數學傳播 39卷3期, pp. 92-96

海倫三角形中元素組成等差數列的探究

郝保國

海倫三角形的研究是近年初等數學研究的熱點之一, 而且取得了很好的成績。《數學傳播》36卷3期的文章《三邊成等差數列的 Heron 三角形》, 對我啟發很大。在海倫三角形中除了三邊可能成等差數列外, 那麼, 三邊與內切圓半徑、周長、高、面積等這些三角形的其它元素能組成等差數列嗎?

爲了便於探究, 設 $\triangle ABC$ 爲本原海倫三角形, 三邊長 a, b, c 成等差數列, 且 $a>b>c$, 面積爲 S, 周長爲 l, 內切圓半徑爲 r, b 邊上的高爲 h。先證明如下引理:

引理: 在三邊成等差數列的本原海倫三角形中, 內切圓半徑 r 與 b 邊上的高 h 均爲正整數。

證明: 由文 [1] 知道, 本原海倫三角形三邊長爲兩奇一偶, 故設 $a=2n+k$, $b=2n$, $c=2n-k$ $(0<k<n$, n, k 爲正整數, 且 k 爲奇數), 則半周長 $p=3n$。由海倫公式, 有

$$S=\sqrt{3n(n-k)n(n+k)}=n\sqrt{3(n^2-k^2)}$$

因爲 S 爲正整數, 所以 $n\sqrt{3(n^2-k^2)}$ 爲正整數, 可設 $n^2-k^2=3m^2$, m 爲正整數。

由 $S=rp\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{3(n^2-k^2)}}{3}=\dfrac{\sqrt{3\times 3m^2}}{3}=m$, 故 r 爲正整數。

b 邊上的高 $h=\dfrac{2S}{b}=\dfrac{2n\sqrt{3(n^2-k^2)}}{2n}=\sqrt{3(n^2-k^2)}=3m$, 故 h 爲正整數。

探究1: a, b, c 與 S 能組成等差數列嗎?

因 $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)>ra\geq a$, 可能組成的等差數列應是 c, b, a, S。

$$\begin{aligned}
&S-a=k\Rightarrow n\sqrt{3(n^2-k^2)}=2n+2k\\
&\Rightarrow 3n^2(n-k)(n+k)=4(n+k)^2\\
&\Rightarrow 3n^2(n-k)=4(n+k)\Rightarrow 3n^3-4n=(3n^2+4)k \qquad (1)\\
&\Rightarrow 3n^2+4\mid 3n^3-4n
\end{aligned}$$

因爲 $3n^3-4n=n(3n^2+4)-8n$, 所以, $3n^2+4 \mid 8n$, 當 $n\geq 3$ 時, $3n^2+4>8n$。

只有 $n=2$ 時, $16\mid 16$。再由 (1) 解得 $k=1$, 此時, 三角形三邊爲3, 4, 5 , 面積 $S=6$。於是得到

定理一: 存在唯一一組海倫數 $(a,b,c)=(5,4,3)$, 使本原海倫三角形面積與三邊成等差數列。

探究2: a, b, c 與 r 能組成等差數列嗎?

不難得到 $r<c$。可能組成的等差數列應是 r, c, b, a, 則

$$\begin{aligned}
&c-r=k\Rightarrow 2n-2k=\frac{\sqrt{3(n^2-k^2)}}{3}\\
&\Rightarrow 36(n-k)^2=3(n^2-k^2)\Rightarrow 12(n-k)=n+k\\
&\Rightarrow n=\frac{13}{11}k,\ \text{令}\ k=11q,\ q\in N^+\Rightarrow n=13q.\\
&\Rightarrow r=4q,\ c=15q,\ b=26q,\ a=37q,\ q\in N^+,\text{於是得到}
\end{aligned}$$

定理二: 存在無數多組海倫數 $(a,b,c)=(37q,26q,15q)$ $(q\in N^+)$, 使本原海倫三角形三邊與內切圓半徑成等差數列。

探究3: r, c, a 能組成等差數列嗎?

若 r, c, a 可組成等差數列, 則 $c-r=2k$, 又 $c=2n-k$, 有

$$2n-3k=\frac{\sqrt{3(n^2-k^2)}}{3}\Rightarrow 3(2n-3k)^2=n^2-k^2\Rightarrow 11n^2=2(18nk-14k^2)$$

$\Rightarrow 2\mid 11n^2$, 因爲 $(2,11)=1$, 所以, $2\mid n^2\Rightarrow 2\mid n$。設 $n=2e$, e 爲正整數, 則有

$$11\times 4e^2=36\times 2ek-28k^2\Rightarrow 11e^2-18ek+7k^2=0$$

$(11e-7k)(e-k)=0\Rightarrow k=e$ 或者 $k=\dfrac{11}{7}e$。

若 $k=e$, 則 $n=2e=2k$, 此時 $a=5k$, $c=3k$, $r=k\Rightarrow b=4k$。

若 $k=\dfrac{11}{7}e$, 令 $e=7u$, u 爲正整數, 則

$$k=11u,\ n=14u,\ \Rightarrow a=39u,\ c=17u,\ r=5u\text{。}$$

顯然, $a-c\neq c-r$, 此時, r, c, a 不能組成等差數列。綜上可得

定理三: 存在無數多組海倫數 $(a,b,c)=(5k,4k,3k)$ 使得 r, c, a 可成等差數列。

探究4: c, a, S 能組成等差數列嗎?

若 c, a, S 能組成等差數列, 則 $2a=c+S$。

$$\Rightarrow 2(2n+k)=(2n-k)+n\sqrt{3(n^2-k^2)}\Rightarrow 2n+3k=n\sqrt{3(n^2-k^2)} \tag{2}$$

由 (2) 知 $\sqrt{3(n^2-k^2)}$爲正整數, 依然令 $n^2-k^2=3m^2$, m 爲正整數 $\Rightarrow (n-k)(n+k)=3m\times m$ 。

令 $\dfrac{n-k}{m}=\dfrac{3m}{n+k}=\dfrac{g}{f}$, 其中 g, f 均爲正整數, 且 $(g,f)=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-k=\dfrac{mg}{f} \\ n+k=\dfrac{3mf}{g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=\dfrac{m}{2}\Big(\dfrac{g}{f}+\dfrac{3f}{g}\Big) \\ k=\dfrac{m}{2}\Big(\dfrac{3f}{g}-\dfrac{g}{f}\Big) \end{cases}$$

代入 (2) 中有,

$$\frac{2m(3f^2+g^2)}{2fg}+\frac{3m(3f^2-g^2)}{2fg}=\frac{m(3f^2+g^2)}{2fg}\sqrt{3\Big[\frac{m^2(3f^2+g^2)^2}{4f^2g^2}-\frac{m^2(3f^2-g^2)^2}{4f^2g^2}\Big]}$$

化簡上式得,

$$15f^2-g^2=9mf^2+3mg^2\Rightarrow 3(5-3m)f^2=(1+3m)g^2 \tag{3}$$

所以, $3\mid(1+3m)g^2$, 因 $(3,1+3m)=1$, 故 $3\mid g^2$, 又 3 爲素數, 則知 $3\mid g$。令 $g=3g_1$, 代入 (3) 有 $(5-3m)f^2=3(1+3m)g_1^2$, 則知 $3\mid(5-3m)f^2$, 因 $(3,5-3m)=1$, 所以 $3\mid f^2$, 又 3 爲素數, 故知 $3\mid f$, 至此得到 3 是 f 與 g 的公因數, 這與 $(f,g)=1$ 矛盾。所以, c, a, S不能組成等差數列。

探究5: h, S, l 能組成等差數列嗎?

若 h, S, l 能組成等差數列, 則 $2S=l+h$, 由前文知 $l=6n$, $h=\sqrt{3(n^2-k^2)}$。於是有

$$\begin{aligned} &2n\sqrt{3(n^2-k^2)}=6n+\sqrt{3(n^2-k^2)} \\ \Rightarrow\ & 6n=(2n-1)\sqrt{3(n^2-k^2)} \\ \Rightarrow\ & 12n^2=(2n-1)^2(n^2-k^2)=(2n-1)^2n^2-(2n-1)^2k^2 \end{aligned} \tag{4}$$

由 (4) 知, $n^2\mid(2n-1)^2n^2-(2n-1)^2k^2$, 又 $n^2\mid(2n-1)^2n^2$, 所以, $n^2\mid(2n-1)^2k^2$。因爲 $(n,2n-1)=1$, 故 $(n^2,(2n-1)^2)=1$, 得 $n^2\mid k^2$, 所以 $n\mid k$, 這與前文 $0<k<n$ 矛盾。故 h, S, l 不能組成等差數列。仿此可證, h, l, S 也不能組成等差數列。

探究6: h, b, S 能組成等差數列嗎?

如果 h, b, S 能組成等差數列, 則 $2b=h+S$, 則有

$$\begin{aligned}\sqrt{3(n^2-k^2)}+n\sqrt{3(n^2-k^2)}&=4n\\ 3(n+1)^2(n^2-k^2)&=16n^2\end{aligned}$$

設 (n_0,k_0) 是這個不定方程的一組正整數解, 則有

$$3(n_0+1)^2(n_0^2-k_0^2)=16n_0^2 \tag{5}$$

由 (5) 式知, $3\mid 16n_0^2$, 而 $(3,16)=1$, 故 $3\mid n_0^2$, 又 3 是素數, 所以, $3\mid n_0$。令 $n_0=3n_1$, 由 (5) 有

$$\begin{aligned}&3(3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)=16\times 9n_1^2\\ &\Rightarrow (3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)=16\times 3n_1^2\\ &\Rightarrow 3\mid (3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)\Rightarrow 3\mid (3n_1+1)^2k_0^2\end{aligned} \tag{6}$$

而 $(3,3n_1+1)=1$, 故 $3\mid k_0^2$, 又 3 是素數, 所以, $3\mid k_0$。令 $k_0=3k_1$, (6) 式可化爲

$$\begin{aligned}&(3n_1+1)^2(9n_1^2-9k_1^2)=16\times 3n_1^2\\ &\Rightarrow 3(3n_1+1)^2(n_1^2-k_1^2)=16n_1^2\\ &\Rightarrow 3\mid 16n_1^2,\end{aligned} \tag{7}$$

因 $(3,16)=1$, 故 $3\mid n_1^2$, 又因 3 是素數, 所以 $3\mid n_1$, 令 $n_1=3n_2$, (7) 式化爲

$$\begin{aligned}&3(9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)=16\times 9n_2^2\\ &\Rightarrow (9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)=16\times 3n_2^2\\ &\Rightarrow 3\mid (9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)\Rightarrow 3\mid (9n_2+1)^2k_1^2\end{aligned} \tag{8}$$

而 $(3,9n_2+1)=1$, 故 $3\mid k_1^2$, 又 3 是素數, 所以, $3\mid k_1$。令 $k_1=3k_2$, (8) 式可化爲

$$\begin{aligned}(9n_2+1)^2(9n_2^2-9k_2^2)&=16\times 3n_2^2\\ 3(9n_2+1)^2(n_2^2-k_2^2)&=16n_2^2\end{aligned}$$

如此繼續下去, $3\mid n_0$, $3\mid k_0\Rightarrow 3^2\mid n_0$, $3^2\mid k_0\Rightarrow\cdots\Rightarrow 3^d\mid n_0$, $3^d\mid k_0\Rightarrow\cdots$, 其中 d 爲正整數。

由無窮遞降法可知, $n_0=0$, $k_0=0$, 這與 n_0, k_0 是正整數矛盾, 故不定方程

$$3(n+1)^2(n^2-k^2)=16n^2$$

無解。所以, h, b, S 不能組成等差數列。

致謝: 感謝編審對此文提出的寶貴意見和付出的辛勤勞動!

參考文獻

1. 邊欣, 李忠民。三邊成等差數列的 Heron 三角形 [J]。數學傳播 36 卷 3 期, pp.81-85。
2. 潘承洞, 潘承彪。初等數論[M]。北京: 北京大學出版社, 1998。

—本文作者任教華南師範大學附屬中學—