數學傳播 39卷3期, pp. 82-91

從課堂教學中的一道錯題出發談數學問題的提出

徐彥輝

「問題」是數學的心臟和靈魂, 沒有問題就沒有數學。數學是由問題構成的, 數學的一切都可以說成是數學問題的衍生物。問題在學科進展中的意義不可否認。一門學科充滿問題, 它就充滿生命力; 如果缺乏問題, 則預示著該學科的衰落 (希爾伯特)。「問題」也是數學教學的中心, 是數學教學的出發點和動力。新奇的、有趣的問題具有強烈的吸引力, 能激發學生對學習的需要, 產生探索與解決問題的願望和動力, 引導學生思維不斷深入。問題是接生婆, 它能幫助新思想的誕生。在數學的領域中, 提出問題的藝術比解答問題的技能更爲重要。數學家和數學教育研究人員大都認爲提出問題是一項重要的數學活動, 學生應該儘早獲得提出數學問題的經歷。基爾派翠克早在 1987 年就曾提出:「創造自己數學問題的經歷」應該成爲每一位學生數學教育不可或缺的一個重要組成部分。[1] 提出新的數學問題能使學生經歷創造數學的過程, 而不僅僅只是吸收老師講授的數學知識, 能使學生經歷一種重要且令人興奮的產生數學想法的思考過程。學生應該獲得這種體驗創造新定理過程的興奮感, 即使這些定理對他們而言是新的。[2] 因此, 強化數學問題意識, 重視啟發引導學生發現並提出問題是數學教學的關鍵所在。教師應在充分研究數學教材的基礎上, 從一些基本問題出發, 引導學生提出一些新的相關聯的數學問題, 體驗數學知識的產生和創造過程, 以培養和發展學生的數學好奇心和探索慾。本文將以課堂教學中的一道錯題爲例, 來說明教師如何從基本問題出發, 一步一步引導學生提出新的數學問題。

案例: 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F, $S_{\triangle GCE}=4$, $S_{\triangle GCD}=5$, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

師: 我們來看這樣一個問題, 大家能不能很快就解答這個問題?

學生1: $\because \overline{BD}=2\overline{DC}$, $\therefore \overline{BC}=3\overline{DC}$, $\therefore S_{\triangle BGC}=3S_{\triangle GCD}=3\times 5=15$
$\because S_{\triangle GCE}=4$, $\quad \therefore S_{\triangle BCE}=S_{\triangle GBC}+S_{\triangle GCE}=15+4=19.$
$\because E$ 是 $\overline{AC}$ 的中點, $\therefore S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCE}=2\times 19=38.$

學生 2: $\because E$ 是 $\overline{AC}$ 的中點, $\quad \therefore S_{\triangle AEG} = 2S_{\triangle GCE} = 4.$

$\because S_{\triangle GCD} = 5, \quad \therefore S_{\triangle ACD} = 13.$

$\because \overline{BD} = 2\overline{DC}, \quad \therefore \overline{BC} = 3\overline{DC}, \quad \therefore S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle ACD} = 3 \times 13 = 39.$

問題 1: 為什麼有兩個不同的答案? 哪個答案是對的呢? 兩類學生再次檢查自己的解題過程, 同時也看看另一種解法, 學生感到兩種解法都是對的, 過程描述也都沒有什麼問題, 那麼問題到底出在哪裡呢? 想到這裏, 學生的興趣一下子就提高了, 課堂氣氛也變得緊張激烈, 於是師生的探究之旅就開始了。

1. 以問題化設計展開, 啓發探究思考

由於上述過程, 自然會提出一些問題:

問題 2: 能不能用什麼辦法來驗證這兩個答案的正確性呢?

學生努力想提出一些方法去驗證結果的正確性, 但由於這個問題難度有些大, 加上學生的水準有限, 學生一時之間想不到方法來解決。因此, 教師可以和學生一起想方法。這時, 教師可以利用幾何畫板來初步驗證, 通過幾何畫板進行探究, 讓學生直觀地去感受兩種結果的正確性。具體過程如下:

教師打開幾何畫板, 先任意畫一個 $\triangle ABC$, 按照題目中 "E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F" 的要求, 畫出圖 1。

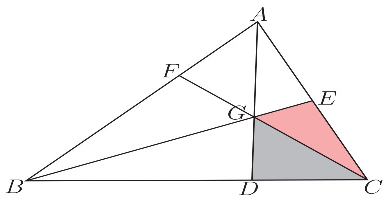

圖 1

當拖動點 C 時, $\triangle GCE$ 的面積與 $\triangle GCD$ 的面積都發生了變化, 取部分資料列表如下:

$S_{\triangle GCE}$	1.00	2.00	3.00	3.75	4.00	5.00	6.00
$S_{\triangle GCD}$	1.34	2.66	4.01	5.00	5.34	6.66	8.00
$S_{\triangle ABC}$	10.01	20.01	29.97	37.47	40.05	49.96	59.57

讓學生仔細觀察這個表格, 繼續提出問題。

問題 3: 仔細觀察這個表, 你發現了什麼?

透過引導學生觀察, 學生會發現一個現象 : 當 $S_{\triangle GCE} = 4$ 時, $S_{\triangle GCD}$ 是不可能等於 5 的 (如圖 2) (儘管幾何畫板上顯示的資料會有一定誤差, 但這麼大的誤差已不是誤差所導致的

了)。

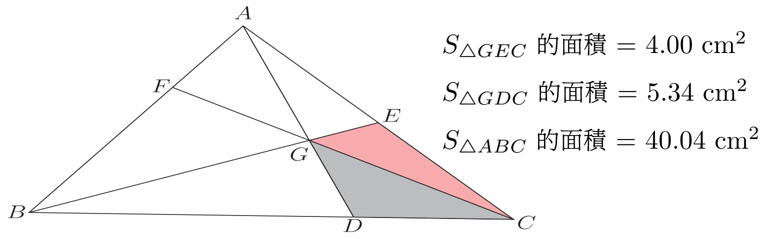

圖 2

問題4: 從這個表格中, 你能不能再發現些什麼呢?

這個問題對學生來說有些困難, 學生難以找到思考的角度, 即使找到了也不一定能發現什麼。這時, 教師可以適當給予提示:

師: 大家有沒有發現 $\triangle GCE$ 與 $\triangle GCD$ 這兩個三角形面積的比值好像有一定規律。

學生通過觀察計算, 得出一個結論 : 它們的比值似乎都在 0.75 左右波動 (見下表)。

$S_{\triangle GCE}$	1.00	2.00	3.00	3.75	4.00	5.00	6.00
$S_{\triangle GCD}$	1.34	2.66	4.01	5.00	5.34	6.66	8.00
$\dfrac{S_{\triangle GCE}}{S_{\triangle GCD}}$	0.746	0.752	0.748	0.75	0.749	0.751	0.75

問題5: 你覺得問題可能出在哪裡呢?

教師積極引導學生思考, 嘗試提出問題所在, 這時, 有部分學生可能觀察了上述表格, 直觀的感覺是 $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積兩者之間存在一定的比例關係, 因此從這個角度讓學生發現可能存在的問題, 具體原因有:

(1) 是否原題目中給出的「$S_{\triangle GCE}=4$, $S_{\triangle GCD}=5$」這兩個條件本身有誤?

(2) $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積之間是不是存在一定的數量關係? (因爲幾何畫板的資料可能存在偶然性, 我們需要尋求其他方法來驗證這種關係。)

從上述分析來看, 學生一般會認爲問題很可能出在已知中的兩個條件 $S_{\triangle GCE}=4$ 和 $S_{\triangle GCD}=5$ 上, 自然會提出問題 6, 並引出下面的探究過程。

問題6: 到底 $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積兩者之間存在什麼關係呢?

帶著疑問, 教師和學生一起開始探究問題本質, 可得到以下內容:

我們不妨假設 $S_{\triangle GCE}=x$, $S_{\triangle GCD}=y$

根據第一種解法的思路, 可以得出:

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACD}=3(2S_{\triangle GCE}+S_{\triangle GDC})=3\times(2x+y)=6x+3y.$$

根據第二種解法的思路, 可以得出:

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCE}=2(S_{\triangle GCE}+3S_{\triangle GDC})=2\times(x+3y)=2x+6y.$$

$\therefore\ 6x+3y=2x+6y$, 即 $4x=3y$, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$。

根據上述計算, 學生會發現: $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積之比竟然是一個定值 (即 $\dfrac{3}{4}$)。也就是說, 當 "在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F" 時, $\triangle GCE$ 和 $\triangle GCD$ 之間存在著 $3S_{\triangle GCD}=4S_{\triangle GCE}$ 的關係。

這時, 學生恍然大悟了 : 原來問題的糾結之處就在這裏, $\triangle GCE$ 和 $\triangle GCD$ 的面積大小有這樣的數量關係, 怪不得原題目中已知「$S_{\triangle GCE}=4$, $S_{\triangle GCD}=5$」會有兩個不同的結果出現, 原來問題就出在題目本身出錯了。

進行到這裏, 教師可進一步發問:

問題 7: 同學們仔細觀察圖 1, 你們還會聯想到什麼? 能不能想到用其他的方法也可以證明 $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積之比爲 $\dfrac{3}{4}$? 由於這個問題難度也比較大, 學生可能會不知道老師所問的問題是什麼意思? 因此, 教師可以提示學生從線段比例關係這個角度去想。這是一個很典型的圖形, 看著這個圖形, 學生有可能會聯想到西瓦定理和孟氏定理。如果經老師提示後學生還是想不到這兩個定理, 老師就只好自己說出來了。然後, 由學生自己運用西瓦定理和孟氏定理, 去推導 $\triangle GCE$ 和 $\triangle GCD$ 面積大小的數量關係。這樣, 學生就很容易得到推導 $\triangle GCE$ 和 $\triangle GCD$ 面積大小數量關係的另一種方法, 同時, 學生也將更深層次地理解這個問題的本質和發現不同問題之間的聯繫 (以下的解答最好引導學生自己獨立給出)。

學生: 由西瓦定理得: $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$,

由已知 "$\overline{BD}=2\overline{DC}$, E 是 $\overline{AC}$ 的中點" 得: $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{1}{2}$

由孟氏定理得: $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{DG}}{\overline{GA}}=1$, 則 $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{DG}}=\dfrac{3}{2}$, 則 $\dfrac{S_{\triangle GCE}}{S_{\triangle GCD}}=\dfrac{\frac{1}{2}S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle GCD}}=\dfrac{3}{4}$。

最後, 教師可以提出:

問題8: 那我們可以怎樣來解決這個問題呢?

學生會想到把原本錯誤的題目糾正過來, 那就可以避免錯誤了, 也就是改正題目條件。具體的改法有以下幾種:

(1) 已知：在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F, $S_{\triangle GCE}=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面積;

(2) 已知：在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F, $S_{\triangle GCD}=5$, 求 $\triangle ABC$ 的面積;

(3) 已知：在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F, $S_{\triangle GCE}=4$, $S_{\triangle GCD}=\dfrac{16}{3}$ 求 $\triangle ABC$ 的面積。

這一環節的整個過程主要是以問題啟發生成爲主, 通過教師的引導和問題的設計一步一步啟發學生思考, 讓學生發現問題所在, 也揭示了問題的生成及提出過程。

2. 以探究變式為主, 引伸觸類貫通

教師繼續引導學生深入探究問題本質。這時, 由於學生的思維還沒真正打開, 一時不能發散問題。因此, 教師可以先給出示例 (想法 1), 慢慢引導學生進入變式的情境。

想法1: 如圖3, 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F。如果得知圖中 6 個小三角形中任意一個三角形的面積, 是否可以求出 $\triangle ABC$ 的面積呢?

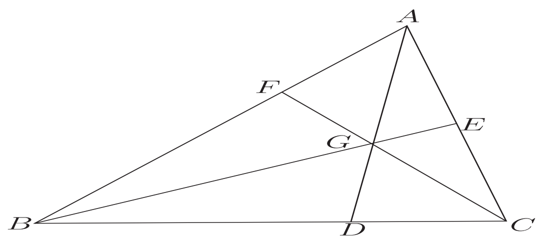

圖 3

提出這個想法後, 學生的第一反應是一個一個試試看, 以此來驗證其正確性。分類歸納了後, 具體探究結果如下:

(1) 若已知 $\triangle GCE$ (或 $\triangle AGE$) 的面積爲 s, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

由上面的探究結果, 我們很快地就得到:

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ADC}=3(S_{\triangle AGC}+S_{\triangle GCD})=3(2S_{\triangle GCE}+\frac{4}{3}S_{\triangle GCE})=10s,$$

或

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ADC}=3(S_{\triangle AGC}+S_{\triangle GCD})=3(2S_{\triangle GAE}+\frac{4}{3}S_{\triangle GAE})=10s.$$

(2) 若已知 $\triangle GCD$ (或 $\triangle GBD$) 的面積爲 s, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCE}=2(S_{\triangle BGC}+S_{\triangle GCE})=2(3S_{\triangle GCD}+\frac{4}{3}S_{\triangle GCD})=\frac{15}{2}s,$$

或

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle BCE}=2(S_{\triangle BGC}+S_{\triangle GCE})=2(\frac{3}{2}S_{\triangle GBD}+\frac{3}{8}S_{\triangle GBD})=\frac{15}{4}s.$$

(3) 若已知 $\triangle AGF$ 的面積爲 s, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

$\because$ E 是 $\overline{AC}$ 的中點, $\therefore$ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}$, $S_{\triangle GAE}=S_{\triangle GCE}$, $\therefore$ $S_{\triangle GBA}=S_{\triangle GBC}$,

$\because$ $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\therefore$ $S_{\triangle GBD}=\frac{2}{3}S_{\triangle GBC}=\frac{2}{3}S_{\triangle GBA}$, 即 $\frac{S_{\triangle GBA}}{S_{\triangle GBD}}=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ $\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}}=\frac{3}{2}$, $\therefore$ $\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{3}{5}$.

過點 G 作 $\overline{GH}//\overline{BC}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 H (如圖4),

得到 $\frac{\overline{HG}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{3}{5}$.

$\therefore$ $\frac{\overline{HG}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

$\therefore$ $\frac{\overline{FG}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{HG}}{\overline{BC}}=\frac{2}{5}$, $\therefore$ $\frac{\overline{FG}}{\overline{GC}}=\frac{2}{3}$.

$\therefore$ $S_{\triangle GBF}=\frac{2}{3}S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GBD}$,

$\therefore$ $S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GAF}=s$,

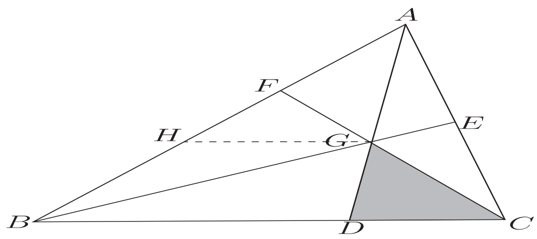

圖 4

這樣問題就轉化爲上述情況 (2) 了。

這裏需要指出的是: 學生不一定能馬上想到通過添加平行線構造相似三角形, 這個障礙需要學生具有較好的數學功底及數學思維, 也需要教師適當的引導。

(4) 若已知 $\triangle BGF$ 的面積爲 s, 求 $\triangle ABC$ 的面積。

由上述證明可得: $S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GAF}=\frac{1}{2}S_{\triangle GBF}=\frac{1}{2}s$, 又轉化爲情況 (2) 了。

問題9: 從上述探究過程, 我們可以得到哪些結論?

積極激發學生的思維, 引發其思考, 可以得出以下結論:

結論 1: 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, 點 D 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於點 F。如果得知圖中 6 個小三角形中任意一個三角形的面積, 便可以求出 $\triangle ABC$ 的面積。

接著, 由 $S_{\triangle GAF}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle GBF}$ 可以得到: $\overline{AF}=\dfrac{1}{2}\overline{BF}$, 於是, 又有了:

結論 2: 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 $\overline{AC}$ 的中點, $\overline{BD}=2\overline{DC}$, $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, 連結 $\overline{CG}$ 並延長交 $\overline{AB}$ 於 F, 則點 F 必為 $\overline{AB}$ 的三等分點。

在想法 1 的基礎上, 教師可以進一步啟發學生思維, 提出想法 2, 即想法 1 的一般化。

想法 2: 如圖 5, 在 $\triangle ABC$ 中, 點 D、E、F 分別在三邊上, $\overline{AE}=m\overline{EC}$, $\overline{BD}=n\overline{DC}$, m、n 為常數, 且都不等於 0, $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於點 G。那麼 $\triangle GCE$ 的面積和 $\triangle GCD$ 的面積之間存在怎樣的關係?

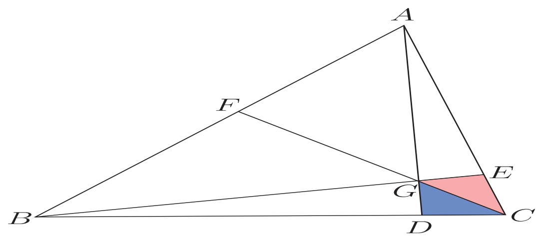

圖 5

類似於上面的方法, 不難得出: $\dfrac{S_{\triangle GCE}}{S_{\triangle GCD}}=\dfrac{m(n+1)}{n(m+1)}$.

由此又可得到以下結論:

結論 3: 如果在 $\triangle ABC$ 中, 點 D、E、F 分別在三邊上, $\overline{AE}=m\overline{EC}$, $\overline{BD}=n\overline{DC}$, m、n 為常數, 且都不等於 0, $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於點 G, 則 $\dfrac{S_{\triangle GCE}}{S_{\triangle GCD}}=\dfrac{m(n+1)}{n(m+1)}$.

在結論 3 的基礎上, 進一步歸納出更一般化的情況, 即 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{a}{b}$, ($m$、$m$、$a$、$b$ 為常數, 且都不等於 0)。

結論 4: 如果在 $\triangle ABC$ 中, 點 D、E、F 分別在三邊上, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{a}{b}$, m、n、a、b 為常數, 且都不等於 0, $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於點 G, 則 $\dfrac{S_{\triangle GCE}}{S_{\triangle GCD}}=\dfrac{m(a+b)}{a(m+n)}$.

想法3: 以上想法及結論能否推廣到四邊形中呢? 那就從特殊四邊形入手試試看吧!

(1) 如圖 6, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 $\overline{CD}$ 的中點, 點 F 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BF}=2\overline{FC}$, $\overline{DF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AD}$ 於點 H。如果 $S_{\triangle GCE}=s$, 能夠求出正方形 $ABCD$ 的面積嗎?

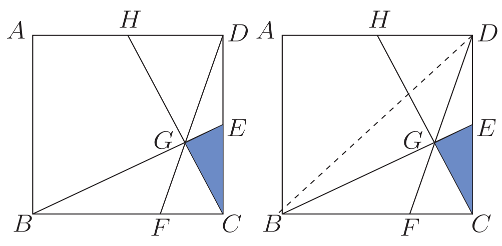

圖 6

這個不難的, 我們只要連結 BD, 問題就明朗了。$S_{\text{正方形}ABCD}=2S_{\triangle BCD}=2\times 10s=20s$.

(2) 如圖 7, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 $\overline{CD}$ 的中點, 點 F 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BF}=2\overline{FC}$, $\overline{DF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AD}$ 於點 H。如果 $S_{\triangle GCE}=s$, 矩形 $ABCD$ 的面積又等於多少呢?

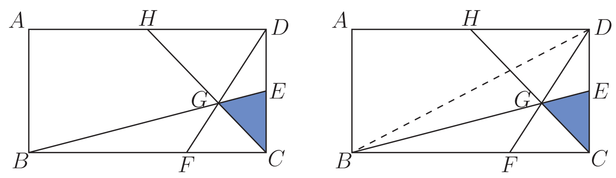

圖 7

同樣地, 連結 $\overline{BD}$, 便有了 $S_{\text{矩形}ABCD}=2S_{\triangle BCD}=2\times 10s=20s$.

(3) 如圖 8, 在平行四邊形 $ABCD$ 中, E 是 $\overline{CD}$ 的中點, 點 F 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BF}=2\overline{FC}$, $\overline{DF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AD}$ 於點 H。如果 $S_{\triangle GCE}=s$, 平行四邊形 $ABCD$ 的面積又等於多少呢?

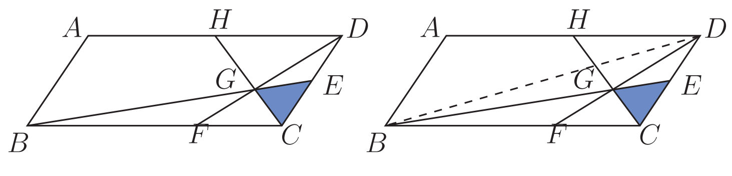

圖 8

同樣地, 連結 $\overline{BD}$, 便有了 $S_{\text{平行四邊形}ABCD}=2S_{\triangle BCD}=2\times 10s=20s$.

由於正方形、矩形都是特殊的四邊形, 因此有了:

結論 5: 在平行四邊形 $ABCD$ 中, E 是 $\overline{CD}$ 的中點, 點 F 在 $\overline{BC}$ 上, $\overline{BF}=2\overline{FC}$, $\overline{DF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G, $\overline{CG}$ 交 $\overline{AD}$ 於點 H。如果 $S_{\triangle GCE}=s$, 平行四邊形 $ABCD$ 的面積又等於 $20s$。

結論 6: 如圖 9, 在平行四邊形 $ABCD$ 中, E、F 分別在 $\overline{CD}$、$\overline{BC}$ 上, $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\dfrac{c}{d}$, $\overline{DF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於點 G。如果 $S_{\triangle GCE}=s$, 平行四邊形 $ABCD$ 的面積又等於 $\dfrac{2(a+b)(ac+bc+ad)}{ab(c+d)}$。

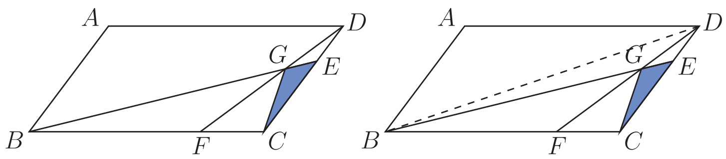

圖 9

總之, 從 "偶遇" 錯題, 到追逐"仙蹤", 在整個解題過程中, 讓學生反思探究精神和方法的重要性。一道看似簡單的題目竟內含玄機, 數學王國的神秘、奧妙可見一斑。從三角形推廣到四邊形, 從實驗演繹到推理論證, 從特殊現象到一般規律, 動手操作、深入思考、類比推廣架起了通往成功的橋樑。在學習中思考, 在思考中探究, 在探究中實踐, 在實踐中獲得和體驗到數學家研究數學的方法和學會如何提出數學問題, 這才是學習數學之道。數學教學應注重數學問題的提出過程, 數學教學的目標應當成做 (doing) 而不是知 (knowing)。注重數學問題提出過程的探索, 很重要的一條就是引導學生主動地、有條理地深入分析, 探幽索源, 從而培養其把握數學知識的本質及其聯繫的能力。如果學生積極參與發展數學思想和程式, 學生就能學會提出數學問題。然而, 我們的數學教學常常是 "解答驅動型" —— 教師或教科書給出問題, 學生努力尋求解答問題的方法; 一旦學生解決了問題, 就停止進一步探索和研究這個問題, 學生也很少被要求以已經解決了的問題爲出發點提出新的問題。其實, 這樣的探索才應該是數學學習活動的核心, 因爲這樣的活動常常能溝通不同知識、理論和方法之間的內在聯繫, 能得到重要的推廣或更深層次地理解原始的問題。如果數學學習缺少這一過程或環節, 這當然會使學生失去提高其數學能力的一次極好機會。正如 Mason, Burton & Stacey (1982) 所指出: "深入研究和探討一個問題的進展, 這絕對不會有錯的。對一個問題從不同的方向思考、變更、提煉、反復思考和改變, 這無疑具有巨大的價值。"[3]

教學生學會提出數學問題要求教師引導學生探索, 要求教師務必從研究的角度命選習題, 要求教師應具備數學研究的經驗 (哪怕是初等數學研究的經驗)。正如波利亞 (1987) 所指出 : 如果一個教師沒有過某種創造性工作的實際經驗, 他又怎能喚起、引導、幫助、甚至賞識他的

學生們的創造性的活動呢? 如果一個教師在數學方面的知識完全是被動地接受過來的, 那麼他便很難促進他的學生們進行主動的學習。如果一個教師生來從未有過奇思巧想, 那麼他大概會責備一個想出巧主意的學生, 而不是去鼓勵他這樣做。[4] Cuoco (2001) 也指出 : 在教育中很少有絕對的事, 但有一點我絕對肯定 : 就是最好的中學教師是那些具有類似於數學研究經驗的人。··· 做過這種類型研究工作的教師, 比之那些只是上過一組課程的教師, 比之那些把數學僅看成一大堆已證明了的事實的教師, 要少得多。前一類教師一旦開始了教書, 就會對數學更加投入, 他們習慣於去尋找那些並非浮在表面上的聯繫, 他們也更可能把自己的課堂組織成大的探索, 而不是低水準的演練。··· 數學教育應該做的事就是讓學生通過自己的參與, 通過「做數學」來體驗數學, 應該引導學生學會用數學的方式去思考去探索, 這才是最最重要的事。[5] 學生應該及早地像數學大師那樣去追求和進行大量的創造性思考活動, 而不要被學校裏那種無休止的練習把自己的頭腦弄得僵化和貧乏, 那實際上是沉溺在無益的練習之中。[6] 教師在此應該有所作爲! (致謝: 感謝審稿人對本文所提出的寶貴的修改意見!)

参考文獻

1. Kilpatrick, J., Problem formulating: Where do good problems come from? [A] . In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education[C]. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987, 123.
2. Moser, J., Modern elementary geometry[M]. Englewood, N.J.: Prentice-Hall, 1971, 6.
3. Mason, J., Burton, L., & Stacey, K., Thinking mathematically[M]. Essex, U. K.: Addison Wesley Longman, 1982, 142.
4. 波利亞著 · 劉遠圖, 秦璋譯 · 數學的發現 : 對解題的理解、研究和講授(第二卷)[M]。北京 : 科學出版社, 1987, 493。
5. Cuoco, Al., Mathematics for Teaching [J]. Notices of the AMS. 2001, 48(2): 168-174.
6. 莫里茲 · 朱劍英編譯, 數學家言行錄 [M]。南京 : 江蘇教育出版社. 1990, 43。

—本文作者任教浙江溫州大學數信學院—