

> 晚餐後天氣漸暖, 我們兩人到園中坐在蘋果樹下喝茶。談話中, 牛頓告訴我當年他會想到萬有引力的情景正如當下[1]。那天他坐在樹下沉思, 剛巧看到蘋果落下。他想, 爲什麼蘋果落下是垂直地面? 爲什麼脱開的方向不會偏離地心或是向上, 而是直指地心? 顯然, 理由是地球吸引蘋果而下。這一定是物質具有引力, 而地球各部分物質所具引力之總和是指向地心, 絕不會偏離, 所以導致蘋果垂直落向地心。如果物質可以吸引物質, 引力必定與他們的質量成正比, 因此正如地球吸引蘋果, 蘋果必定也吸引地球。這就是我們現在稱之爲引力者, 充填宇宙, 無所不在[2]。

Stukeley 所描述的正是萬有引力概念的發端, 但是在量化的過程中, 牛頓碰到兩個問題, 第一, 此一引力是否與距離的平方成反比? 第二, 地球對蘋果的吸引力是否可以視爲將質量完全集中於球心?

從克卜勒的三大行星律, 牛頓成功的回答了第一個問題[3]。關於第二個問題, 牛頓在第一個問題討論星體之間的引力時, 均將星體視爲質點。當星體之間距離很大, 此一看法尚稱允當, 但當審視地球對蘋果的吸引力時, 如果無法將地球的質量看成集中於地心, 一方面無法將地表

---

[1] 1665年, 因爲鼠疫流行, 劍橋大學關閉, 牛頓回到故鄉住了 18 個月, 大致上完成了萬有引力初探。此段 Stukeley 所述引自 Chandrasekhar p.2 (見參考資料1)。

[2] 原文是「$\cdots$ gravity, which extends itself through the universe.」,「Universal Gravitation」的中譯即「萬有引力」。

[3] 克卜勒行星律中的面積律等同於太陽與行星之間有一向心的引力, 見牛頓《原理》第一卷第二章命題1、命題2。從行星律中的橢圓律可以證出引力的大小與距離的平方成反比, 見牛頓《原理》第一卷第三章命題11。又從命題11的證明和週期律可以得出公式 $G\frac{Mm}{R^2}$ 中的比例 G 是一個常數 $G=\frac{4\pi^2}{M}\frac{a^3}{T^2}$, 式中 M 是太陽的質量, a 是行星軌道的半長軸, T 是行星繞日的週期, 週期律說 $\frac{a^3}{T^2}$ 在太陽系中是一常數。請參考數學傳播 32 卷 2 期 pp.3-12, 從刻卜勒到牛頓 — 千古謎題破解日, 萬有引力發現時, 作者項武義、張海潮。

9.8 公尺/秒^2 的向心加速度和月球繞地球的向心加速度比較, 另一方面, 將星體或月球視爲質點終究是一個近似而非準確的理論。不過牛頓還是證明了第二個問題的正確性, 這就是《原理》第一卷第 12 章的命題 71, 由於命題 71 討論均質球面對外的吸引力因此又稱殼定理 (Shell Theorem), 其內容如下[4]:

「如果均質球殼外的小球 P 受到球殼上每一點的吸引力均反比於小球 P 到這些點距離的平方, 則小球 P 受到球殼的總吸引力會反比於它到球心距離的平方。」

牛頓接著在《原理》的第三卷命題 8 寫道:「我在發現指向整個行星的引力由指向其各部分的引力複合而成, 而且指向其各部分的引力反比於到該部分距離的平方之後, 仍不能肯定, 在合力是由如此之多的分力組成的情況下, 究竟距離的平方反比關係是精確成立, 還是近似如此, 因爲這在較大距離上足以精確成立的比例關係, 可能在行星表面附近時會失效, 在該處粒子間距離是不相等的, 而且位置也不相似。」所以說, 第一卷的命題 71 是整個萬有引力的關鍵, 如果沒有這個定理, 那在計算蘋果受地球的吸引力時, 就不能將蘋果至地球的距離視爲地球半徑, 因爲地球各處都給予蘋果與距離平方成反比的吸引力, 我們怎麼能確定這些「合力」是多少?

牛頓在《原理》書中對上述命題71的證明, 使用了極限和微積分的概念, 但是卻刻意迴避微分、積分的符號, 而改用大量的幾何論證。並且, 牛頓在證明中, 動用了令人難懂的積分技巧, 連英國數學家李特伍德 (J. Littlewood, 1885∼1977) 都說這個命題是:「留給讀者無助的困惑。」數學史家克萊因 (M. Kline, 1908∼1992) 也如此描述:「雖然此書帶給牛頓極大名望, 但它卻非常難以了解。牛頓曾告訴一位朋友, 他有意讓此書艱難, 以免受數學膚淺者的貶抑, 他毫無疑問希望藉此避免早期在光學論文上所受到的批判。」

1970年8月, 王其允和項武義在台北科學月刊發表「是蘋果還是開普勒啓發了牛頓?」, 文中對上述命題71提供了一個簡潔的證明。後來項武義和張海潮在數學傳播 (見註三) 重現了這個證明, 但是不夠詳盡。本文分做兩節, (一) 是把王、項的證明寫詳盡, (二) 是用微積分的符號再現王、項的證明。

(一)

我們的策略是要找出一個好方法把各處的吸引力統合起來, 既然各處的吸引力在原本的球殼上不好加總, 那我們就把它們放到另一個小籃子裡去加總, 這個小籃子, 其實是一個單位球殼, 如果我們把吸引力都轉移到這個小球殼上, 那就可以輕易得到我們要的結論了。

由於均勻球殼的對稱性, 其對球殼外質點的吸引力指向球心方向是顯而易見的。對於半徑爲 R 之球殼來說, 其面積爲 $4\pi R^2$, 假設球殼密度爲 ρ, 則其質量爲 $4\pi R^2\rho$, 所以我們必須證

---

[4]牛頓在 1665/1666 計算了月球繞地球的向心加速度並和地表的 9.8 公尺/秒^{2}比較, 此一過程請參考科學人雜誌 (2009/10/01) 不可勝數專欄《月亮代表我的心》作者張海潮, 或三民書局 (2013/6) 數學放大鏡《牛頓的月球試算》, 作者張海潮。在此計算中, 牛頓先行假設地球的質量可以視爲集中在球心, 但是證明真正的完成是在 1685 年。殼定理也討論到均質球面對球內的吸引力爲 0, 這個結論比較簡單, 在此不論。

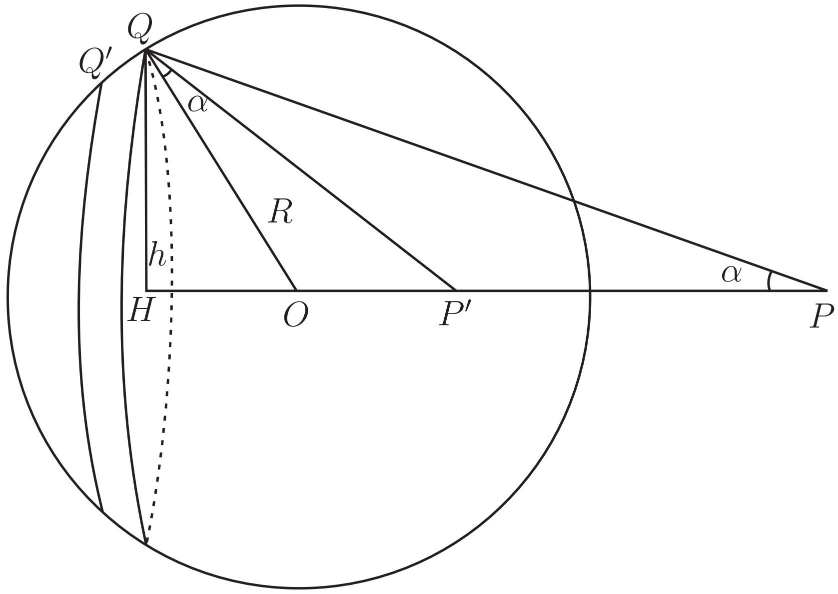
明的是, 球殼對球外一點 P 之吸引力大小爲

$$\frac{G(4\pi R^2\rho)m}{\overline{OP}^2}$$

其中, G 爲萬有引力常數, m 爲球殼外質點的質量, O 爲球殼中心, P 爲質點位置。爲了簡化證明, 我們設 $m=\rho=1$, 所以最後我們應該要得到此吸引力大小爲

$$\frac{G(4\pi R^2)}{\overline{OP}^2}$$

如下圖, 我們先在 $\overline{OP}$ 上取一點 P', 使得 $\overline{OP}\times\overline{OP'}=R^2$, P' 稱爲 P 對圓的反射點, 如此一來, 對球殼上任一點 Q, 我們有 $\triangle OQP'\sim\triangle OPQ$。若是令 $\angle OPQ=\alpha$, 則 $\angle OQP'=\angle OPQ=\alpha$。



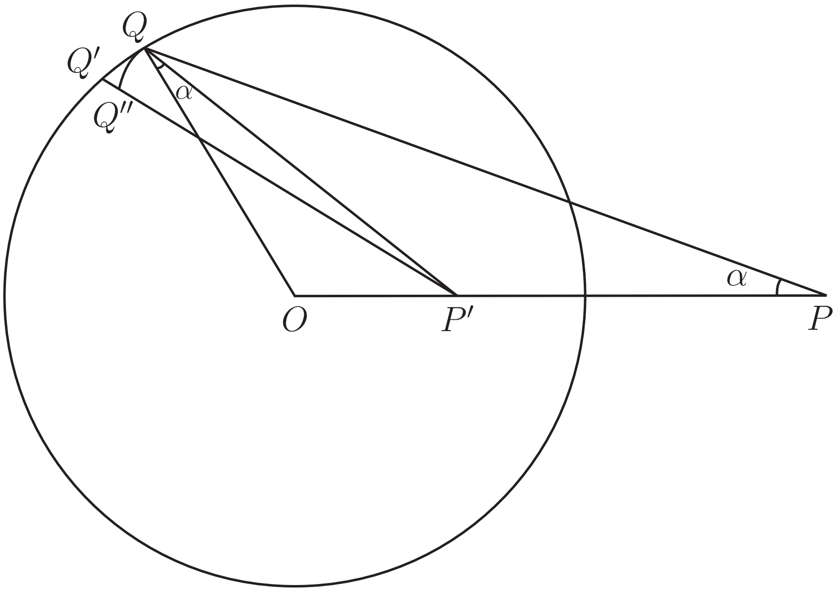
接著, 取一極小段弧 $\overparen{QQ'}$, 繞直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 旋轉得一環帶, 令此環帶的半徑爲 h, 即爲圖中 Q 到直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 的距離。則我們可以算出此環帶對 P 點之吸引力大小爲

$$\frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ'}\cos\alpha)}{\overline{QP}^2}$$

其中的 $2\pi h\overparen{QQ'}$, 代表了 $\overparen{QQ'}$ 繞出的環帶面積。因爲我們取的 $\overparen{QQ'}$ 爲極小段的弧, 它所繞出的環帶近似於長方形, 此長方形的長近似於環帶的周長 $2\pi h$, 寬則爲 $\overparen{QQ'}$, 所以面積近似於 $2\pi h\overparen{QQ'}$。[5]

[5] $\overparen{QQ'}$ 在微積分的語言通常表成 ds, 代表弧長。一般求球面的面積就是利用積分 $\int 2\pi h d\theta$。本文得到的一些幾何圖形都是在微量的層次上討論, 這是在建立微積分公式時常用的無窮小/加總/極限方法。

然後, 我們以 P' 爲圓心, $\overline{P'Q}$ 爲半徑畫弧, 交 $\overline{P'Q'}$ 於 Q'', 如下圖。



由此圖, 我們可以觀察出一些相互垂直的關係, 首先是: $\overset{\frown}{QQ'}$ 垂直於 $\overline{OQ}$ 及 $\overset{\frown}{QQ''}$ 垂直於 $\overline{P'Q}$, 如此可以推得

$$\angle Q'QQ'' = \angle OQP' = \alpha$$

另外, 我們還可以觀察到 $\overset{\frown}{QQ''}$ 垂直於 $\overline{P'Q''}$, 所以有以下的關係式:

$$\overset{\frown}{QQ'}\cos\alpha = \overset{\frown}{QQ''}$$

利用上式, 我們改寫環帶的吸引力大小

$$\frac{G(2\pi h\,\overset{\frown}{QQ'}\cos\alpha)}{\overline{QP}^2} = \frac{G(2\pi h\,\overset{\frown}{QQ''})}{\overline{QP}^2}$$

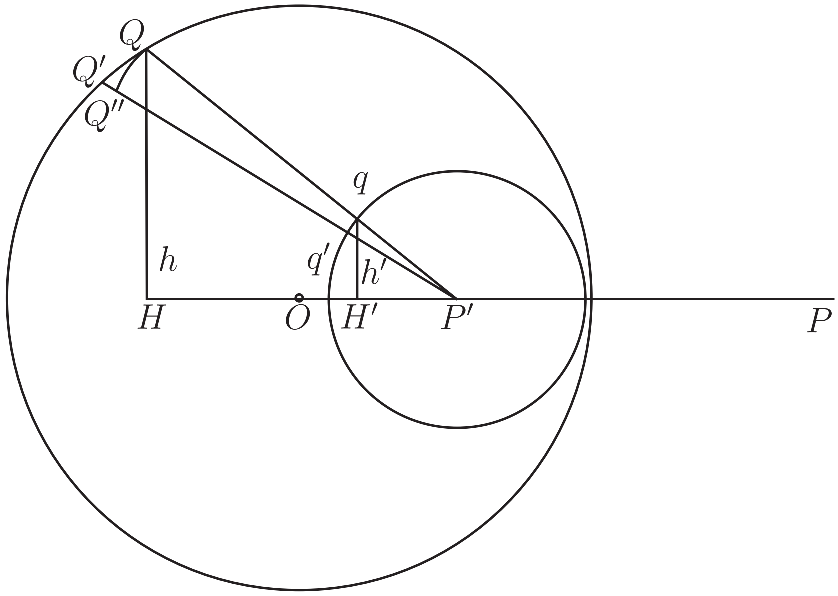
接著, 將式子同時乘以 $\overline{OP}^2$ 及除以 $\overline{OP}^2$

$$= \frac{G(2\pi h\,\overset{\frown}{QQ''})}{\overline{OP}^2}\,\frac{\overline{OP}^2}{\overline{QP}^2}$$

再利用 $\triangle OQP' \sim \triangle OPQ$, 得到邊長的比例關係 $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{QP}} = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{QP'}}$, 繼續改寫

$$\begin{aligned}
&= \frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ''})}{\overline{OP}^2}\,\frac{\overline{OQ}^2}{\overline{QP'}^2} \\
&= \frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ''})}{\overline{OP}^2}\,\frac{R^2}{\overline{QP'}^2} \\
&= \frac{G(2\pi R^2)}{\overline{OP}^2}\,\frac{h}{\overline{QP'}}\,\frac{\overparen{QQ''}}{\overline{QP'}}
\end{aligned}$$

到此, $\dfrac{1}{\overline{OP}^2}$ 已經出現, 接下來我們要處理的是 $\dfrac{h}{\overline{QP'}}$ 和 $\dfrac{\overparen{QQ''}}{\overline{QP'}}$ 這兩項。



以 P' 為球心, 作一單位球殼 (這就是我們的籃子), 交 $\overline{P'Q}$ 於 q, 交 $\overline{P'Q'}$ 於 q', 如上圖。並令 $h' = \overline{qH'}$ 為 q 到直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 的距離。

我們觀察出, 圖中的大球殼及小球殼之間有一些相似形的關係, 其中, 利用 $\triangle P'QH \sim \triangle P'qH'$, 由對應邊長成比例, 可以推得

$$\frac{h}{\overline{QP'}} = \frac{h'}{\overline{qP'}} = h'$$

另外還有, 扇形 $P'QQ'' \sim$ 扇形 $P'qq'$, 所以其對應邊長也成比例, 推得

$$\frac{\overparen{QQ''}}{\overline{QP'}}=\frac{\overparen{qq'}}{\overline{qP'}}=\overparen{qq'}$$

利用上面兩式, 我們便可以把 $\dfrac{h}{\overline{QP'}}$ 和 $\dfrac{\overparen{QQ''}}{\overline{QP'}}$ 這兩項換掉。

$$\frac{G(2\pi R^2)}{\overline{OP}^2}\,\frac{h}{\overline{QP'}}\,\frac{\overparen{QQ''}}{\overline{QP'}}=\frac{G(2\pi h'\,\overparen{qq'}\,R^2)}{\overline{OP}^2}$$

至此, 大環帶對 P 的吸引力

$$\frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ'}\cos\alpha)}{\overline{QP}^2}$$

已被我們轉換爲與小環帶和 $\overline{OP}^2$ 有關的量

$$\frac{G(2\pi h'\,\overparen{qq'}\,R^2)}{\overline{OP}^2}$$

注意到式中的 $2\pi h'\,\overparen{qq'}$, 它其實代表了 $\overparen{qq'}$ 繞出的小環帶面積。我們的想法是把球殼 O 切成一條條的環帶, 並一對一且映成的對應到球殼 P' 的環帶, 也就是說, 所有球殼 O 的環帶, 會剛好對應到所有球殼 P' 的環帶。所以, 當我們加總的時候, 原本的關係式

$$\frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ'}\cos\alpha)}{\overline{QP}^2}=\frac{G(2\pi h'\,\overparen{qq'}\,R^2)}{\overline{OP}^2}$$

對於所有大球殼及小球殼中相對應的環帶皆會成立, 即

$$\sum_{\text{球殼}O}\frac{G(2\pi h\,\overparen{QQ'}\cos\alpha)}{\overline{QP}^2}=\sum_{\text{球殼}P'}\frac{G(2\pi h'\,\overparen{qq'}\,R^2)}{\overline{OP}^2}$$

如此, 我們便將大球殼中每一條環帶對 P 點的吸引力, 轉移到小球殼那邊去加總。且因爲單位球殼的面積爲 4π, 所以會有

$$\sum_{\text{球殼}P'}2\pi h'\,\overparen{qq'}=4\pi$$

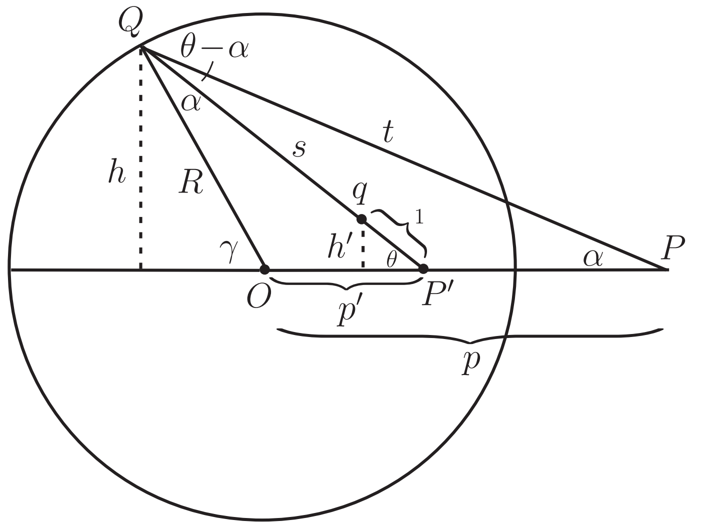
最後得到

$$\sum_{\text{球殼}P'}\frac{G(2\pi h'\,\overparen{qq'}\,R^2)}{\overline{OP}^2}=\frac{G(4\pi R^2)}{\overline{OP}^2}$$

此即王其允和項武義對牛頓《原理》第一卷命題 71 的證明。

(二)

在第二節, 我們將把 (一) 的證明以微積分的標準程序平行處理, 例如 $\overset{\frown}{QQ'} = Rd\gamma$, 請見下圖 ($P'$ 為 P 對圓的反射點):



圖中 $R = \overline{OQ}$ =半徑, $p = \overline{OP}$, $p' = \overline{OP'}$, 由於 $pp' = R^2$, $\dfrac{p'}{R} = \dfrac{R}{p}$, 所以有 $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$, $\angle OQP' = \angle OPQ = \alpha$, $\angle OP'Q = \angle OQP = \theta$。

如前一節, 我們要計算

$$\sum \frac{G(2\pi h \overset{\frown}{QQ'} \cos\alpha)}{\overline{QP}^2} = \frac{G(4\pi R^2)}{\overline{OP}^2}$$

注意到現在 $\overset{\frown}{QQ'}$ 應該表成 $Rd\gamma$, 所以應該要能算出:

$$\int \frac{2\pi h R d\gamma \cos\alpha}{\overline{QP}^2} = \frac{4\pi R^2}{p^2}$$

在 $\triangle OPQ$ 中, 由正弦定律得

$$\frac{\sin\alpha}{R} = \frac{\sin\theta}{p}$$

R、p 皆為常數, 所以

$$\frac{\cos\alpha d\alpha}{R} = \frac{\cos\theta d\theta}{p} \quad 得 \quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{R}{p}\cos\theta \tag{1}$$

考慮 $\gamma = \alpha + \theta$, $d\gamma/d\theta = \dfrac{d\alpha}{d\theta} + 1$

由 (1) 得到 $\dfrac{d\gamma}{d\theta}=1+\dfrac{R}{p}\dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$ 所以

$$\begin{aligned}R d\gamma\cos\alpha &= R\cos\alpha\Big(1+\frac{R}{p}\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\Big)d\theta = R\Big(\cos\alpha+\frac{R}{p}\cos\theta\Big)d\theta\\ &=\frac{R}{p}\Big(p\cos\alpha+R\cos\theta\Big)d\theta=\frac{R}{p}t d\theta = R\frac{t}{p}d\theta = R\frac{s}{R}d\theta\\ &= s d\theta=\overline{QP'}d\theta \end{aligned}\tag{2}$$

由 (2)

$$\int\frac{2\pi h R d\gamma\cos\alpha}{\overline{QP}^2}=\int\frac{2\pi h\overline{QP'}d\theta}{\overline{QP}^2}$$

同前一節的比例關係, $h=h'\overline{QP'}$ 所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\frac{2\pi h'(\overline{QP'})^2 d\theta}{\overline{QP}^2}=\int 2\pi h'\frac{s^2}{t^2}d\theta\\ &=\int 2\pi h'\frac{R^2}{p^2}d\theta=\frac{R^2}{p^2}\int 2\pi h' d\theta\end{aligned}$$

但 $\displaystyle\int 2\pi h' d\theta$ 是單位球的表面積 4π, 所以原式 $=4\pi\dfrac{R^2}{p^2}$, 殼定理得證。[6,7]

参考資料

1. Chandrasekhar, S., Newton's Principia for the Common Reader, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.
2. Arnold, V. Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhauser Verlag Basel, 1990.
3. 王其允, 項武義, 是蘋果還是開普勒啓發了牛頓? 台北: 科學月刊, 1970年8月。
4. 項武義, 張海潮, 從克卜勒到牛頓, 台北: 數學傳播, 32卷2期, 2007。
5. 項武義, 張海潮, 姚珩, 千古之謎, 台北: 商務印書館, 2010年4月。
6. 張海潮, 數學放大鏡, 台北: 三民書局, 2013年6月。
7. 侯以修, 以數理分析克卜勒三大行星律 — 牛頓的萬有引力定律, 台大數學系碩士論文, 2013年7月。

—本文作者張海潮爲台大數學系退休教授, 侯以修台大數學系碩士畢業—

[6] Q 在圓 O 上走一圈, 對應的 q 也在單位圓上走一圈。

[7] V. I. Arnold 在紀念《原理》出版 300 週年時出了一本書:《Huygens and Barrow, Newton and Hooke》在書中 28 頁, 他提到 Laplace(1749∼1827) 利用 Gauss (1777∼1855) 散度定理證明命題 71, 這個證明對熟悉向量微積分或是馬克斯威方程式的讀者也許更直接。