數學傳播 39卷4期, pp. 44-48

交錯 p 級數的重排

王九逵 · 胡門昌

交錯調和級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$ 收斂至 $\log 2$, 即

$$\log 2=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\Big\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big\}$$

通常直接寫成

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

因爲是條件收斂, 根據黎曼定理, 各項適當重新排列可收斂到任意實數。例如課本常會提的, 重新排爲 2 正項接 1 負項則收斂到 $\dfrac{3}{2}\log 2$, 即

$$\frac{3}{2}\log 2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{10}+\cdots$$

另外如果重新排爲 1 正項 2 負項則收斂到 $\dfrac{1}{2}\log 2$, 即

$$\frac{1}{2}\log 2=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\cdots$$

更一般情況, 重新排爲 a 個正項接 b 個負項得到

$$\begin{aligned}\log 2\sqrt{\frac{a}{b}}=&1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2a-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2a+3}+\cdots+\frac{1}{4a-1}\\&-\frac{1}{2b+2}-\frac{1}{2b+4}-\cdots-\frac{1}{4b}+\frac{1}{4a+1}+\frac{1}{4a+3}+\cdots+\frac{1}{6a-1}-\frac{1}{4b+2}-\cdots\end{aligned}$$

特別如果 $a=1$, $b=4$, 即重新排爲 1 正項 4 負項得到

$$\begin{aligned}0=&1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\frac{1}{24}\\&+\frac{1}{7}-\frac{1}{26}-\frac{1}{28}-\frac{1}{30}-\frac{1}{32}+\frac{1}{9}-\cdots\end{aligned}\tag{$*$}$$

用 google 搜尋可查到這些結果。在 Wikipedia 關於 Riemann series theorem 裡面證明了更一般結果, 並且指出如何重新排列使收斂到任意實數, 方法似乎相當複雜。這裡要介紹一個簡單方法。先說明 $(*)$ 的證明。從證明可發現一般作法。

設 $S_{(n)}$ 爲 $(*)$ 右邊級數從第 1 項到第 n 段負項的和。$S_{(n)}$ 包含原來交錯調和級數前 n 個正項及前 $4n$ 個負項

$$\begin{aligned}S_{(n)} &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)\\ &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+3n/n}\Big)\end{aligned}$$

$S_{(n)}$ 分成 2 部分。前半是原來交錯調和級數前 $2n$ 項和, 後半是函數 $y=\dfrac{1}{2x}$ 在區間 $[1,4]$ 的黎曼和, 於是

$$\lim_{n\to\infty} S_{(n)} = \log 2 - \int_1^4 \frac{1}{2x}dx = \log 2 - \frac{1}{2}\log 4 = 0$$

若 S_n 爲 $(*)$ 右邊級數前 n 項和, 則 $S_{5n}=S_{(n)}$, 且 $|S_{5n+k}-S_{(n)}|\le \dfrac{4}{n}$, $k=1,2,3,4$, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{(n)} = 0$。

要重新排列使收斂到 $\log 2-\dfrac{1}{2}\log t$, $t\ge 1$ 只須使 $S_{(n)}$ 的後半是函數 $y=\dfrac{1}{2x}$ 在區間 $[1,t]$ 的黎曼和。先把原來交錯調和級數的負項列出來。

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\cdots$$

把第 1 個正項 1 放最前面, 第 $n+1$ 個正項 $\dfrac{1}{2n+1}$ 放在第 $[nt]$ 個負項後面 ($[x]$ 表示不超過 x 的最大整數), 即 $\dfrac{1}{2n+1}$ 在 $-\dfrac{1}{2[nt]}$ 和 $-\dfrac{1}{2[nt]+2}$ 之間。新級數從第 1 項到 $\dfrac{1}{2n+1}$ 後 1 項如下

$$\begin{aligned}&1-\cdots-\frac{1}{2[t]}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2[2t]}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{2[3t]}+\frac{1}{7}-\cdots\\ &\quad -\frac{1}{2[(n-1)t]}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2[(n-1)t]+2}-\cdots-\frac{1}{2[nt]}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2[nt]+2}\cdots\end{aligned}$$

因爲

$$[t(n-1)]=[tn-t]\le[tn-[t]]=[tn]-[t]$$

又

$$[tn]-[t(n-1)]\le[[tn]-t(n-1)+1]\le[tn-t(n-1)+1]=[t]+1$$

$\dfrac{1}{2n-1}$ 和 $\dfrac{1}{2n+1}$ 間有 $[t]$ 或 $[t]+1$ 個負項。

設 $S_{(n)}$ 爲重排後級數從第 1 項到第 n 段負項的和。$S_{(n)}$ 包含原來交錯調和級數前 n 個

正項及前 $[nt]$ 個負項

$$\begin{aligned}S_{(n)} &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{[nt]}\Big)\\ &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{[nt]/n}\Big)\end{aligned}$$

$S_{(n)}$ 分成 2 部分。前半是原來交錯調和級數前 $2n$ 項和, 後半是函數 $y=\dfrac{1}{2x}$ 在區間 $[1,t]$ 的黎曼和 (請注意 $t-\dfrac{1}{n}\le\dfrac{[nt]}{n}\le t$), 於是

$$\lim_{n\to\infty}S_{(n)}=\log 2-\int_1^t\frac{1}{2x}dx=\log 2-\frac{1}{2}\log t$$

設 S_m 爲重排後級數前 m 項和。若 S_m 中最後一項位於 $\dfrac{1}{2n-1}$ 和 $\dfrac{1}{2n+1}$ 間, 則 $|S_m-S_{(n)}|\le\dfrac{t+1}{n}$, 於是 $\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\lim\limits_{n\to\infty}S_{(n)}=\log 2-\dfrac{1}{2}\log t$。

要重新排列使收斂到 $\log 2+\dfrac{1}{2}\log t$, $t\ge 1$。先把原來交錯調和級數的正項都列出來

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\cdots$$

把第 n 個負項放在第 $[nt]$ 個正項後面, 即 $-\dfrac{1}{2n}$ 放在 $+\dfrac{1}{2[nt]-1}$ 和 $+\dfrac{1}{2[nt]+1}$ 間。底下列出重排後級數從第 1 項到 $-\dfrac{1}{2n}$ 後 1 項

$$\begin{aligned}1+\cdots+&\frac{1}{2[t]-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2[t]+1}-\cdots+\frac{1}{2[2t]-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2[2t]+1}+\cdots+\frac{1}{2[3t]-1}\\ &-\frac{1}{6}+\frac{1}{2[3t]+1}+\cdots+\frac{1}{2[(n-1)t]-1}-\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2[(n-1)t]+1}+\cdots\\ &+\frac{1}{2[nt]-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2[nt]+1}\cdots\end{aligned}$$

設 $S_{(n)}$ 爲重排後級數從第 1 項到第 n 個負項和。$S_{(n)}$ 包含原來交錯調和級數前 n 個負項及前 $[nt]$ 個正項

$$\begin{aligned}S_{(n)} &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\Big(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2[nt]-1}\Big)\\ &= \Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2[nt]-1}-\frac{1}{2[nt]}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{[nt]}\Big)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{(n)}=\log 2+\int_1^t\frac{1}{2x}dx=\log 2+\frac{1}{2}\log t$$

設 S_m 爲重排後級數前 m 項和。若 S_m 中最後一項位於 $\dfrac{1}{2n}$ 和 $\dfrac{1}{2n+2}$ 間, 則 $|S_m - S_{(n)}| \le \dfrac{t+1}{n}$, 於是 $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{n\to\infty} S_{(n)} = \log 2 + \dfrac{1}{2}\log t$。

同樣做法也可用於交錯 p 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p} = 1-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}-\dfrac{1}{4^p}+\cdots$。假設 $0<p<1$, 再假設此級數收斂至 α, 即假設

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} = 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\cdots$$

底下說明如何重新排列使收斂到 $\alpha - 2^{-p}t$, $t>0$ 先把級數的負項都列出來.

$$-\frac{1}{2^p}-\frac{1}{4^p}-\frac{1}{6^p}-\frac{1}{8^p}-\frac{1}{10^p}-\frac{1}{12^p}-\frac{1}{14^p}-\frac{1}{16^p}-\frac{1}{18^p}-\frac{1}{20^p}-\frac{1}{22^p}-\cdots$$

把第 1 個正項 1 放最前面, 第 $n+1$ 個正項 $\dfrac{1}{(2n+1)^p}$ 放在第 $[n+tn^p]$ 個負項後面, 即 $\dfrac{1}{(2n+1)^p}$ 在 $-\dfrac{1}{(2[n+tn^p])^p}$ 和 $-\dfrac{1}{(2[n+tn^p]+2)^p}$ 之間。底下列出重排後級數從第 1 項到 $\dfrac{1}{2n+1}$ 後 1 項

$$\begin{aligned}1-\cdots-\frac{1}{(2[1+t])^p}+\frac{1}{3^p}-\cdots-\frac{1}{(2[2+t2^p])^p}+\frac{1}{5^p}-\cdots-\frac{1}{(2[3+t3^p])^p}+\frac{1}{7^p}-\cdots\\ -\frac{1}{(2[n-1+t(n-1)^p])^p}+\frac{1}{(2n-1)^p}-\cdots-\frac{1}{(2[n+tn^p])^p}+\frac{1}{(2n+1)^p}\\ -\frac{1}{(2[n+tn^p]+2)^p}-\cdots\end{aligned}$$

設 $S_{(n)}$ 爲重排後級數從第 1 項到第 n 段負項的和。$S_{(n)}$ 包含原來級數前 n 個正項及前 $n+[tn^p]$ 個負項

$$\begin{aligned}S_{(n)} &= \Big(1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\Big)\\ &\quad -\frac{1}{2^p}\Big(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{[n+tn^p]^p}\Big)\end{aligned}$$

而

$$\frac{[tn^p]}{n^p} \ge \frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{[n+tn^p]^p} \ge \frac{[tn^p]}{(n+[tn^p])^p} = \frac{[tn^p]/n^p}{(1+[tn^p]/n)^p}$$

因 $0<p<1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[tn^p]}{n^p} = t = \lim_{n\to\infty}\frac{[tn^p]/n^p}{(1+[tn^p]/n)^p}$$

於是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{(n)} = \alpha - 2^{-p}t$。證明了重排後新級數收斂到 $\alpha - 2^{-p}t$, $t>0$ 剩下重新排列使收斂到 $\alpha + 2^{-p}t$, $t>0$。作法類似, 不再重複。

仍然設 $0<p\le 1$。再假定 $c>0$ 爲常數, $n-c\le a_n\le n+c$ 且 $a_n>0$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{{a_n}^p}=\frac{1}{{a_1}^p}-\frac{1}{{a_2}^p}+\frac{1}{{a_3}^p}-\frac{1}{{a_4}^p}+\frac{1}{{a_5}^p}-\frac{1}{{a_6}^p}\cdots$$

爲條件收斂。設其和爲 λ。因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{{a_n}^p}-\frac{1}{n^p}|$ 收斂, 依照重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 方式也可重排此級數使收斂至與前面結果相對應的數字, 詳細討論省略。

如何重排使新級數部分和數列有指定的上極限及下極限, 將於另文討論。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—